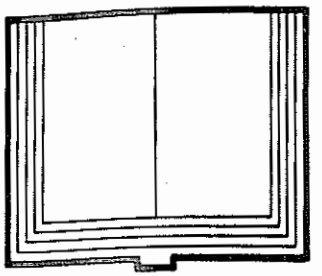
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

sep

ISBN 970-18-0594-1

CVE 11



PREPARATORIA abierta

sep

Preparatoria Abierta

Matemáticas I
Primer semestre

sep

Matemáticas I

Primer semestre

Preparatoria abierta Online | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Matemáticas I

PREPARATORIA ABIERTA

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

El contenido académico de este texto es exclusiva responsabilidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y su índice pertenece al programa correspondiente al plan de estudios del nivel medio superior, para la materia de:

MATEMÁTICAS I
UNIDADES I-IV

AUTORES: Mario Villegas Urquidi
Francisco René Zubieta

REVISÓ: Gustavo Mendoza González

COMITÉ ACADÉMICO: Humberto Cantú Salinas
Moisés Galicia Arrambide
Roberto García Martínez
Gustavo Mendoza González
Héctor Paz Estrada

ADAPTÓ: Luis Felipe Robles G.
Enrique Morales B.

La educación es una responsabilidad compartida y en consecuencia invitamos atentamente a toda persona interesada en colaborar para resolver la problemática educativa, a que remita sus comentarios, críticas y sugerencias con respecto a esta obra a la Dirección General del Bachillerato de la SEP.

Sus aportaciones serán apreciadas en todo lo que valen y permitirán perfeccionar y adecuar permanentemente estos materiales a las cambiantes condiciones de la época actual.

ISBN 970-18-0594-1

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

INDICE GENERAL

Prólogo 11
Instrucciones para el alumno 13
Notación 15

UNIDAD I
CONJUNTOS

Introducción 19
Objetivos generales 20
Diagrama temático estructural 21
Glosario 22

Módulo 1

Objetivos específicos 24
Esquema resumen 24
Contenido: Conjuntos. Notación. Oraciones abiertas, variables, conjuntos de reemplazamiento, conjuntos de verdad 25
Problemas para autoevaluación 28

Módulo 2

Objetivos específicos 29
Esquema resumen 29
Contenido: Cardinalidad. Conjuntos finitos e infinitos. Conjunto universal. Conjunto vacío. Conjuntos equivalentes. Conjuntos iguales 30
Problemas para autoevaluación 32

Módulo 3

Objetivos específicos 34
Esquema resumen 34
Contenido: Subconjuntos. Algunos subconjuntos importantes de N 35
Problemas para autoevaluación 38

Módulo 4

Objetivos específicos 39
Esquema resumen 39
Contenido: Operaciones con conjuntos. Complemento. Gráfica de un conjunto y de las operaciones con conjuntos. Unión de conjuntos. Intersección de conjuntos. Conjunto complemento 40

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Problemas para autoevaluación 44
Paneles de verificación 46

UNIDAD II
ELEMENTOS DE LOGICA MATEMATICA

Introducción 55
Objetivos generales 56
Diagrama temático estructural 57
Glosario 58

Módulo 5
Objetivos específicos 59
Esquema resumen 59
Contenido: Inducción y deducción. Proposiciones simples y abiertas. Gráfica de proposiciones 60
Problemas para autoevaluación 63

Módulo 6
Objetivos específicos 64
Esquema resumen 64
Contenido: Proposiciones compuestas. Conjunción. Disyunción 65
Problemas para autoevaluación 69

Módulo 7
Objetivos específicos 70
Esquema resumen 70
Contenido: Negación. Negación de proposiciones compuestas. Cuantificadores 71
Problemas para autoevaluación 78

Módulo 8
Objetivos específicos 79
Esquema resumen 79
Contenido: Implicación. Equivalencia lógica. Variantes de la implicación. Silogismos. Demostraciones 81
Problemas para autoevaluación 91
Paneles de verificación 94

UNIDAD III
LOS NUMEROS REALES

Introducción 107
Objetivos generales 108
Diagrama temático estructural 109
Glosario 110

Módulo 9
Objetivos específicos 112
Esquema resumen 112
Contenido: Sistema matemático y operaciones binarias. El conjunto de los números reales. Propiedades de la igualdad 113
Problemas para autoevaluación 117

Módulo 10
Objetivos específicos 118
Esquema resumen 118
Contenido: Postulados de campo. Algunos teoremas importantes 119
Problemas para autoevaluación 129

Módulo 11
Objetivos específicos 133
Esquema resumen 133
Contenido: Algunos teoremas importantes sobre los inversos. La resta 134
Problemas para autoevaluación 137

Módulo 12
Objetivos específicos 139
Esquema resumen 139
Contenido: La división. Teorema sobre fracciones 142
Problemas para autoevaluación 143
Paneles de verificación 145

UNIDAD IV
APLICACIONES

Introducción 161
Objetivos generales 162
Diagrama temático estructural 163
Glosario 164

Módulo 13
Objetivos específicos 165
Esquema resumen 165
Contenido: Terminología. Suma y resta de expresiones algebraicas 166
Problemas para autoevaluación 170

Módulo 14
Objetivos específicos 171
Esquema resumen 171

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Contenido: Multiplicación de expresiones algebraicas. Exponentes. División de expresiones algebraicas. Polinomios 172
Problemas para autoevaluación 180

Módulo 15

Objetivos específicos 182
Esquema resumen 182
Contenido: Productos notables. Factorización 183
Problemas para autoevaluación 189

Módulo 16

Objetivos específicos 190
Esquema resumen 190
Contenido: Simplificación de fracciones. Suma de fracciones. Multiplicación y división de fracciones. Simplificación de fracciones complejas 191
Problemas para autoevaluación 199
Paneles de verificación 203

Prólogo

La matemática, junto con las demás materias de la preparatoria, tiene como objetivo general la formación integral del educando como persona, dándole las bases intelectuales para conformar su criterio de modo que éste le permita desenvolverse en el medio técnico y social que le rodea, de acuerdo con su capacidad y personalidad.

El objetivo particular de los cursos de matemática, que con este libro se inician, es el de desarrollar la habilidad en el uso diario y constante del razonamiento lógico deductivo, además de introducirlo al lenguaje simbólico que utilizan las ciencias y proveerlo de los conocimientos fundamentales de todo sistema matemático, así como de las técnicas para manipular sus elementos.

Este primer libro se propone como objetivo general: **1o.** que el estudiante logre hacer sus propias demostraciones, dándole el lenguaje simbólico y las reglas del razonamiento deductivo en las dos primeras unidades; **2o.** familiarizar al estudiante con la teoría de campo elemental que le permita manipular los números reales y familiarizarlo, también, con la terminología de la matemática en su enfoque moderno; y **3o.** darle la técnica para que logre la destreza y habilidad necesarias en la operación con los elementos algebraicos.

Es conveniente hacer notar que el enfoque moderno de la matemática consiste básicamente en procurar que el alumno asimile **ideas** que luego debe aplicar con técnica desarrollando allí sus habilidades, a diferencia del método tradicional basado en la memorización de fórmulas o reglas, las que al olvidarse hacían nulas todas las habilidades desarrolladas a partir de su aplicación.

Aprovecho este prólogo para hacer patente mi agradecimiento a quienes con sus críticas cooperaron a mejorar en algo esta edición, muy especialmente al Lic. Gustavo Mendoza por su dedicación y atinados comentarios.

Mario Villegas Urquidi

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Instrucciones para el alumno

El presente texto ha sido elaborado tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan a los alumnos de Sistemas Abiertos de Enseñanza.

El texto ha sido estructurado de tal forma que le facilite al máximo su estudio. Cuenta con varias unidades, cada una de las cuales contiene:

1) **Objetivos generales:** que le informan acerca de lo que se pretende lograr con el estudio de dicha unidad.
2) **Una introducción:** independientemente de la que aparece dedicada al texto.
3) **Un glosario:** que le indica el significado de los términos técnicos empleados en el desarrollo de la unidad.
4) **Notación:** en los textos referentes a las ciencias naturales y formales, tales como la Matemática, se encontrarán explicaciones relacionadas con la simbología empleada (fórmulas, tablas, símbolos, etc.).

Para el estudio del curso la unidad se ha dividido en partes llamadas módulos. Cada texto consta siempre de 16 módulos. De esta manera, estimamos que es posible aprobar las asignaturas del plan de estudios de un semestre, en las 18 semanas. El módulo de cada asignatura está programado para que lo estudie en un tiempo promedio de 3 a 4.30 horas por semana. Sin embargo, se le recomienda que dedique a cada módulo, el tiempo que usted considere necesario, de acuerdo con sus posibilidades.

El módulo cuenta con:

1) **Objetivos específicos:** que desglosan el objetivo general de la unidad.
2) **Esquema-resumen:** donde se le presenta el contenido de cada módulo, en forma sinóptica.
3) **Contenido:** se refiere al desarrollo del tema o de los temas.
4) **Actividades complementarias:** le servirán de refuerzo en el aprendizaje de una unidad o un módulo específico.
5) **Problemas para autoevaluación:** al final de cada módulo se le dan una serie de preguntas de autocomprobación, para que pueda verificar por sí mismo, en qué grado ha logrado los objetivos (propuestos al principio del módulo). Las respuestas correctas las encontrará al final de cada unidad o, en otros casos, al final del libro.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

En la parte final del libro, podrá encontrar, cuando se estime necesario, apéndices que le ayudarán a la ampliación y profundización de algún tema.

Además, se le da en las unidades o al final del texto, una bibliografía con la que puede complementar sus estudios o ampliar su horizonte cultural, de acuerdo con sus inquietudes.

ADVERTENCIA:

Le recomendamos la lectura cuidadosa y la comprensión de los objetivos específicos al empezar cada módulo, para que tenga presente lo que se espera de usted, con el trabajo que relice con cada uno de ellos.

Notación

Un factor importante para la comprensión de cualquier texto de matemática es la correcta interpretación de los símbolos, pues en textos de autores diferentes es posible que a un mismo símbolo se le den significados distintos; por tal razón se ofrece esta lista de los símbolos empleados en este curso y su interpretación. Ellos son presentados en el orden de aparición en el libro.

SIMBOLO	SIGNIFICADO
$\in$	Es un elemento de . . .
$\notin$	No es un elemento de . . .
$\{\ \}$	Conjunto
$=$	Es igual a
$\mid$	Tal que
$+$	Símbolo de la operación suma
$n(a)$	Cardinalidad del conjunto A
$\ldots$	Y así sucesivamente
μ	Conjunto universal
ϕ	Conjunto vacío
N	Conjunto de los números naturales
$\cdot$	Símbolo de la operación multiplicación
$\neq$	No es igual a
$\subset$	Subconjunto de . . .
$\not\subset$	No es subconjunto de . . .
$\subsetneq$	Subconjunto propio de
$>$	Es mayor que
$<$	Es menor que
$\leq$	Es menor o igual que
$\geq$	Es mayor o igual que
$\cup$	Unión con
$\cap$	Intersección con
$'$	Complemento de
$\not\subsetneq$	No es subconjunto propio de
$\Rightarrow$	Símbolo de implicación
$-$	Símbolo de la operación diferencia o resta
$\not>$	No es mayor que
$\not<$	No es menor que
$\div$	Símbolo para expresar la operación división: (también se usa el símbolo $-$ como en $\frac{a}{b}$)
$\Leftrightarrow$	Doble implicación o equivalencia
$\sim$	No, es falso que
$\triangle$	Triángulo
$\measuredangle$	Angulo

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

–	R	Conjunto de los números reales
	E	Conjunto de los números enteros
	D	Conjunto de los racionales
	D'	Conjunto de los irracionales
	π	3.14159 . . .
	$\sqrt{}$	Símbolo de la operación raíz cuadrada
	%	Tanto por ciento

UNIDAD I

CONJUNTOS

Preparatoria abierta Online | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

"Medir y contar fueron las primeras actividades matemáticas del hombre primitivo y ambas nos conducen a los números". Haciendo marcas en los troncos de los árboles lograban los primeros pueblos la medición del tiempo y el conteo de los bienes que poseían; así surgió la aritmética. Después de muchos siglos el hombre alcanzó un concepto más abstracto de los números y de las relaciones entre ellos, y fue hacia fines del siglo XIX cuando Georg Cantor creó la Teoría de Conjuntos, pero no fue sino hasta casi los años veinte del presente siglo cuando se desarrolló como fundamento para el enfoque moderno de la matemática, por Gottob Frege, siendo Bertrand Russell quien completó, desarrolló y dio amplia publicidad a las aplicaciones de esta teoría.

La idea de conjunto o como también se le llama "clase" o "agregado", es en sí, intuitiva y muy antigua. En esta unidad conoceremos los principios generales de la teoría de conjuntos y es muy importante su comprensión pues nos sirve como base para unificar y dar cohesión al estudio de las unidades posteriores, proporcionando un medio intuitivo y gráfico para la introducción de conceptos abstractos y un "lenguaje" para el estudio de la Unidad II. No se espera la memorización de las ideas principales de la teoría sino más bien la comprensión y aprecio de su importancia a medida que las vayan aplicando.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al término de esta unidad el alumno:

1. Aplicará el lenguaje simbólico que se requiere en el trabajo y estudio de conjuntos.
2. Representará gráficamente conjuntos, mediante diagramas de Venn.
3. Efectuará operaciones con los conjuntos usando las representaciones enumerativa y descriptiva.
4. Graficará, mediante diagramas de Venn, operaciones combinadas de conjuntos.

Diagrama temático estructural

Números naturales
4 operaciones aritméticas.

- Conjuntos.
- Variable.
- Notación para construir conjuntos.
- Conjunto de verdad.
- Cardinalidad.
- Conjuntos finitos e infinitos.
- Igualdad y equivalencia de conjuntos.
- Subconjuntos.
- Números primos. Múltiplos de un número. Divisibilidad.
- Operaciones con conjuntos. Conjuntos complementos.
- Diagramas de conjuntos.
- Diagramas de las operaciones con conjuntos.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Conjunto. Colección o agregado de ideas u objetos de cualquier especie siempre y cuando estas ideas u objetos estén tan claros y definidos como para decidir si pertenecen o no al conjunto.

Elemento. Las ideas u objetos que forman un conjunto se denominan elementos del conjunto.

Oración abierta. Es toda oración en la que interviene alguna variable.

Conjunto de reemplazamiento. Conjunto que nos proporciona los elementos para reemplazar a la variable en una oración abierta.

Conjunto de verdad. Los elementos del conjunto de reemplazamiento que hacen que la oración sea verdadera forman un conjunto que llamamos conjunto de verdad.

Variable. Una variable es una letra usada para representar a cualquier elemento de un conjunto.

Cardinalidad. El número de elementos contenidos en un conjunto determina la cardinalidad del conjunto.

Conjunto finito. Es aquel en que es posible determinar el número de elementos que a él pertenecen, no obstante la dificultad que pueda presentarse.

Conjunto infinito. Es aquel en que no es posible terminar de enumerar a sus elementos.

Naturales. Conjunto de los números enteros que nos sirven para contar $(N = 1, 2, 3 \ldots)$

Conjunto universal. Conjunto formado por la totalidad de los elementos considerados para una determinada operación. Es equivalente al conjunto de reemplazamiento.

Conjunto vacío. Conjunto que no tiene elementos, también se le llama conjunto nulo.

Conjuntos equivalentes. Son aquellos que poseen la misma cardinalidad, aunque sus elementos sean diferentes.

Conjuntos iguales. Dos conjuntos son iguales, si son equivalentes y, además, los elementos de uno son también los elementos del otro.

Subconjunto. Dados dos conjuntos A y B en que todos los elementos de A pertenecen al conjunto B, entonces decimos que el conjunto A es subconjunto de B.

Subconjunto propio. Dados dos conjuntos A y B, decimos que A es subconjunto propio de B, si A es subconjunto de B y existe a lo menos un elemento de B que no pertenece al conjunto A.

Número primo. Todo número natural que admite sólo dos divisores (la unidad y él mismo), se denomina natural primo.

Múltiplo de un número. Si $K \in N$ entonces, el conjunto de los múltiplos de K será: $M = \{K, 2K, 3K, 4K, 5K, \ldots\}$ Cada elemento del conjunto M es un múltiplo de K.

Número compuesto. Es aquel natural que admite por lo menos dos divisores primos. Puede ser uno solo repetido; (EJ: $4 = 2.2$).

Correspondencia biunívoca entre dos conjuntos. Si los elementos de dos conjuntos equivalentes pueden aparearse tal que a cada elemento de cada conjunto se le haga corresponder uno y sólo un elemento del otro conjunto, entonces diremos que existe una correspondencia biunívoca (o uno a uno) entre los elementos de esos conjuntos.

Unión entre conjuntos. Sean A y B dos conjuntos, entonces:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Intersección. Sean A y B dos conjuntos, entonces:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Conjunto complemento. Sea U el conjunto universal y S un subconjunto cualquiera de U. El conjunto de los elementos que faltan a S para completar U, es el "complemento de S", (S').

Diagrama de Venn. Son figuras cerradas en el plano que nos sirven para esquematizar operaciones entre conjuntos. Se considera que cada figura encierra a los elementos del conjunto al cual representa.

Conjuntos disjuntos. A dos conjuntos A y B se les denomina "disjuntos" si no tienen elemento en común, es decir:

$$A \cap B = \phi.$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 1

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar el estudio de este módulo Ud:

1. Explicará con sus propias palabras, la idea de conjuntos.
2. Determinará si un elemento pertenece o no a un conjunto dado.
3. Discriminará entre una lista de "conjuntos" dados a aquellos que estén bien determinados o definidos.
4. Construirá conjuntos usando la forma enumerativa o descriptiva en su notación.

ESQUEMA RESUMEN

Conjunto

- Noción intuitiva.
- Definición.
- Oraciones abiertas.
- Conjunto de reemplazamiento.
- Conjunto de verdad.

Notación.

Conjuntos

Desde sus orígenes la sociedad humana ha tenido la idea de agrupaciones o conjuntos: la familia, los clanes, las tribus fueron los primeros conjuntos humanos, y sus bienes, sus armas, fueron conjuntos de satisfactores de sus necesidades.

Todos estamos acostumbrados a tratar con conjuntos; así, escribimos usando **un conjunto** de letras llamado abecedario, efectuamos operaciones de conteo y medición usando un **conjunto** de números, participamos socialmente en **conjuntos** llamados clubes, etc., sin embargo, el significado del término **conjunto** no es fácil de explicar o entender pues generalmente en el intento usamos términos que a su vez han de ser definidos. El cuento de nunca acabar.

> Para nuestros fines podemos considerar un conjunto como la colección o agregado de ideas u objetos de cualquier especie, siempre y cuando estas ideas u objetos estén tan claros y definidos como para decidir si pertenecen o no al conjunto.

Las ideas u objetos que forman un conjunto se denominan **elementos** del conjunto.

Ejemplos de Conjuntos:

a) Los Estados de la República Mexicana.
b) Los días de la semana.
c) Los alumnos de la preparatoria abierta.
d) Los artículos de la Constitución Mexicana.
e) Los autores de este libro.
f) Las vocales del alfabeto.

Notación

Generalmente usamos las letras mayúsculas para denotar conjuntos y las minúsculas para sus elementos. En el ejemplo b) podemos llamar A al conjunto días de la semana y **x** al día lunes.

Para simbolizar que un objeto es elemento de un conjunto escribimos $x \in A$ que se lee "**x** es elemento del conjunto A" o por el contrario $m \notin A$ que se lee."**m** no es elemento del conjunto A".

Otra forma utilizada para denotar un conjunto es la de escribir los nombres de los elementos que lo forman entre un par de llaves o corchetes, por ejemplo el mismo inciso b).

{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

forma conocida con el nombre de **enumerativa**, o de **extensión**, aunque este último nombre no parece muy significativo.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

También se usa en algunas ocasiones otra forma, que para algunos conjuntos es la única posible, se llama por **descripción** o también por **comprensión**; en esta forma se encierra entre las llaves o corchetes la condición para pertenecer al conjunto o la descripción de los elementos que lo forman, en el primer caso un ejemplo es: {personas mayores de 18 años} el ejemplo b) quedaría, {días de la semana}.

Observe que las llaves y corchetes simbolizan un conjunto y lo que encerramos con ellas son sus elementos o una descripción de ellos.

Oraciones abiertas, variables, conjuntos de reemplazamiento y conjuntos de verdad.

Otra notación para los conjuntos es una variación de la forma llamada por **descripción** y que llamaremos la **notación para construir conjuntos,** ésta nos permitirá más adelante abreviar la representación de los conjuntos o enumerar los elementos que los forman (razón del nombre que le hemos dado).

Ejemplo:

El conjunto de las estaciones del año.

Lo podemos representar por la letra mayúscula E, pero esto sirve de muy poco cuando se trate de identificar los elementos de E por lo que usamos la siguiente notación:

$$E = \{x \mid x \text{ sea una de las estaciones del año}\}$$

Lo anterior se lee "E es igual al conjunto formado por elementos x, tal que **x** sea una de las estaciones del año". La línea vertical se lee "tal que".

La letra **x** se ha utilizado para determinar cualquier elemento que satisfaga la condición dada, es decir, representa a cualquiera de los nombres **primavera, verano, otoño, invierno,** por consiguiente podrá variar en este caso cuatro veces. Por lo anterior a la letra **x** empleada en este ejemplo se le llama **variable.**

La condición "**x** sea una de las estaciones del año", en que interviene la variable la llamamos una **oración abierta** en virtud de que es una oración que tanto puede ser falsa como verdadera, dependiendo del nombre con que se reemplace a la variable **x.**

> Una **oración abierta** es, pues, toda oración en la que interviene alguna **variable** y al conjunto que nos proporciona los elementos para reemplazar a la variable lo llamamos el **conjunto de reemplazamiento.**

Ejemplo:

Sea E = {**x** | **x** es una de las estaciones del año} y el conjunto de reemplazamiento para **x** el conjunto M:

M = {Primavera, verano, otoño, invierno, lunes, abril, frío}

entonces sólo elementos de M se pueden usar para reemplazar a la variable **x** de la oración abierta.

x es una de las estaciones del año
Primavera es una de las estaciones del año
Verano es una de las estaciones del año
Otoño es una de las estaciones del año
Invierno es una de las estaciones del año
Lunes es una de las estaciones del año
Abril es una de las estaciones del año
Frío es una de las estaciones del año

Observamos que algunos elementos de M al reemplazar a la variable **x** forman una oración verdadera y otros una oración falsa.

> Los elementos del conjunto de reemplazamiento que hacen que la oración sea verdadera, forman un conjunto que llamamos el **conjunto de verdad.**

Notación para construir conjuntos: E = {x ∈ M | x es una estación del año}
Conjunto de reemplazamiento M = {primavera, verano, otoño, invierno, lunes, abril, frío}
Conjunto de verdad E = {primavera, verano, otoño, invierno}

Es conveniente observar que al considerar una oración abierta debemos conocer previamente el conjunto de reemplazamiento para poder determinar el conjunto de verdad.

Ejemplo:

$$P = \{x \in A \mid x \text{ sea un número}\}$$

para determinar el conjunto de verdad P es necesario conocer los elementos que forman el conjunto de reemplazamiento A, así, si A = {botón, 3, papel, 2} entonces P = {3, 2}

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION I-1

1. Completar los espacios siguientes con la palabra adecuada.
   a) A un conjunto de jugadores de beisbol se le llama_____
   b) A un conjunto formado por tres guitarristas se le llama_____
   c) A un conjunto de monedas antiguas se le llama_____
   d) Un grupo de alumnos que termina una carrera profesional se denomina_____
   e) Una sala que reúne una gran variedad de libros forma una_____
   f) La reunión de soldados de un país forman un_____
2. Marque en la casilla correspondiente su respuesta

   F = {Clavel, rosa, perfume, violeta, gardenia}

	Sí	No
a) ¿Es "margarita" un elemento de F?	☐	☐
b) ¿Pertenece "clavel" al conjunto F?	☐	☐
c) ¿Es "perfume" un elemento de F?	☐	☐
d) ¿Es "hermosa" un elemento de F?	☐	☐
e) ¿Está bien definido el conjunto F?	☐	☐

3. Explique por qué considera que el conjunto F está bien definido.
4. Sea J = {x | x sea una flor}

	Sí	No
a) ¿Es a ∈ J?	☐	☐
b) ¿Es "aroma" elemento de J?	☐	☐
c) ¿Es "gardenia" elemento de J?	☐	☐
d) ¿Es "margarita" ∈J?	☐	☐
e) ¿Está bien definido el conjunto?	☐	☐

5. Sea **R** el conjunto de los meses del año que tienen la letra "r" en su nombre. Marque la casilla que indique la respuesta correcta.

	Sí	No
a) Mayo ∈ R	☐	☐
b) Abril ∈ R	☐	☐
c) Diciembre ∈ R	☐	☐
d) Agosto ∈ R	☐	☐
e) Febrero ∈ R	☐	☐

6. Sea M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} el conjunto de reemplazamiento. Determine el conjunto de verdad que corresponda a cada conjunto que se da en la notación para construir conjuntos o descripción. Use la forma enumerativa.
   a) S = {x ∈ M | x es menor que 5}
   b) L = {x ∈ M | x + 1 es igual a 5}
   c) T = {x ∈ M | x + es mayor que 4}
   d) U = {x ∈ M | x es diferente de 2}
7. En los siguientes problemas se dan conjuntos usando la forma **enumerativa**, cámbielos a la forma descriptiva usando sus palabras para la condición.
   a) A = {Tamaulipas, Veracruz, Tabasco, Campeche, Yucatán, Quintana Roo}
   b) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Módulo 2

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Encontrará la cardinalidad de un conjunto finito.
2. Reconocerá conjuntos finitos e infinitos de una lista de conjuntos dados.
3. Dará ejemplos que muestren al conjunto universo.
4. Dará ejemplos que muestren al conjunto vacío.
5. Dados dos conjuntos, mediante el uso de la correspondencia biunívoca establecerá la relación >, = o < para las cardinalidades de esos conjuntos.
6. Expresará simbólicamente la igualdad de conjuntos.
7. Distinguirá entre igualdad y equivalencia entre conjuntos.

ESQUEMA RESUMEN

Cardinalidad

- Correspondencia biunívoca
- Conjuntos equivalentes
- Conjuntos iguales
- Conjuntos finitos
- Conjuntos infinitos

Conjunto universal

Conjunto vacío

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Cardinalidad

El número de elementos contenidos en un conjunto determina la **cardinalidad** del conjunto.

En el caso del conjunto

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

su cardinalidad será 5 y la expresamos $n(V) = 5$ que se lee cardinalidad de V igual a 5.

En el conjunto P: $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
la cardinalidad será 6 y la expresamos como $n(P) = 6$.

Conjuntos finitos e infinitos

En los ejemplos anteriores hemos podido determinar con precisión el número de los elementos que los integran, pero en otros casos no será fácil esto; sin embargo, cuando, no obstante la dificultad que se presente, sea posible determinar el número de elementos de un conjunto, diremos que se trata de un conjunto **finito.**
Por ejemplo:

Los conjuntos formados por los astros que forman el sistema solar; el número de ediciones que se han hecho de "El Quijote de la Mancha", son conjuntos que, como los primeros que hemos mencionado, son finitos, ya que están formados por un número preciso de elementos, aun cuando no sea fácil determinar su número. Si no cumple con esta condición decimos que el conjunto es **infinito.**

Por ejemplo: Los **números naturales** que son aquellos números enteros que nos sirven para contar, y formar un conjunto, el número de elementos de este conjunto es infinito, ya que no es posible terminar de enumerarlos, puesto que siempre podremos añadir uno más al que consideramos como último elemento.

Otros conjuntos como el de los puntos contenidos en una recta, el de las fracciones en que puede dividirse la unidad, tienen un número de elementos que tampoco es posible terminar de enumerar, por eso se denominan conjuntos **infinitos.**

Estos conjuntos generalmente se mencionan usando las oraciones abiertas, y para presentarlos en forma enumerativa escribimos únicamente algunos de sus primeros elementos y a continuación tres puntos suspensivos que debemos entender como la sucesión de elementos que cumplen el modelo de los primeros. Así, si tenemos $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
se nos está expresando el conjunto de números naturales impares, que es un conjunto infinito: {Números naturales impares}

$$\text{Si se da: } B = \{5, 10, 15, \ldots\}$$

se ha querido expresar una serie ordenada de números que van aumentando de cinco en cinco a partir del cinco, y la cual es también un conjunto infinito. Convenimos, pues, que los puntos suspensivos después de algunos elementos en un conjunto, representan la continuación con un mismo patrón hasta el infinito.

Conjunto universal

La totalidad de los elementos considerados para determinada operación se denomina **conjunto universal.**

Así, el conjunto de los números enteros formará el conjunto universal para las operaciones que tengan lugar con ellos; el conjunto de los libros de una biblioteca será el conjunto universal para las agrupaciones que se hagan de los mismos; la población mundial será el conjunto universal para cualquier relación humana que se produzca. Por su definición, entonces, **el conjunto universal equivale al conjunto de reemplazamiento,** es decir, significan lo mismo. Su símbolo es U.

Conjuntos vacíos

De gran utilidad en las operaciones con conjuntos es el concepto del conjunto que no tiene elementos.

Los conjuntos para los cuales ningún elemento satisface la condición dada, se conocen como conjuntos **nulos** o **vacíos** y se representan por ϕ o bien por {}. Por ejemplo, el conjunto de mexicanos que han ido a la Luna, el de las ciudades mexicanas con una población superior a los diez millones de habitantes, el de los meses del año cuyo nombre comienza con B, son conjuntos **vacíos. La cardinalidad de ϕ es 0,** por consiguiente $n(\phi) = 0$. Es importante hacer notar que los términos **conjunto vacío** y número **cero** son dos cosas totalmente diferentes y que se considera que el conjunto vacío es finito.

Conjuntos equivalentes

Si dos conjuntos poseen la misma cardinalidad, se dice que son conjuntos **equivalentes,** ya que tienen el mismo número de elementos, y puede establecerse entre ambos una **correspondencia de uno a uno, o biunívoca.** Son conjuntos **equivalentes** el conjunto de sillas de una clase y el del número de alumnos, si todas las sillas están ocupadas y no hay alumnos de pie.

Así los conjuntos $C = \{\text{verde, blanco, rojo}\}$ y
$F = \{5, 4, 3,\}$

son equivalentes, ya que se puede establecer la correspondencia biunívoca

$$\begin{array}{c} \{\text{verde, blanco, rojo}\} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \{\ 5, \quad 4, \quad 3\ \} \end{array}$$

Conjuntos iguales

Se dice que los conjuntos A y B son **iguales** cuando cada elemento de A es a la vez elemento de B y cada elemento de B es también elemento de

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

A. En otras palabras A y B son dos representaciones distintas del **mismo** conjunto. Se simboliza $A = B$ que se lee "A es igual a B".

Ejemplo:

A representa al conjunto formado por las letras a, o, e, u, i.
B representa al conjunto de vocales del alfabeto

$$A = \{a, e, i, o, u\} \text{ o también } \{a, o, e, u, i\} = B$$
es decir $A = B$ ó $\{a, o, e, u, i\} = \{a, e, i, o, u\}$

Observe que el orden en que se enumeran o enlistan los elementos no tiene importancia para comparar los conjuntos.

> Es muy importante que se entienda la diferencia entre **conjuntos iguales** y **conjuntos equivalentes;** dos conjuntos son **equivalentes** cuando tienen la misma cardinalidad aunque sus elementos sean diferentes, mientras que dos conjuntos **iguales** siempre son también **equivalentes,** pues teniendo los mismos elementos tendrán la misma cardinalidad.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION I-2

1. Si llamamos N al conjunto de números naturales

   a) ¿Es N un conjunto infinito? ¿Por qué?
   b) Si $P = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ es menor que } 9\}$ ¿Es P un conjunto finito? ¿Por qué?
   c) La cardinalidad de P será $n(P) =$

2. Para cada conjunto que se nombra marque el cuadro correspondiente según sea **finito** o **infinito.**

		Finito	Infinito
a)	Los puntos de una recta	☐	☐
b)	Los islas de todo el mundo	☐	☐
c)	Los pelos de un gato	☐	☐
d)	El conjunto de los números enteros impares mayores de 5	☐	☐
e)	El conjunto de los números enteros	☐	☐

3. Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ Exprese en forma **enumerativa** los elementos de los conjuntos que se proponen a continuación.

   a) Sea $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ menor que } 1\} =$
   b) $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \cdot x = 64\} =$
   c) $T = \{x \in \mathbf{R} \mid x + 7 = 25\} =$
   d) $V = \{x \in \mathbf{R} \mid x + 3 = 7\} =$

4. Señale en la casilla correspondiente si el conjunto propuesto es o no **vacío.**

		Vacío	No Vacío
a)	El conjunto de los números impares que terminan en 2	☐	☐
b)	El conjunto de los números pares	☐	☐
c)	$\{x \in \mathbf{N} \mid 7 \cdot x = 12\}$	☐	☐
d)	$\{a, e, i, o, u\}$	☐	☐
e)	El conjunto de números pares comprendidos en $\{1, 2, 3, 5, 7\}$	☐	☐
f)	$\{0\}$	☐	☐
g)	El conjunto ϕ	☐	☐

5. Mencione la **cardinalidad** de los siguientes conjuntos completando los espacios

   a) $A = \{2, 3, 6, 5\}$ $n(A) =$
   b) $B = \{11, 12\}$ $n(B) =$
   c) $C = \{0\}$ $n(C) =$
   d) $D = \{\phi\}$ $n(D) =$
   e) $E = \{\ \}$ $n(E) =$

6. Considerando que $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ y $C = \{3, 1, 2\}$ Complete la oración llenando el espacio en blanco con el símbolo correcto, escogiendo entre $=$, $\neq$ (igual, diferente).

   a) A ___ B
   b) B ___ C
   c) $\{2, 5, 3\}$ ___ A
   d) B ___ $\{5, 2, 3\}$
   e) C ___ A

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir este módulo, el alumno:

1. Aplicará la simbología de inclusión o contención a conjuntos.
2. Construirá subconjuntos propios de un conjunto dado.
3. Identificará al conjunto de los números naturales.
4. Definirá número primo.
5. Definirá múltiplo de un número.
6. Reconocerá a los números primos de un conjunto dado.
7. Construirá el conjunto de los múltiplos de un natural arbitrario k.
8. Descompondrá un número compuesto en sus factores primos; es decir, realizará una factorización completa.

ESQUEMA RESUMEN

Subconjuntos importantes de N

múltiplo de un número
divisibilidad entre un número
conjunto de los múltiplos de K; con $k \in N$
número natural primo
conjunto de los números primos

Al conjunto **R** que está formado por elementos que también pertenecen al conjunto **P** se le llama un **subconjunto** de **P**.

Consideremos el conjunto **P** como un patio de estacionamiento de automóviles en el que se encuentran coches de diversos modelos, marcas y colores, y como conjunto **R** todos los coches rojos estacionados en ese patio. Podremos decir que **R** es un **subconjunto de P**.

El símbolo $\subseteq$ se lee "es subconjunto de..." y $\nsubseteq$ "no es subconjunto de...".

Entonces $R \subseteq P$.

Otros subconjuntos de **P** podrían ser **W**, si **W** es el conjunto de Volkswagen estacionados en el patio; o **S**, si **S** es el conjunto de coches modelo setenta estacionados ahí mismo.

Así podremos escribir $W \subseteq P$ y $S \subseteq P$.

Cuando decimos que un conjunto es subconjunto de otro, estamos dando la idea de **pertenencia** o también la de **partición**, por ejemplo:
$A \subseteq B$ significa **A** es subconjunto de **B** o también **A** pertenece a **B**; **A** está incluido en **B**.

Esta idea es muy útil pues nos conduce a la conclusión de que si un elemento pertenece al conjunto **A debe**, por esa razón, pertenecer también al conjunto **B**. Puede también considerarse que todo conjunto es un subconjunto de sí mismo, e igualmente el conjunto vacío será un subconjunto de cualquier otro conjunto $A \subseteq A$, $\phi \subseteq A$.

Ejemplifiquemos con algunos conjuntos que nos son familiares. Sea $V =$ {vocales del alfabeto} y $A =$ {todas las letras del alfabeto}
podemos decir que: $V \subseteq A$
es decir, cualquiera vocal es elemento del alfabeto, pero: $A \nsubseteq V$ porque en el alfabeto hay letras que no son vocales y por tanto no son elementos de **V**.

Con lo anterior podemos precisar una idea más adecuada de **pertenencia** o **partición.**

Siendo $V \subseteq A$ pero A **tiene además elementos que no pertenecen** a V, se dice que V es un **subconjunto propio** de A. No sólo V está incluido en A sino que es sólo una parte de él, **nunca** tiene la misma cardinalidad.

Ejemplo: Sea $M =$ {a, b, c, d}
{b, c, d, a} $\subseteq$ M pero no es subconjunto propio

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$\{a\} \subseteq M$ pero como M tiene además otros elementos, entonces $\{a\}$ es **subconjunto propio** de M, esto lo representamos así $\subset$. $\{a\} \subset M$.

Escribe todos los **subconjuntos propios** que tenga M (deben ser 15).

La idea de **subconjunto propio** nos sirve también para establecer entre los conjuntos las ideas de **"mayor que"** y **"menor que"** pues si el conjunto V es subconjunto propio de A ($V \subset A$) entonces V está contenido en A, y A tiene por lo menos un elemento más y podemos decir con seguridad que el conjunto A es **mayor que** el conjunto V lo cual simbolizamos $A > V$ o también que el conjunto V es **menor que** el conjunto A ($V < A$).

Dijimos también que la cardinalidad nunca es la misma entre dos conjuntos relacionados por la idea de subconjunto propio, con lo que podemos también aceptar que $n(A) > n(V)$ ó $n(V) < n(A)$. Siendo las cardinalidades números naturales estamos estableciendo el sentido de la desigualdad entre los números naturales, ejemplo:

Sean $M = \{a, b, c, d\}$ y $L = \{a, b, c\}$ dos conjuntos; 4 y 3 respectivamente serían sus cardinalidades $L \subset M$ por lo tanto $n(L) < n(M)$ es decir

$$3 < 4$$

¿Cómo podríamos comparar dos conjuntos con elementos totalmente diferentes? No podemos decir que uno sea un subconjunto del otro.

Sean $K = \{r, s, t\}$ y $M = \{a, b, c, d\}$ los dos conjuntos.

En estos casos podemos emplear la **correspondencia biunívoca** entre los conjuntos

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad n(M) = 4 \\ M = \{a, b, c, d\} \\ \quad\quad\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \\ K = \{r, s, t\} \\ \quad\quad\quad n(K) = 3 \end{array}$$

de este modo nos damos cuenta de que aunque $K \not\subset M$ existe un elemento de M que no encuentra su correspondiente en K, $n(K) < n(M)$, en otras palabras, cuando al establecer la correspondencia biunívoca existe al menos un elemento de un conjunto que no tiene correspondiente entre los elementos de un segundo conjunto, el primer conjunto es más grande que el segundo, la cardinalidad del primero es **mayor que** la del segundo.

Algunos subconjuntos importantes de N

Hemos definido ya el conjunto de números naturales N como el conjunto de números enteros que nos sirven para contar. A partir de aquí usaremos la letra N, exclusivamente para designar a este conjunto.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Observemos ahora algunos subconjuntos importantes de N, sean: a) El conjunto de múltiplos de k, siendo $k \in N$. b) El conjunto de números primos y c) El conjunto de números compuestos.

a) Conjunto de múltiplos de k.

Si $k \in N$ entonces, $M = \{k, 2k, 3k, 4k, 5k, \ldots\}$ será el conjunto de los múltiplos de "k"

Ejemplo: El conjunto de múltiplos de 7 será: $\{7, 14, 21, 28, 35, \ldots\}$

Se dice que un número **es divisible** entre otro cuando su cociente es un número entero y el residuo es 0. Siempre que un número es múltiplo de otro, es divisible entre éste; así, 15 que es múltiplo de 3 y de 5, por lo tanto es divisible entre 3 y entre 5.

b) El conjunto de números primos.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$$

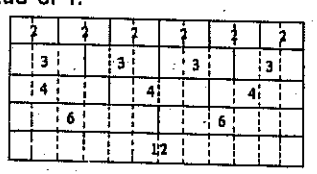
Estos elementos pueden definirse como aquellos números que no tienen más divisores que ellos mismos y la unidad.

Debemos observar que el número 1 no se define como número primo, para evitar tener que hacer excepciones en estudios matemáticos de más alto nivel.

c) El conjunto de números compuestos.

$$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \ldots\}$$

Este conjunto está formado por números que no son primos. Se exceptúa el 1.

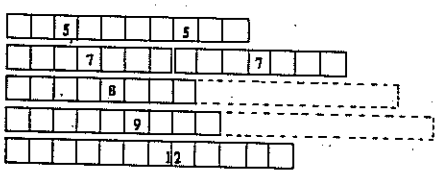


Los números compuestos son múltiplos de aquellos que son sus factores; así, 12 es un múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6, ya que estos números están contenidos exactamente en 12, como podemos observar en la figura.

También podemos decir que 2, 3, 4 y 6 son factores de 12.

Se dice que se factoriza un número, cuando se expresa como producto de sus factores. Una **factorización** se considera **completa** cuando sólo tenemos **factores primos,** en su factorización.

En cambio 5, 7, 8, 9 no son factores de 12 ya que ninguno de ellos está contenido un número exacto de veces en 12, como se ve en la figura.



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION I-3

1. Considerando el conjunto M = {a, b, c d} forme un conjunto con todos los **subconjuntos** de M que tengan:

   a) Cardinalidad 4 y llámelo T.
   b) Cardinalidad 3 y llámelo U.
   c) Cardinalidad 0 y llámelo S.
   d) Cardinalidad 1 y llámelo W.

2. Si A = {0, 2, 5, 7} decimos que 5 $\in$ A, o que {5} $\subset$ A; pero no se puede decir que 5 $\subset$ A porque 5 es un elemento. Aclarado lo anterior, diga cuáles de las siguientes oraciones son verdaderas y cuáles falsas:

   a) $\phi \in$ A
   b) 0 $\in$ A
   c) {0, 5} $\subset$ A
   d) 2 $\in$ A
   e) 7 $\notin$ A
   f) 7 $\subset$ A
   g) 0 $\in \phi$

3. Considere como A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5, 6} y C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Complete la oración llenando el espacio en blanco con el símbolo correcto escogiendo entre $\subset$ ó $\not\subset$

   a) B C
   b) {2, 3, 1} A
   c) A C
   d) ϕ B
   e) A B
   f) B B
   g) {3, 2, 1} A

4. a) ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto W del problema 1?
   b) ¿y la del conjunto S?
   c) Compare la cardinalidad de W con la de S. Use símbolo adecuado (>, <) en caso de desigualdad.
   d) Compare n(T) con n(S).
   e) Compare n(W) con n(U).

5. Establezca la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de modo que demuestre que la cardinalidad del conjunto días de la semana D, es mayor que la del conjunto de estaciones del año E.

6. Escriba si los números siguientes son primos o compuestos y si son compuestos escriba de qué número son múltiplos.

   a) 37 b) 21 c) 19 d) 72
   e) 27 f) 15 g) 51

7. Realice la factorización completa, es decir, descomponga en sus factores primos los siguientes números:

   a) 18 b) 21 c) 34 d) 100
   e) 36 f) 64 g) 75

Módulo 4

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Definirá con palabras y simbólicamente la unión entre dos conjuntos.
2. Encontrará el conjunto que resulta de la unión de dos conjuntos.
3. Representará gráficamente un conjunto considerado al conjunto universo.
4. Representará gráficamente (mediante diagramas de Venn) la unión entre conjuntos.
5. Definirá con palabras y simbólicamente la intersección de dos conjuntos.
6. Encontrará el conjunto que resulta de la intersección de dos conjuntos.
7. Representará gráficamente —mediante diagramas de Venn— la intersección de dos conjuntos cualesquiera.
8. Expresará —con palabras y en lenguaje simbólico— complemento de un conjunto arbitrario, dado su conjunto universo.
9. Encontrará el complemento de un conjunto arbitrario dado su conjunto universal.
10. Representará gráficamente el complemento de un conjunto dado.
11. Representará gráficamente la relación e inclusión y operaciones combinadas entre conjuntos.

ESQUEMA RESUMEN

Operaciones con conjuntos:

Unión de conjuntos.
Intersección de conjuntos.
Conjuntos disjuntos.
Representación gráfica de un conjunto y de las operaciones con conjuntos.

Conjunto complemento de un conjunto dado.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Operaciones con conjuntos

Si reunimos los elementos de un conjunto A con los elementos de otro conjunto B obtendremos un tercer conjunto y la operación efectuada la llamaremos **unión;** los elementos de este tercer conjunto pertenecerán al conjunto A, al conjunto B o bien, a ambos.

Ejemplo a):

Si A es un conjunto de canicas azules y B es un conjunto de canicas blancas y efectuamos la **unión** de A con B reuniendo estas canicas, habremos producido un tercer conjunto de canicas que serán azules o blancas. (Recuerda que no hay canicas que sean azules y blancas, es decir, de colores mezclados, de modo que los elementos del conjunto formado con la **unión** serán canicas, o azules o blancas).

La **unión** de dos conjuntos se señala con el símbolo "$\cup$" de manera que podremos definir: $A \cup B = \{x \in A$ ó $x \in B\}$ que leeremos: "**x** sea elemento de A o sea elemento de B".

Ejemplo b):

$$P = \{1, 2, 3, 4, \}$$
$$Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Como vemos, cualquiera de los elementos de la unión podría ser elemento de P, elemento de Q ó bien elemento de ambos, como el 3 y el 4.

Si en lugar de reunir los conjuntos A y B de nuestro primer ejemplo, buscamos ahora los elementos **comunes a ambos,** estaremos efectuando la **intersección** de los conjuntos.

Una **intersección** se señala con el símbolo "$\cap$", y se define como la operación entre dos conjuntos para obtener un tercero, cuyos elementos son los que **simultáneamente** pertenecen a los dos conjuntos dados.

En el caso de nuestras canicas azules y blancas, diremos que nuestra intersección es el conjunto vacío porque nuestros conjuntos no tienen elementos comunes. Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes se denominan conjuntos **disjuntos.** Su intersección es un conjunto vacío (ϕ).

En el caso del ejemplo **b**, la intersección la formará el conjunto {3, 4}, formado por elementos que pertenecen tanto a P como a Q.

Podemos entonces definir esa intersección como sigue:

$$P \cap Q = \{x \in P \text{ y } x \in Q\} = \{3, 4\}$$

Ejemplo c):

sea $V = \{a, e, i, o, u\}$
sea $M = \{a, b, c, d, e, f\}$
$V \cap M = \{a, e\}$

Complemento

Hemos dicho antes (pág. 31) que en las operaciones con conjuntos la totalidad de los elementos que participan forma un conjunto llamado **conjunto Universal o de reemplazamiento** (U) del cual todos los demás son subconjuntos.

Un conjunto muy útil en las operaciones con conjuntos es el **complemento** de un subconjunto S cualquiera.

Si consideramos $S \subseteq U$ el conjunto formado por los elementos que a S le faltan para completar U es el **complemento** de S y lo señalaremos como S', que se lee **"S prima"** o **"complemento de S".**

Otra manera de definir a S' sería decir que es el conjunto formado por los elementos de U que no están en S.

Ejemplo: Sea U = {todas las letras del alfabeto} y V = {vocales del alfabeto}, $V \subset U$.

$$V' = \{\text{consonantes del alfabeto}\}$$

porque son las letras del alfabeto que no están en V o también las letras que a V le faltan para completar el universo U.

Nótese que por definición cualquier conjunto y su complemento son **disjuntos** ($V \cap V' = \phi$) y que la unión da por resultado el universo ($V \cup V' = U$).

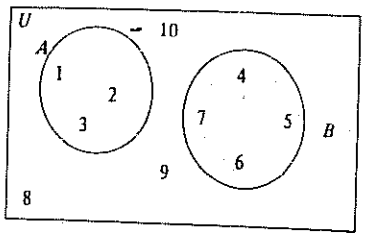
Gráfica de un conjunto y de las operaciones con conjuntos

Es muy útil ilustrar las relaciones entre conjuntos mediante diagramas o figuras cerradas que indican que los elementos comprendidos dentro de esas áreas pertenecen al conjunto.

A estos diagramas se les conoce como **Diagramas de Venn,** en honor del matemático inglés **John Venn** (1834-1883). Nosotros los emplearemos y también usaremos algunas variantes, aunque los llamaremos en general Diagramas de Venn.

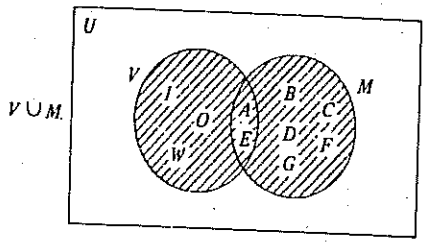
Ejemplo: El rectángulo nos indica el conjunto universal o de reemplazamiento, los círculos A y B muestran **conjuntos disjuntos** ya que no tienen elementos comunes. Los elementos 1, 2, 3 son elementos de A; 4, 5, 6, 7 son elementos de B y 8, 9, 10 no son de A ni de B, pero sí son del universo.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com



Unión de conjuntos

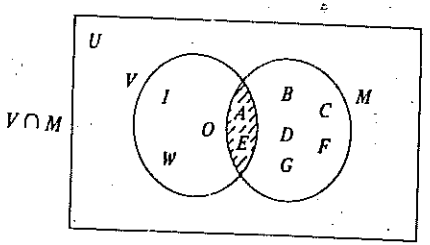
Los conjuntos V y M que se presentan en la siguiente figura están formados por: V = {I, O, W, A, E}
M = {A, E, B, D, G, C, F}
luego V ∪ M = {I, O, W, A, E, B, D, G, C, F} y en el diagrama se presenta V ∪ M, sombreando el área correspondiente.



Intersección de conjuntos

Con los mismos conjuntos V y M presentamos el siguiente diagrama que representa la intersección de los conjuntos V ∩ M.

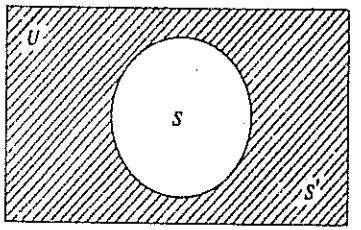
Su intersección será la zona superpuesta que encierra a los elementos que pertenecen a ambos simultáneamente y que aparece sombreada. V ∩ M = {A, E}.



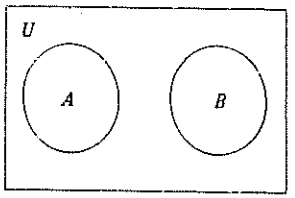
Conjunto complemento

El conjunto S está indicado por el círculo. S' será su complemento que, como hemos definido antes, será el conjunto de todos los elementos del

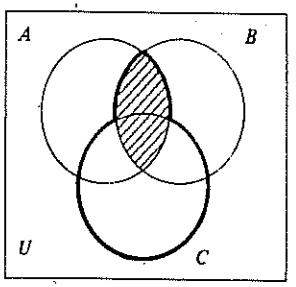
universo que no están comprendidos en S. La parte sombreada nos representa a S'. Los diagramas de Venn presentan una gran ventaja para representar los conjuntos de verdad, porque a través de ellos podemos "ver" los conjuntos de verdad, es por esta razón que los empleamos como "Lenguaje", pues como se aprecia en la figura siguiente no es necesario enumerar los elementos.



Ejemplos:



a) La figura en la izquierda nos habla de dos conjuntos A y B que claramente se ve que son disjuntos sin necesidad de saber qué elementos los forman.

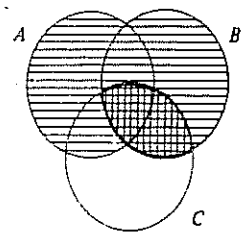


b) Ahora tenemos tres conjuntos A, B y C. La intersección entre A y B forma un conjunto que se representa sombreado y la unión de ese conjunto resultante con C se representa por el área encerrada con la línea gruesa.

Cuando se combinan más de dos conjuntos como en el ejemplo anterior, se hace necesario señalar el orden en que se efectuaron las operaciones y para ello se usan los símbolos llamados **paréntesis**, así del ejemplo b tendríamos

$$(A \cap B) \cup C$$

primero obtuvimos la intersección A con B y ese conjunto se unió con C.



c) $(A \cup B) \cap (B \cap C)$. 1o. se formó el conjunto de la unión de A con B y en la gráfica se sombreó horizontalmente; 2o. se formó el conjunto de la intersección de B con C, y se sombreó verticalmente y 3o. se busca la intersección entre dichos conjuntos resultando ser el área cuadriculada.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION I-4

1. Tome el conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ como el conjunto universal y si

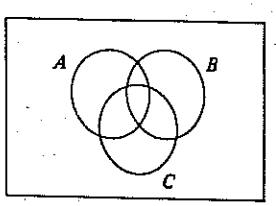
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad C = \{4, 5, 6, 7\}$
$B = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad D = \{7, 8, 9, 10\}$

determine los conjuntos que se indican y represente la operación gráficamente sombreando el resultado.

a) $A \cup C$
b) $D \cup B$
c) $B \cap C$
d) $A \cap D$
e) $A \cup B'$
f) $B \cup \phi$
g) $C' \cap D$
h) $(A \cap B)'$
i) $(C \cup D)'$
j) $C \cup (A \cap D)$
k) $(B \cap D) \cup (B \cap C)$
l) $(C \cup D) \cap (A \cup B)$

2. Utilice una figura como la que se muestra en seguida y sombree únicamente el área que represente al conjunto que se da. En caso de que sea conjunto vacío no sombree y escriba por un lado su símbolo.

a) $A \cup B$
b) $B \cap C$
c) $(A \cap B) \cup C$
d) $A' \cap B'$



3. Escriba con palabras la descripción del conjunto que se da y represéntelo con un diagrama de Venn; considere que $U = \{x$ es un estudiante$\}$. $A = \{x \in U \mid x$ estudia matemáticas$\}$ y $B = \{x \in U \mid x$ estudia física$\}$. Además aceptamos que $A \cap B \neq \phi$ (es decir que no son disjuntos):

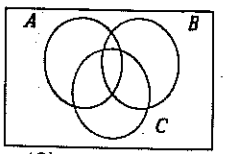
a) $A \cap B$ $\qquad$ b) $(A \cup B)'$ $\qquad$ c) $A' \cup B'$

4. Explique cuáles son las condiciones necesarias que deben satisfacer los conjuntos D y E para que se cumpla la igualdad que se propone en cada inciso de los siguientes:

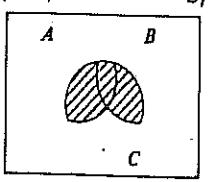
a) $D \cap E = D$
b) $D \cup E = U$
c) $D \cap E = \phi$
d) $D \cup E = D$
e) $E' = \phi$

5. Dibuje **un** diagrama de Venn de manera de que se cumplan las condiciones dadas en cada inciso.
a) $A \subset B$, $C \subset B$, $A \cap C = \phi$
b) $A \subseteq C$, $A \neq C$, $B \cap C = \phi$
c) $A \subset (B \cap C)$, $C \subset B$, $C \neq B$, $A \neq C$

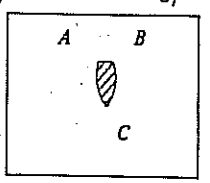
6. Sean los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{x \in U \mid x$ múltiplo de 3$\}$; $B = \{x \in U \mid x$ es número par$\}$; $C = \{x \in U \mid x < 7\}$
Escriba una operación en que participen cualquiera de los conjuntos A B C o sus complementos de manera que el conjunto solución o resultante sea el que se da, unas veces en la forma **enumerativa** y otras con **diagramas de Venn.** Simplifique al máximo su respuesta, el diagrama patrón es el que se da en seguida.



a) $\{3, 6\}$ $\quad$ b) $\{6\}$ $\quad$ c) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$
d)



e)



f) $\{2, 3, 4, 6\}$

RESUMEN

Esta unidad en la que se exponen los elementos fundamentales de la Teoría de Conjuntos nos sirve para unificar y darle cohesión a todas las unidades posteriores apoyándonos en las ideas y conceptos de dicha teoría, de los cuales no se espera que los memoricen, sino más bien que los vayan comprendiendo y apreciando su importancia a medida que los van utilizando.

De todos los términos empleados es verdaderamente importante la comprensión de:

Conjunto
Elemento
Variable
Conjunto de verdad
Conjuntos iguales
Conjuntos equivalentes
Conjunto vacío
Correspondencia biunívoca
Oración abierta
Conjunto de reemplazamiento
Conjunto universal
Número primo
Múltiplo de un número
Unión de conjuntos
Intersección de conjuntos

Disponible en
Preparatoria Abierta Online
www.prepa-abierta.com
PreparatoriaabiertaOnline

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Paneles de verificación

CONJUNTO DE PROBLEMAS I-1

1. a) A un conjunto de jugadores de beisbol se le llama **Novena.**
   b) A un conjunto formado por tres guitarristas se le llama **Trío.**
   c) A un conjunto de monedas antiguas se le llama **Colección.**
   d) A un grupo de alumnos que termina una carrera profesional se le denomina **Generación.**
   e) Una sala que reúne una gran variedad de libros forma una **Biblioteca.**
   f) La reunión de soldados de un país forma un **Ejército.**

2.	Sí	No
a)	☐	☒
b)	☒	☐
c)	☒	☐
d)	☐	☒
e)	☒	☐

3. Porque los elementos que lo forman están enumerados.

4.	Sí	No
a)	☐	☒
b)	☐	☒
c)	☒	☐
d)	☒	☐
e)	☒	☐

5.	Sí	No
a)	☐	☒
b)	☒	☐
c)	☒	☐
d)	☐	☒
e)	☒	☐

6. a) $S = \{1, 2, 3, 4\}$
   b) $L = \{4\}$
   c) $T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
   d) $U = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

7. a) A = {Estados de la República Mexicana en la costa del Golfo de México}
   b) E = {Números naturales menores que 7}

CONJUNTO DE PROBLEMAS I-2

1. a) Es infinito porque no importa qué tan grande sea el número hasta el que contemos, siempre le seguirá otro.

   b) Es un conjunto finito, porque podemos contar los elementos que lo forman.
   c) $n(P) = 8$.

2.	Finito	Infinito
a)	☐	☒
b)	☒	☐
c)	☒	☐
d)	☐	☒
e)	☐	☒

3. a) $M = \phi = \{\ \}$ b) $S = \{8\}$ c) $T = \phi$ d) $V = \{4\}$

4.	Vacío	No Vacío
a)	☒	☐
b)	☐	☒
c)	☒	☐
d)	☐	☒
e)	☐	☒
f)	☐	☒
g)	☒	☐

5. a) $n(A) = 4$ b) $n(B) = 2$ c) $n(C) = 1$
   d) $n(D) = 1$ e) $n(E) = 0$

   En el inciso c) el conjunto tiene un solo elemento que es el 0. En el inciso d) el conjunto tiene un solo elemento que es el conjunto vacío.

6. a) $A \neq B$ b) $B \neq C$ c) $\{2, 5, 3\} \neq A$
   d) $B = \{5, 2, 3\}$ (el orden no se considera) e) $C = A$

CONJUNTO DE PROBLEMAS I-3

1. a) $T = \{\{a, b, c, d\}\}$
   b) $U = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d, a\}\}$ Cada conjunto de cardinalidad 3 es un **elemento** del conjunto U
   c) $S = \{\phi\}$
   d) $W = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

2. a) Falsa
   b) Verdadera
   c) Verdadera
   d) Verdadera
   e) Falsa
   f) Falsa
   g) Falsa

3. a) $B \subset C$
   b) $\{2, 3, 1\} \not\subset A$
   c) $A \subset C$
   d) $\phi \subset B$
   e) $A \not\subset B$
   f) $B \not\subset B$ (El símbolo $\subset$ significa subconjunto propio)
   g) $\{3, 2, 1\} \not\subset A$

4. a) $n(W) = 4$ b) $n(S) = 1$ c) $n(W) > n(S)$
   d) $n(T) = n(S)$ e) $n(U) = n(W)$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

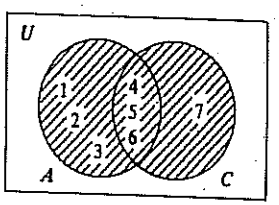
5. D = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
   ↕ ↕ ↕ ↕ ↓ ↓ ↓
   E = {primavera, verano, otoño, invierno}
   $n(D) > n(E)$

6. a) 37 es número primo, sólo es divisible entre sí mismo o la unidad.
   b) 21 es número compuesto, sus factores primos son 3, 7.
   c) 19 es número primo.
   d) 72 compuesto; factores primos son 3, 2. Existen más factores para formar 72, pero son números compuestos como 9, 36, 4, 6, etc.
   e) 27 compuesto; factores primos 3.
   f) 15 compuesto; factores primos 3, 5.
   g) 51 compuesto; factores primos, 3, 17.

7. a) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$
   b) $21 = 3 \cdot 7$
   c) $34 = 2 \cdot 17$
   d) $100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$
   e) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
   f) $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$
   g) $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$

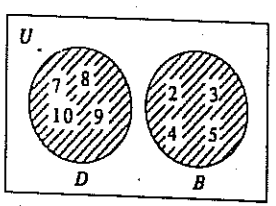
CONJUNTO DE PROBLEMAS I-4

1. a) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



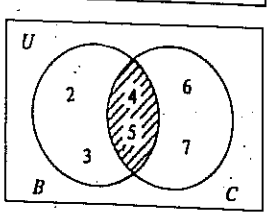
$A \cup C$

b) $D \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$



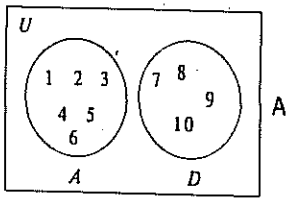
$D \cup B$

c) $B \cap C = \{4, 5\}$



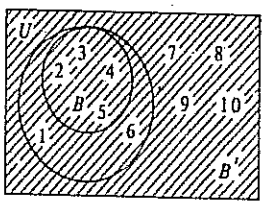
$B \cap C$

d) $A \cap D = \{\ \}$



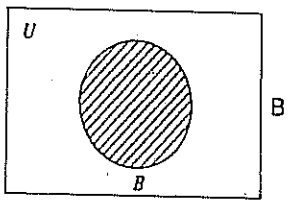
$A \cap D$

e) $A \cup B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = U$



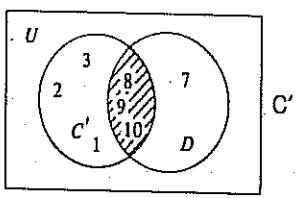
$A \cup B'$

f) $B \cup \phi = B$



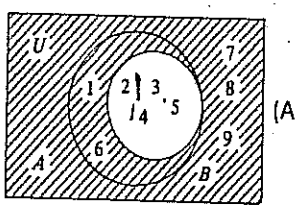
$B \cup \phi$

g) $C' \cap D = \{8, 9, 10\}$



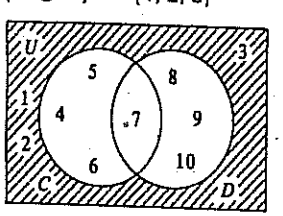
$C' \cap D$

h) $(A \cap B)' = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$

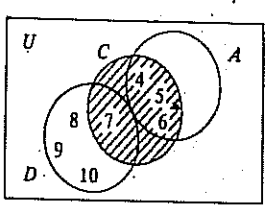


$(A \cap B)'$

i) $(C \cup D)' = \{1, 2, 3\}$

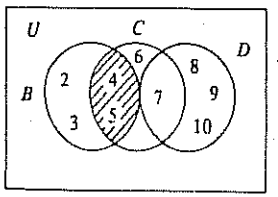


i) $C \cup (A \cap D) = C \cup \phi = C$

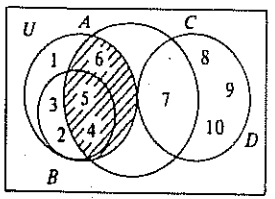


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

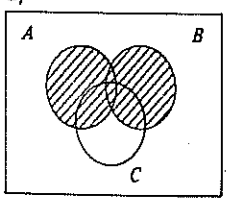
k) $(B \cap D) \cup (B \cap C) = \phi \cup \{4, 5\} = \{4, 5\}$
$B \cap D = \phi$
$B \cap C = \{4, 5\}$



l) $(C \cup D) \cap (A \cup B)$
$C \cup D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A \cup B = A$
$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap A = \{4, 5, 6\}$

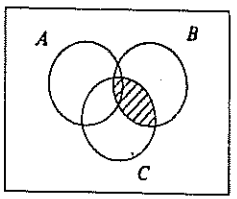


2. a)



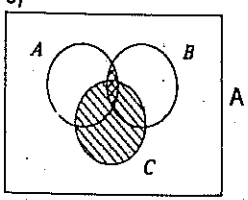
A ∪ B

b)



B ∩ C

c)

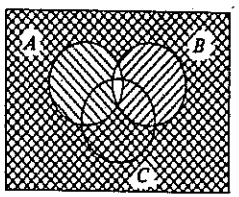


$A \cap B =$

$C =$

(A ∩ B) ∪ C Todo lo sombreado

d)

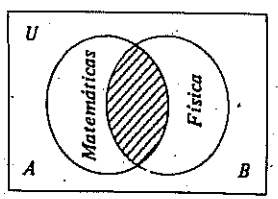


A′ =

B′ =

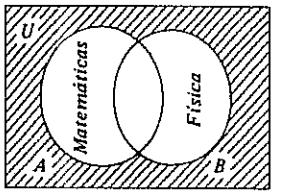
A′ ∩ B′ = Todo lo que tenga cuadrícula.

3. a) $A \cap B = \{x \in U \mid x \text{ estudia matemáticas}\} \cap \{x \in U \mid x \text{ estudia física}\}$
$= \{x \in U \mid x \text{ estudia matemáticas y física}\}$



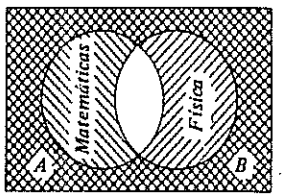
b) $(A \cup B)'$ en este caso conviene primero dibujar el diagrama.

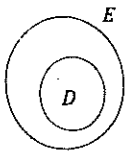
$\{x \in U \mid x \text{ no estudia matemáticas ni física}\}$.
También $\{x \in U \mid \text{es falso que x estudia matemáticas o física}\}$



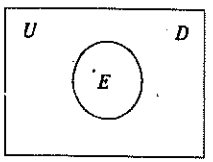
c) $A' \cup B' =$ Todo lo sombreado con cualquier rayado.

$\{x \in U \mid \text{es falso que x estudie } \textbf{ambas,} \text{ matemáticas y física}\}$





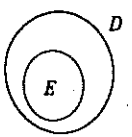
4. a) Para que la intersección nos dé ese resultado es necesario que: $D \subset E$ es decir que D esté contenido en E



b) Para que la unión de dos conjuntos cualquiera produzca el Universo es suficiente que un conjunto sea complemento del otro
$D = E'$ ó $E = D'$

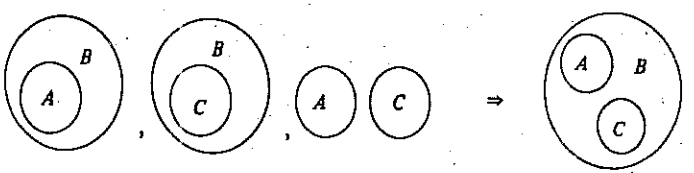
c) En este caso los conjuntos deben ser disjuntos.

d) Como en el inciso a) sólo que ahora es E el subconjunto propio de D

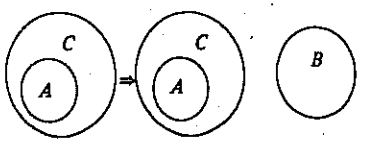


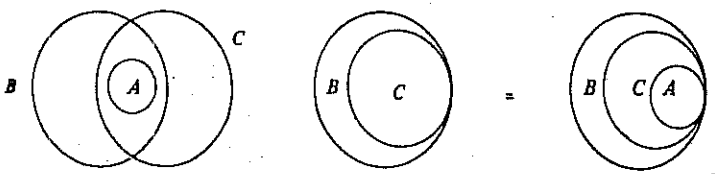
e) Cuando $E = U$

5. a)



b) De las dos primeras condiciones se saca en conclusión que la información completa sería $A \subset C$

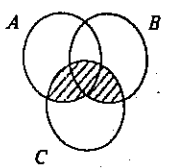




c)

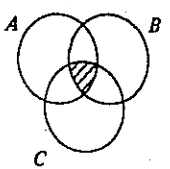
6. a) $A \cap C$ b) $A \cap B$ c) $A \cup B$

d)



$(A \cup B) \cap C$

e)



$(A \cap B) \cap C$

f) $(A \cup B) \cap C$

UNIDAD II

ELEMENTOS DE LOGICA MATEMATICA

PreparatoriaabiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

Por muchos años el estudio de la lógica se consideró independiente de la matemática, siendo así que los lógicos eran incapaces de simbolizar o seguir un razonamiento simbólico y los matemáticos ajenos totalmente a la justificación de las técnicas que iban aprendiendo; los lógicos se remitían al estudio de los antiguos griegos y los matemáticos a estudios de las ciencias.

Afortunadamente para todos, la evolución de ambos estudios ha llegado a un punto en el que es imposible distinguir una frontera entre ambos, separar lo que sería solamente lógica de lo que sería solamente matemática, a este respecto Bertrand Russell nos propone decidir, en qué punto de las sucesivas definiciones y deducciones de su obra "Principia Mathematica" acaba la lógica y empieza la matemática, siendo evidente que cualquier respuesta sería completamente arbitraria.

Podemos considerar entonces a esta unidad como el primer y más importante paso en el estudio formal de los fundamentos de la matemática, aunque para cumplir nuestros objetivos no profundicemos demasiado por ese camino.

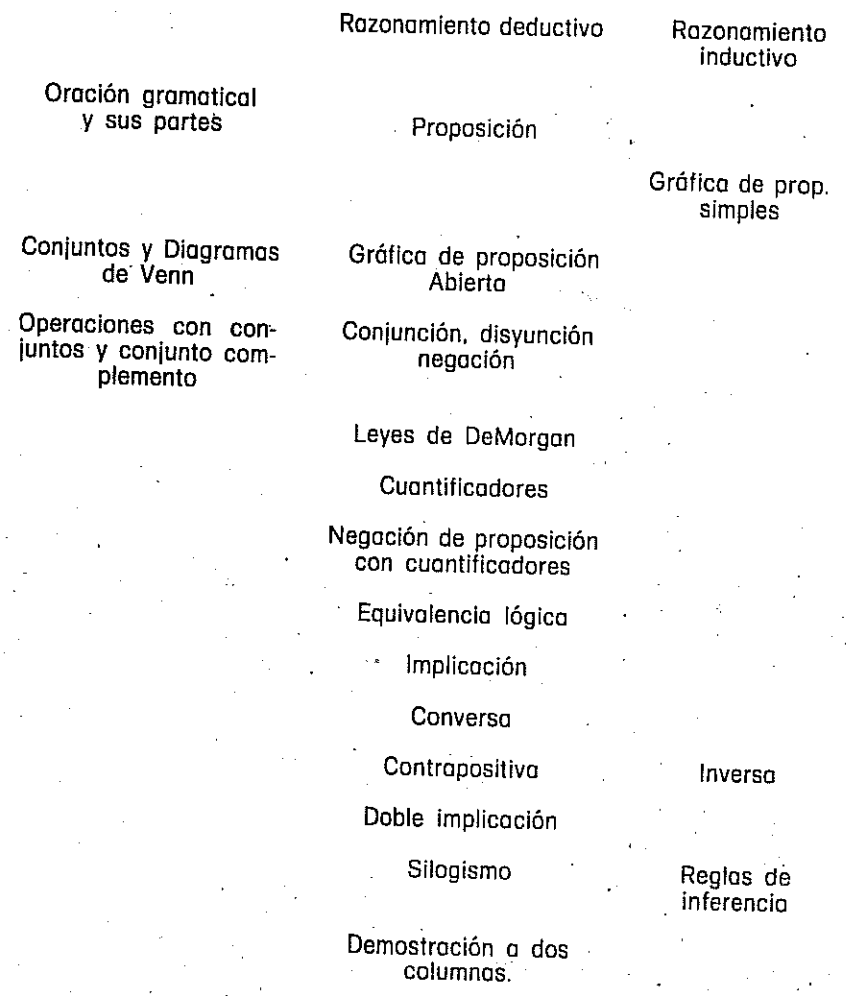
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al término de esta unidad, el alumno:

1. Distinguirá los principales métodos de la lógica.
2. Utilizará el lenguaje de conjuntos —visto en la unidad anterior— para representar simbólica y gráficamente las proposiciones del lenguaje ordinario.
3. Simbolizará proposiciones dadas en el lenguaje común.
4. Traducirá proposiciones en lenguaje simbólico al lenguaje común.
5. Aplicará los conectivos lógicos en las operaciones de la lógica.
6. Interpretará el valor de verdad de proposiciones compuestas con ayuda de diagramas de Venn.

Diagrama temático estructural



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Razonamiento inductivo. Es el proceso de encontrar un principio general basándose en la presentación de hechos o casos específicos.

Razonamiento deductivo. Es el proceso mediante el cual se hace uso de un principio general, aceptado como verdadero, para obtener una conclusión en un hecho o caso particular.

Postulado. Proposición acerca de objetos bien definidos, la cual se acepta como verdadera. Los postulados junto a las definiciones son los pilares y puntos de partida de una teoría.

Proposición. Es la oración gramatical cuyo significado forzosamente ha de ser: "verdadero o falso", pero no ambos a la vez.

Proposición simple. Es aquella que no puede separarse en otras proposiciones unidas por uno o más conectivos lógicos.

Proposición abierta. Es el tipo de proposición que contiene alguna variable y un conjunto de reemplazamiento para ella.

Valor de verdad. Es la propiedad que tiene toda proposición; esto es: ser verdadera o bien, ser falsa. Si la proposición es verdadera decimos que su valor de verdad es 1, y, si es falsa, su valor de verdad es 0.

Conjunto de verdad. Conjunto tomado por los elementos del conjunto de reemplazamiento de una proposición abierta y que la hacen verdadera.

Conectivos lógicos. Sirven para asociar dos o más proposiciones. Estos conectivos son "y", "o", "si... entonces".

Proposición compuesta. Es una proposición formada por dos o más proposiciones unidas por conectivos.

Conjunción. Proposición compuesta formada por dos proposiciones asociadas por el conectivo "y".

Disyunción. Proposición compuesta formada por dos proposiciones asociadas por el conectivo "o".

Cuantificador universal. Expresión "para todo x", que se aplica a proposiciones abiertas que contienen la variable x para indicar referencia a una totalidad de sujetos.

Cuantificador existencial. Expresión "existe un x tal que", que se aplica a proposiciones abiertas que contienen la variable x, para afirmar la existencia de algún sujeto...

Hipótesis. Es una proposición que se toma como punto de partida de una prueba.

Proposiciones equivalentes. Son aquellas que tienen el mismo valor de verdad o el mismo conjunto de verdad.

Conversa. Si cambiamos el orden de las proposiciones dejando en su lugar al conectivo, formamos una variante de la implicación, a la que llamamos "conversa".

Contrapositiva. $\sim q \Longrightarrow \sim p$ es la "contrapositiva" de $p \Longrightarrow q$.

Inversa. $\sim p \Longrightarrow \sim q$ es la "inversa" de $p \Longrightarrow q$.

Doble implicación. Operación binaria la cual conecta dos proposiciones por el conectivo lógico "si y sólo sí". Es decir, es lo mismo que una proposición "implica a la otra y es implicada por ella".

Módulo 5

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Distinguirá entre razonamiento en que se empleen los métodos inductivo y deductivo.
2. Definirá con sus palabras la idea de proposición.
3. Distinguirá entre un conjunto de oraciones dadas cuáles son proposiciones.
4. Construirá proposiciones simples y proposiciones abiertas dando su valor de verdad o conjunto de verdad.
5. Graficará, mediante diagramas de Venn, proposiciones simples y abiertas identificando su valor de verdad o conjunto de verdad.

ESQUEMA RESUMEN

Métodos de la lógica:

— Inductivo.

— Deductivo.

— Analógico.

Proposiciones simples y abiertas:

— Proposiciones simples.

— Valor de verdad.

— Proposiciones abiertas.

— Conjunto de verdad.

— Gráficas de proposiciones.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Inducción y deducción

La lógica tiene por objeto facilitarnos el camino para llegar a la verdad, utilizando para ello el método racional que procede en dos formas, la forma **inductiva** y la forma **deductiva.**

La forma **inductiva** es el proceso de encontrar un principio general, basándose en la presentación de hechos o casos específicos; tiene su aplicación principal como método de descubrimiento, por **ejemplo:** Eduardo fue enviado a la Dirección de la Escuela durante cuatro días seguidos por llegar tarde a clase. Cuando llegó tarde el quinto día concluyó: **"me enviarán a la Dirección".** Usó un razonamiento inductivo al concluir que lo enviarían a la Dirección por el hecho de que así había sido durante cuatro días, es decir, que basado en hechos, generalizó que así sucedería siempre.

Sin embargo, el razonamiento **inductivo** no siempre conduce a resultados exactos y debe usarse con precaución; toma siempre como base una suposición por lo que, aunque sus conclusiones representan un razonamiento inteligente, no son conclusiones probadas.

La forma **deductiva** es el proceso mediante el cual una persona usa un principio general, aceptado como verdadero, para obtener una conclusión en un caso o hecho particular; algunas veces a la conclusión misma se le llama deducción; **ejemplo:** Es principio general aceptado que a todo alumno que llega tarde a clase se le envía a la Dirección de la Escuela; en un caso particular, Eduardo llega tarde a clase por lo que concluye; **"me van a enviar a la Dirección".** Ahora usó un razonamiento **deductivo,** pues aceptando el principio como verdadero, razonó a partir de él para sacar una conclusión en su caso particular.

"Deducir es razonar en Matemática". Efectivamente, el razonamiento matemático es eminentemente **deductivo** y los principios en los que se apoya son de dos tipos: los **Postulados** y las **Definiciones.** Tanto los **Postulados** como las **Definiciones** son **Principios Generales** que aceptamos como verdaderos.

Proposiciones simples y abiertas.

En matemática, al igual que en el lenguaje común, tenemos que tratar con oraciones en las que existe la posibilidad de decidir si son verdaderas o son falsas. Para que esto sea posible, **las oraciones usan términos o símbolos que tienen un significado único y bien definido;** cuando se trata de una oración abierta, como se definió antes en conjuntos, la oración debe ser o falsa o verdadera, pero no ambas cosas, con cada valor que se asigne a la variable tomado de su conjunto de reemplazamiento. A las oraciones de las que se puede decir si son verdaderas o son falsas, abiertas o no, se les llama **proposiciones.** Ejemplo de oraciones que **son proposiciones:**

1. "x es un número impar; $x \in N$". Es proposición porque con cada número natural que se reemplace a la "x" la oración será, o falsa o verdadera.

2. Un triángulo equilátero es isósceles. (Falsa).
3. $3 + 9 = 6x$; $x \in N$. (Proposición), por lo mismo que en el ej. No. 1.
4. 9 es un factor de 27. (Verdadera) Proposición.
5. Monterrey es un estado de la República Mexicana. (Falsa).

Ejemplo de oraciones que **NO son proposiciones** porque no se puede decir de ellas que sean falsas o verdaderas.

a) $2x + 5 = x - 1$. (No se da conjunto de reemplazamiento para la variable por lo que no hay modo de decidir cuándo sea falsa o cuándo sea verdadera).
b) Juan tiene 21 años. (No se define de qué Juan se trata, por lo que no se puede decidir si es falso o verdadero).
c) "y" es un número impar. (No se da conjunto de reemplazamiento para la variable "y".

Observando los ejemplos anteriores, podemos clasificar a las proposiciones en dos tipos.

> A aquellas proposiciones de las que inmediatamente se puede decir si son verdaderas o son falsas las llamaremos **Proposiciones Simples.** De ellas se dice que tienen un **valor de verdad,** Verdadero o Falso.

> El otro tipo de proposición es aquella que tiene alguna variable y un conjunto de reemplazamiento para ella. A éstas las llamaremos **Proposiciones Abiertas,** y de ellas se dice que tienen **un conjunto de verdad,** el cual es un subconjunto de su conjunto de reemplazamiento. El **conjunto de verdad** lo forman los elementos que hacen que la proposición sea verdadera.

De acuerdo con lo anterior, a cualquier proposición abierta se le convierte en proposición simple al asignar para la variable un elemento del conjunto de reemplazamiento.

Ejemplo:

"x es un número impar; $x \in N$". Esta es una Proposición abierta y tiene un conjunto de verdad que es el de los números impares, el cual es un subconjunto del conjunto de los números naturales, su conjunto de reemplazamiento. Si tomamos de "N" el número 7 para reemplazar la x, la proposición queda como "7 es un número impar" de la que inmediatamente podemos decir que es Verdadera. Si tomamos el 28, diría "28 es un número impar". Falsa.

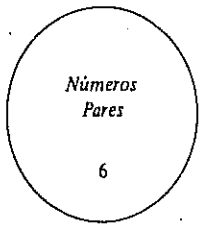
NOTA: Número par es aquel que al dividirlo entre dos da residuo = 0. Número impar es aquel que al dividirlo entre dos da un residuo = 1.

Gráfica de proposiciones

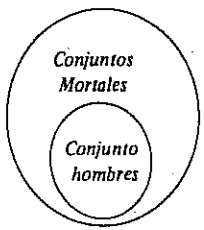
Las proposiciones simples son oraciones declarativas que tienen un sujeto y un predicado. No tienen componentes unidos por conjunciones como "y", "o", "si ... entonces", y generalmente usan el verbo ser; esto último facilita que se puedan re-escribir o modificar para decir que un sujeto, es

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

o no es, elemento de cierto conjunto, y representar esto por medio de un diagrama de **Venn.** Es decir, podemos emplear el lenguaje de conjuntos tanto simbólico como gráfico visto en la Unidad I para nuestras proposiciones en el lenguaje ordinario.

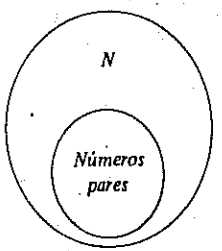


Ejemplo a): "6 es un número par" puede reescribirse como "6 es un elemento del conjunto de números pares" y graficar la proposición como se muestra en la figura.

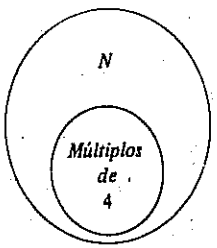


Ejemplo b): "Todo hombre es mortal" se re-escribe como "El conjunto de todos los hombres es un subconjunto del conjunto de todos los mortales".

La gráfica de la proposición abierta es el diagrama de **Venn** representando al conjunto de reemplazamiento y su subconjunto el **conjunto de verdad,** también llamado **conjunto solución.**



Ejemplo a): "x es un número par; $x \in N$".



Ejemplo b): "x es un múltiplo de 4; $x \in N$".

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION II-5

Use el razonamiento inductivo para establecer un principio general:

1. Un estudiante de nuevo ingreso observó durante varios lunes consecutivos que se reunía a todos los alumnos para hacer el saludo a la Bandera.

   Conclusión:_____

Use el razonamiento deductivo para establecer un principio particular:

2. Todos los jugadores de las Ligas Mayores tienen buen salario. Si García es un jugador de Liga Mayor entonces.

   Conclusión:_____

En los siguientes problemas diga si la conclusión se obtuvo por inducción o por deducción:

3. Hoy es martes, mañana será miércoles.
4. Lloverá esta Navidad, puesto que cinco años consecutivos ha llovido en Navidad.
5. Si el perímetro de un cuadrado mide 4 cm, cada lado mide un cm.

En los siguientes ejercicios clasifique las oraciones diciendo si son o no, proposiciones y en caso afirmativo, si éstas son simples o abiertas dando su **valor de verdad** o su **conjunto de verdad** según sea el caso.

6. "5 es un número impar".
7. "$2x + 1 = 5$".
8. "$3 + 9 = 2x$; $x \in N$".
9. "x es un número par; $x \in N$".

Utilice el lenguaje de conjuntos para modificar las siguientes proposiciones y así poder graficarlas.

10. "Todos los múltiplos de 6 son números pares".
11. "$3 < 5$".

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 6

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Dada una lista de proposiciones discriminará las simples de las compuestas.
2. Dará ejemplos de proposiciones expresadas en lenguaje común, unidas por el correctivo conjunción.
3. Encontrará el valor de verdad o conjunto solución en la conjunción de proposiciones simples o abiertas respectivamente.
4. Representará mediante diagramas de Venn el conjunto de verdad de la conjunción de dos proposiciones.
5. Distinguirá entre la disyunción inclusiva y la exclusiva.
6. Encontrará el valor de verdad o conjunto solución en la disyunción de dos proposiciones dadas.
7. Representará, mediante diagramas de Venn el conjunto solución de la disyunción de dos proposiciones abiertas.
8. Graficará, utilizando diagramas de Venn, proposiciones compuestas que llevan los "conectivos lógicos": y, o, encontrando el conjunto de verdad de ellas.

ESQUEMA RESUMEN

Proposiciones-compuestas.

Conectivos lógicos:

— Conjunción.

— Valor de verdad o conjunto de verdad.

— Representación gráfica mediante diagramas de Venn.

— Disyunción inclusiva.

— Disyunción exclusiva.

— Valor de verdad o conjunto de verdad.

— Representación gráfica mediante diagramas de Venn.

Las proposiciones **simples,** y **abiertas** son los elementos básicos en el manejo de nuestro lenguaje, y partiendo de ellas pueden construirse otras cada vez más complejas, asociándolas mediante conectivos que llamaremos **conectivos lógicos.** Estos conectivos son: "y", "o", "si . . . entonces". Usaremos también la partícula "no" aunque hablando con propiedad no es un conectivo ya que sólo afecta a una proposición. A las proposiciones así asociadas las llamaremos **Proposiciones Compuestas** y su **valor de verdad** o su **conjunto de verdad** dependerá de los **valores de verdad** o **conjuntos de verdad** de las proposiciones componentes.

Conjunción

> Si asociamos dos proposiciones usando el conectivo lógico "y", formamos una proposición compuesta llamada **proposición conjuntiva** o simplemente **conjunción.**

La **conjunción** de dos proposiciones simples es verdadera sólo si ambas proposiciones son verdaderas, ya que estamos afirmando las dos declaraciones; si una de ellas es falsa o si ambas lo son, entonces la **conjunción** es falsa.

Debemos tener presente que una proposición simple tiene un **valor de verdad** (verdadero o falso), mientras que una proposición abierta tiene un **conjunto de verdad** o **conjunto solución** formado por los elementos del conjunto universal o de reemplazamiento que hacen de la proposición abierta una proposición simple y verdadera. Por lo anterior **la conjunción** de dos proposiciones simples tiene un valor de verdad como vemos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo a): "4 es un número par y 4 es número natural". Verdadera, ambas proposiciones lo son.

Ejemplo b): "3 es un número natural y 3 es un número par". Falsa, porque la segunda proposición "3 es número par" es falsa.

Ejemplo c): "Yo soy alumno del ITESM y no sé leer". Falsa, la segunda proposición "Yo no sé leer" es falsa.

La **conjunción** de dos proposiciones abiertas es sólo verdadera para aquellos elementos del conjunto de reemplazamiento que hagan que **ambas** proposiciones abiertas sean verdaderas; si un elemento hace que alguna de las proposiciones o que ambas sean falsas, la conjunción será falsa para ese elemento.

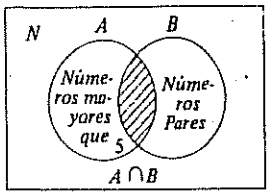
Como cada proposición abierta tiene su conjunto de verdad tendremos dos conjuntos de verdad y el conjunto de verdad de la conjunción lo formarán los elementos comunes, es decir, los que pertenezcan a la intersección de los dos conjuntos de verdad.

Ejemplo: "$x > 5$ y x es un número par; $x \in N$". Esta **conjunción** sólo será verdadera para elementos de N que siendo números pares sean a la

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

vez mayores que 5. El conjunto solución o de verdad se podría escribir como:

$\{x \in N \mid x > 5$ y x es par$\}$. Este conjunto corresponde a la intersección del conjunto $A = \{x \in N \mid x > 5\}$ con el conjunto $B = \{x \in N \mid x$ es par$\}$.



En estos casos es particularmente útil la gráfica con los diagramas de Venn, donde N es el conjunto universal o de reemplazamiento y la solución de la **proposición conjuntiva** queda graficada por la intersección de A y B.

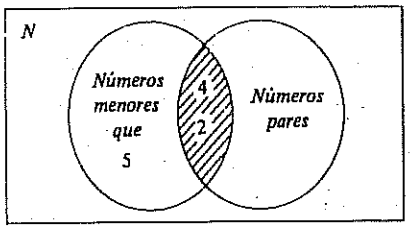
En las siguientes **conjunciones** encuentre el **valor de verdad** o el **conjunto solución** con su gráfica, según sea la **conjunción** de proposiciones **simples** o **abiertas** respectivamente.

1. Cinco veintes hacen un peso **y** dos veintes hacen un tostón.
2. **x** es un número par **y x** es menor que 5; $x \in N$.

Si sus respuestas son acertadas siga adelante.

Respuestas

1. Falsa. La segunda proposición es falsa lo que hace falsa a la **conjunción.**
2. Conjunto solución $= \{x \in N \mid x < 5$ y x es par$\} = \{4, 2\}$.



Disyunción

> Cuando dos proposiciones se asocian con el conectivo lógico "o", la proposición compuesta que se forma se llama **proposición disyuntiva** o **disyunción.**

En español el conectivo lógico "o" tiene dos significados, uno es el llamado "o exclusivo" que se entiende como "o uno o el otro, pero **NO** ambos"; y el otro se llama el "o inclusivo" que se entiende como "o uno o el otro, o ambos". En Matemática, como en la Lógica, es este último significado el que se utiliza **siempre.**

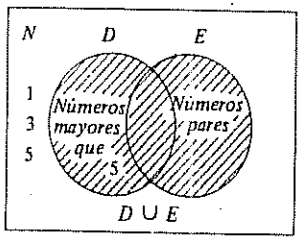
La **disyunción** de dos proposiciones simples es verdadera si **cualquiera** de las proposiciones es verdadera y sólo será falsa cuando **ambas** sean falsas, pues en este caso se afirma cualquiera de las proposiciones.

Ejemplo a): "6 es factor de 35 o $6 + 2 = 8$". Verdadera; porque la segunda es verdadera, aunque la primera "6 es factor de 35" es falsa.

Ejemplo b): "Yo estudio preparatoria o tengo más de 10 años". Verdadera: ambas proposiciones son verdaderas.

Ejemplo c): "Monterrey está en Francia o está en Brasil". Falsa; ambas proposiciones son falsas.

La **disyunción** de dos proposiciones abiertas es verdadera para los elementos del conjunto de reemplazamiento que hagan verdadera a cualquiera de las dos proposiciones abiertas que la componen, o para aquellos elementos que hagan verdaderas a las dos. Esto en conjuntos corresponde a la unión de los dos conjuntos solución.



Gráfica de la Disyunción

Ejemplo: "$x > 5$ o x es un número par; $x \in N$". Esta **disyunción** es verdadera para elementos de N que cumplan una cualquiera de las dos afirmaciones, es decir que dichos elementos pertenecen al conjunto solución de $x > 5$ o pertenecen al conjunto solución de **x** es par, o pertenecen a ambos. Puede observarse por lo antes dicho que la solución corresponde a la unión de un conjunto $D = \{x \in N \mid x > 5\}$ con un conjunto $E = \{x \in N \mid x$ es par$\}$. La gráfica de las proposiciones abiertas en un mismo conjunto de reemplazamiento nos da una mejor y más clara idea de la solución. Sólo 1, 3, 5 no pertenecen a la solución.

En las siguientes **disyunciones** encuentre el valor de verdad o el conjunto solución con su gráfica, según corresponda:

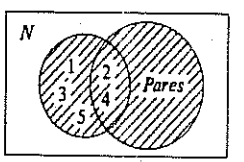
1. El número 9 es primo o el número 9 es impar.
2. **x** es menor que 6 o **x** es par; $x \in N$.

Si sus respuestas son correctas siga adelante, caso contrario repase la **disyunción.**

Respuestas:

1. Verdadera; aunque la primera proposición, es falsa la segunda es verdadera.

2. $\{x \in N \mid x < 6$ o x es par$\} =$
   $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$



Las proposiciones compuestas que hemos analizado son las más elementales ya que las formamos al conectar dos proposiciones **simples** o dos proposiciones **abiertas,** pero en muchas ocasiones conectamos proposiciones **simples** con proposiciones **compuestas** o aún más, conectamos dos proposiciones compuestas haciendo que la proposición resultante sea cada vez más compleja y por lo mismo más difícil para determinar su valor de verdad o su conjunto de verdad, pero siempre será posible determinarlo si procedemos metódicamente como en los ejemplos que siguen:

Ejemplo a) "El 7 es un número natural primo y además es impar".

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

En este caso tenemos tres proposiciones simples en **conjunción** que podemos simbolizar usando letras minúsculas:

p: El 7 es número natural
q: El 7 es número primo
r: El 7 es número impar

(p y q) y r

El valor de verdad es **verdadero,** porque siendo p verdadera y q también, su **conjunción** es verdadera; como r es verdadera la conjunción de la conjunción p y q con r será también verdadera.

Ejemplo b)

Considerando U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} como universo de la variable ¿cuál será el conjunto de verdad de "x es un múltiplo de 2 menor que 9 o es un número divisible entre 3 mayor que 5"?

Primero necesitamos saber cuántas proposiciones diferentes de las llamadas básicas tenemos y vamos a simbolizarlas.

a: "x es múltiplo de 2"
b: "x < 9"
c) "x es divisible entre 3"
d) "x > 5"

Identificamos en seguida los conjuntos de verdad de cada proposición considerando que U es el conjunto de reemplazamiento.

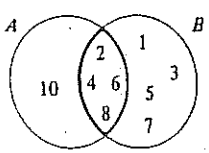
A = {2, 4, 6, 8, 10}
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
C = {3, 6, 9}
D = {6, 7, 8, 9, 10}

Ahora simbolizaremos las relaciones entre las proposiciones; a, b forman una conjunción aunque podemos observar que no se mencionó el conectivo "y". Este se encuentra implícito al decir que "x es múltiplo de 2 menor que 9" (a y b)
c, d también están en conjunción (c y d)
y las dos conjunciones forman una disyunción

(a y b) o (c y d)

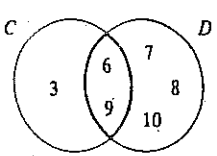
Por lo que el conjunto de verdad de esta compleja proposición será:

a y b; A ∩ B



{2, 4, 6, 8}

c y d; C ∩ D



{6, 9}

(a y b) o (c y d); (A ∩ B) ∪ (C ∩ D)
{2, 4, 6, 8} ∪ {6, 9} = {2, 4, 6, 8, 9}

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION II-6

Use el lenguaje de conjuntos para reescribir las siguientes oraciones:

1. Todos los múltiplos de 6 son números pares.
2. 3 es un número impar.
3. x es un número natural y es menor que 4.
4. El triángulo T es equilátero.

5.8. Los problemas 5, 6, 7 y 8 grafíquelos. Utilice los primeros cuatro respectivamente.

En los problemas siguientes ilustre con diagramas de Venn, las proposiciones simples que se dan, considerando al conjunto N como el conjunto universal.

9. El conjunto de todos los números primos mayores que 2 es un subconjunto del conjunto de números impares.
10. Todos los múltiplos de 2 son números pares.
11. Ningún número primo es múltiplo de 3.

Para los problemas siguientes considere que M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} es el conjunto de reemplazamiento.

12. Con las siguientes proposiciones forme la disyunción y escriba una lista de los elementos que pertenezcan al conjunto solución, "x es menor que 8",, "x es múltiplo de 3".
13. Forme la disyunción de "x es múltiplo de 3" con la disyunción entre "x es número par" y "x es menor que 8". Escriba una lista de los elementos del conjunto solución.
14. Con cualquiera de las proposiciones utilizadas en el problema anterior forme una **proposición compuesta** cuyo conjunto solución es {3, 6}. **Indicación:** Puede formar la proposición compuesta usando otras ya compuestas como en el problema anterior.
15. Con las proposiciones usadas en los problemas anteriores forme una que tenga como conjunto solución {2, 3, 4, 6}.

Sean A, B, C los conjuntos solución de tres proposiciones abiertas a, b, c, respectivamente. (Ninguno de los tres es conjunto disjunto). Dibuje los diagramas de Venn para las siguientes proposiciones compuestas, sombreando el área que representa la solución de la proposición compuesta.

16. a o b
17. b y c
18. (b y c) o a
19. b y (c o a)
20. b y (c y a)

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 7

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Expresará la negación de una proposición dada.
2. Encontrará, graficará el conjunto de verdad de la negación de una proposición.
3. Construirá la negación de una conjunción.
4. Construirá la negación de una disyunción.
5. Representará gráficamente utilizando diagramas de Venn y aplicando las leyes de De Morgan la negación de proposiciones conjuntivas o disyuntivas.
6. Discriminará entre un cuantificador universal y un cuantificador existencial.
7. Construirá proposiciones con cuantificadores.
8. Negará proposiciones con cuantificadores.
9. Representará gráficamente mediante diagramas de Venn la negación de proposiciones que contengan un cuantificador universal o el cuantificador existencial.

ESQUEMA RESUMEN

Negación de proposiciones:

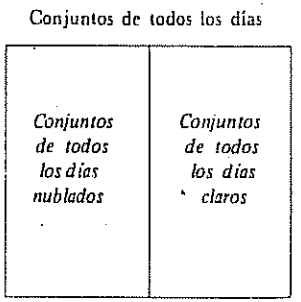
— Negación de una proposición abierta.
— Conjunto de verdad.
— Representación gráfica mediante diagramas de Venn.
— Negación de proposiciones compuestas.
— Negación de una conjunción.
— Conjunto de verdad.
— Representación gráfica mediante diagramas de Venn.
— Negación de una disyunción.
— Conjunto de verdad.
— Representación gráfica mediante diagramas de Venn.
— Leyes de DeMorgan.

Cuantificadores lógicos:

— Cuantificador universal, y su negación.
— Cuantificador existencial, y su negación.
— Representación gráfica mediante diagramas de Venn.

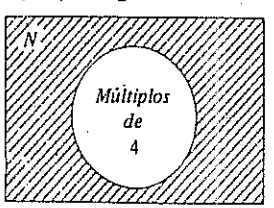
Negación

Ya mencionamos que aunque la partícula "no" afecte sólo a una proposición, consideraremos que la negación de una proposición dada forma una proposición compuesta. El valor de verdad de la proposición así compuesta es el opuesto del valor de verdad de la proposición dada.



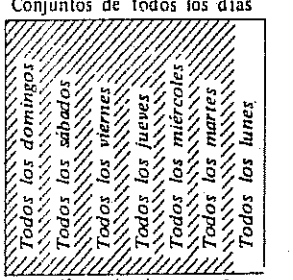
Ejemplo: Al pensar la negación de la oración "Hoy es un día nublado". Escribimos: "Es falso que hoy es un día nublado" o también "Hoy no es un día nublado". Puede observarse que si la proposición dada es verdadera entonces la negación es falsa, y viceversa. La representación, de la proposición dada en un diagrama de Venn se muestra a la izquierda; en él se observa que la solución o representación gráfica de la negación es precisamente el conjunto complemento.

Si la proposición dada es abierta, los diagramas de Venn son todavía más valiosos para determinar el conjunto de verdad de la negación. En el ejemplo siguiente tenemos la proposición "x es múltiplo de 4; $x \in N$", cuya negación sería "es falso que x sea múltiplo de 4; $x \in N$" o "x no es múltiplo de 4; $x \in N$". De acuerdo a lo antes dicho la proposición es verdadera para los elementos del conjunto de reemplazamiento que hagan falsa a la proposición original. En seguida presentamos el diagrama de Venn. La parte sombreada representa la solución.



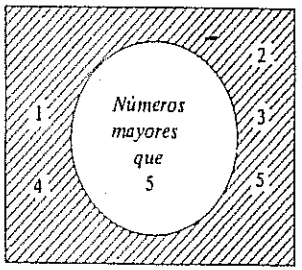
Un error muy común es el de considerar que la negación de una proposición es otra proposición que afirma algo contrario o algo diferente. Por ejemplo algunos pretenden negar la proposición "Hoy es lunes", diciendo "Hoy es jueves".

El diagrama de Venn para "Hoy es lunes", si el conjunto de reemplazamiento es el conjunto de todos los días, sería el que se muestra a la derecha; en él se puede notar que el complemento sería el conjunto de martes, miércoles, jueves, viernes, sábados y domingos. Por lo que la negación considera que hoy podría ser uno cualquiera de los otros días de la semana. Se sombrea la negación.



El error antes mencionado es más frecuente cuando la proposición es

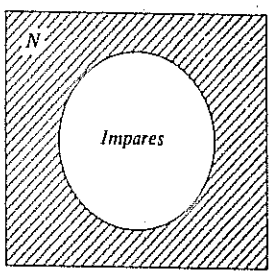
abierta. Por ejemplo, la negación de "$x > 5$; $x \in N$" sería $x \not> 5$; $x \in N$" o también "es falso que $x > 5$; $x \in N$", pero muchos escriben o interpretan la negación como "$x < 5$; $x \in N$". Los diagramas de Venn nos proporcionan un método más sencillo de acertar en la solución. Usando el ejemplo anterior tendremos el diagrama que se muestra para la proposición dada, en él se sombrea la solución para la negación y como se ve es el complemento; si $A = \{x \in N \mid x > 5\}$, la negación será $A' = \{x \in N \mid x \not> 5\}$.



Negación de proposiciones compuestas

Hasta aquí hemos tratado sólo con la **negación de una proposición.** Consideraremos ahora la **negación de proposiciones compuestas,** y para hacerlo empezaremos por analizar la misma negación.

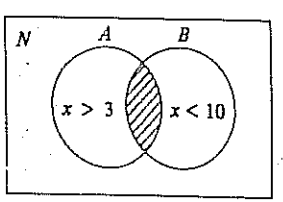
Ejemplo: Al pensar la negación de la proposición compuesta "x no es número impar; $x \in N$" cuyo conjunto solución es el que se muestra sombreado en la figura; la negación de la proposición dada será "Es falso que x no es número impar; $x \in N$" y su gráfica será sombrear el complemento de la gráfica dada, lo que significa que la proposición es equivalente a decir "x es número impar; $x \in N$". De todo esto podemos deducir que la negación de la negación de una proposición es la proposición misma o también que negar una proposición negativa es igual a enunciar la proposición afirmativa.



Analicemos ahora la **negación de una conjunción** a través de otro ejemplo.

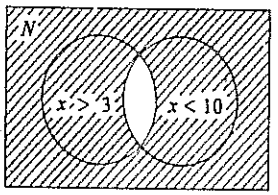
a) Sea "$x > 3$ y $x < 10$; $x \in N$" cuyo conjunto solución se muestra en el primer diagrama de esta página y que en el lenguaje de conjuntos es la intersección de $\{x \in N \mid x > 3\}$ con $\{x \in N \mid x < 10\}$. La negación de la proposición conjuntiva será entonces "Es falso que $x > 3$ y $x < 10$; $x \in N$" y el conjunto solución es el complemento del conjunto solución de la proposición original, como se ve en el siguiente diagrama de Venn. Este diagrama nos sugiere otra forma de escribir la negación utilizando los complementos de cada conjunto solución; como puede comprobarse, en los diagramas de Venn la unión de los complementos es igual al complemento de la intersección, $(A' \cup B') = (A \cap B)'$ entonces la negación quedaría como $\{x \in N \mid x \not> 3\}$ unido con $\{x \in N \mid x \not< 10\}$ que en el lenguaje común sería $\{x \in N \mid x \not> 3$ o $x \not< 10\}$

Gráfica de conjunción

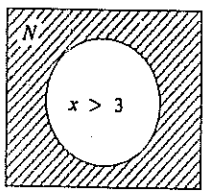


$A \cap B$

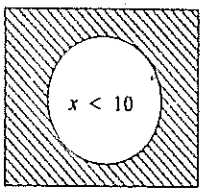
Gráfica de la negación de la conjunción



$(A \cap B)'$



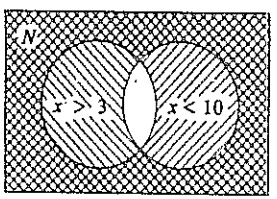
A'



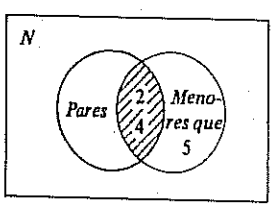
B'

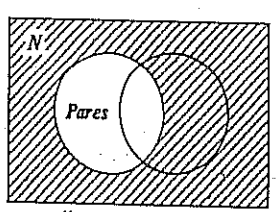
La combinación de los dos cuadros anteriores en uno solo nos sugiere el resultado de negar una conjunción y también nos da un método para manipular las proposiciones compuestas usando diferentes sombreados para determinar un resultado final de la composición.

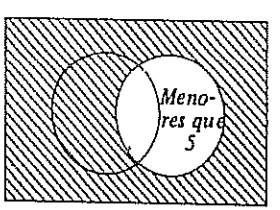
$A' \cup B'$



b) Escriba la negación de "x es número par y x es menor que 5; $x \in N$" y encuentre su conjunto de verdad. Utilizando la notación de conjuntos obtenemos y graficamos el conjunto solución de la conjunción dada $\{x \in N \mid x$ es par$\} \cap \{x \in N \mid x < 5\} = \{2, 4\}$. El conjunto complemento del anterior es igual a la unión del complemento de cada conjunto solución. La negación será pues "x no es par o x no es menor que 5; $x \in N$".

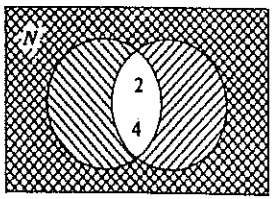




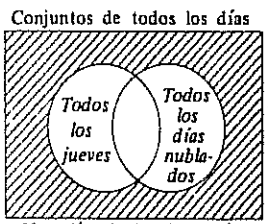


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com



"x no es por, o x no es menor que 5"



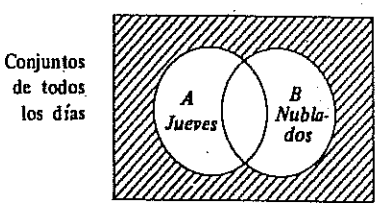
Negación de la disyunción

Analicemos ahora la negación **de una disyunción** y su diagrama de Venn. "Hoy es jueves o es un día nublado". La negación de la proposición será "Es falso que hoy sea jueves o esté nublado". El diagrama de esta proposición será el complemento del diagrama de la disyunción dada.

Si consideramos la negación de cada una de las proposiciones que forman la disyunción anterior ¿cuál sería la proposición compuesta que tenga el mismo conjunto solución? Llame "a" a la primera proposición y "b" a la segunda. A y B serán los conjuntos solución de cada una respectivamente. Si puede acertar en su respuesta significa que ha captado perfectamente la idea de la negación de las proposiciones compuestas, en caso contrario repáselo de nuevo.

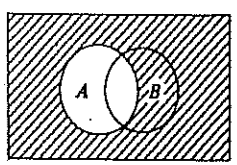
Respuesta

Sea la proposición compuesta, **a** o **b** cuyo diagrama se muestra en seguida sombreando el complemento.

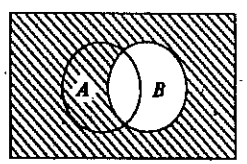


$(A \cup B)'$

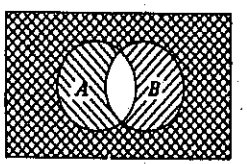
Considerando la negación de **a** y de **b** los conjuntos solución serían A′ y B′ respectivamente. La combinación que me dará la misma área sombreada que tenía, será el área cuadriculada que corresponde a la intersección de A′ y B′, por lo tanto la solución es: no **a** y no **b**: "Hoy no es jueves y no es un día nublado". $(A \cup B)' = A' \cap B'$.



A′



B′



$A' \cap B'$.

Después de acertar en el problema anterior puede entender perfectamente las **Leyes de De Morgan** que nos dicen:

1a. La **negación** de una conjunción, es la **disyunción de las negaciones.**
2a. La **negación** de una disyunción, es la **conjunción de las negaciones.**

En otras palabras para negar una conjunción cambiamos el conectivo lógico "y" por un "o" y negamos las proposiciones componentes; para negar una disyunción cambiamos el conectivo "o" por un "y", negando las proposiciones componentes.

Ejemplos:

a) $\frac{a}{b} = c \text{ y } b \neq 0$ Negación: $\frac{a}{b} \neq c \text{ o } b = 0$

b) $ab \neq ac \text{ o } a = 0$ Negación: $ab = ac \text{ y } a \neq 0$

Cuantificadores

Hemos considerado un tipo de proposiciones simples en las que se menciona la cantidad de sujetos que intervienen, como por ejemplo "**Todos** los múltiplos de 6 **son** números pares", al decir **todos** estamos cuantificando, es decir, hablamos de cantidad de múltiplos en este ejemplo. Para graficar una proposición de este tipo usamos el lenguaje de conjuntos diciendo que el conjunto de sujetos **es un subconjunto** del conjunto que forma el predicado. Ejemplo: "El conjunto de **todos** los múltiplos de 6 **es un subconjunto** del conjunto de los números pares".

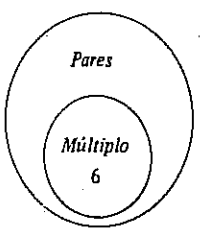


Diagrama de universal afirmativo

¿Cómo consideraría el cuantificador **ninguno**?
Dibuje la gráfica de la siguiente proposición: "Ningún múltiplo de 6 es número par".

La gráfica de la proposición nos sugiere la modificación de la proposición, diciendo "**Todos** los múltiplos de 6 **no son** números pares", que en

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

el lenguaje de conjuntos quedaría como "El conjunto de todos los múltiplos de 6 **es disjunto** del conjunto de números pares".

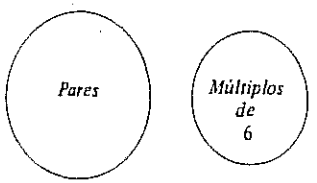


Diagrama de universal negativo

La gráfica se muestra en seguida para que compruebe su resultado.
Por lo anterior podemos decir que "ninguno" es equivalente a: "todos . . .no. . .".

Todos y **ninguno** son entonces cuantificadores que consideran la totalidad de los sujetos, y los llamamos cuantificadores **universales,** sólo que el primero es afirmativo y el segundo es negativo.

La negación de este tipo de proposiciones simples es un caso particular y muy frecuente en Matemática, razón por la que lo consideramos separadamente. La negación de "A **es subconjunto** de B" sería "A **no es subconjunto** de B", que de acuerdo con la definición de subconjunto, "aquel cuyos elementos (todos) lo son también del otro conjunto", se puede escribir o interpretar como "por lo menos un elemento de A no es elemento de B". Estas proposiciones en las que no se consideran la totalidad de los sujetos emplean cuantificadores llamados **particular** o **existencial.** Ejemplo: Escriba la negación y dibuje la gráfica de "Todos los hombres son mortales". La proposición se podría modificar: "el conjunto de todos los hombres es subconjunto del conjunto de los mortales" y la negación será decir que no es subconjunto, lo cual escribimos como "Por lo menos un hombre no es mortal". Su diagrama de Venn se presenta a la izquierda.

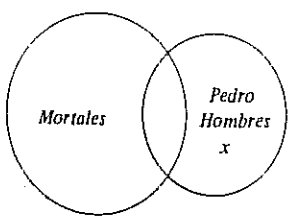


Diagrama de particular negativa

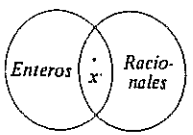


Diagrama de particular afirmativa

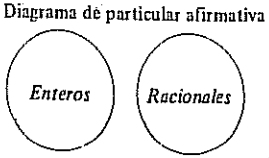


Diagrama de universal negativa

Al negar la **proposición universal afirmativa** hemos obtenido una proposición **particular negativa,** (por lo menos uno. . .no es. . .) el cuantificador particular lo encontramos también como, **algunos** o **algún.** ¿La negación de la proposición **particular negativa,** cuál sería? Y la de la **universal negativa?** Otro ejemplo de la negación, negar "Por lo menos un número entero es racional". Esta es una **proposición particular afirmativa** y modificándola al lenguaje de conjuntos sería, "el conjunto de números enteros **no es disjunto** del conjunto de números racionales" y su diagrama está a la izquierda. La negación sería decir que es disjunto, y en el lenguaje común es "Ningún número entero es racional" cuyo diagrama se dibuja en la página anterior y que corresponde al universal negativo.

El valor de verdad de la negación de una proposición es verdadero si la proposición es falsa, y **viceversa,** esto se aplica a las proposiciones con

los cuantificadores universal o particular, pues son proposiciones simples. ¿Podría escribir unas reglas para la negación de las proposiciones con cuantificadores?

Complete la lista con las tres reglas que faltan.

1. La negación de la universal afirmativa es la particular negativa.
2. La negación de la universal negativa es la_____.
3. La negación de la particular afirmativa es la_____.
4. La negación de la particular negativa es la_____.

Estas reglas nos muestran a nosotros que la negación, tanto en la Lógica como en la Matemática, es la contradicción máxima ya que aparte de negar lo que se afirma, o sea cambiar la calidad de la proposición, también se cambia la cantidad, si es universal, a particular y si es particular a universal.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

PROBLEMAS DE AUTOEVALUACION II-7

En los siguientes problemas escriba la negación de las proposiciones que sean simples y dé su valor de verdad. Dibuje el diagrama de Venn sombreando la negación en las que sean proposiciones abiertas.

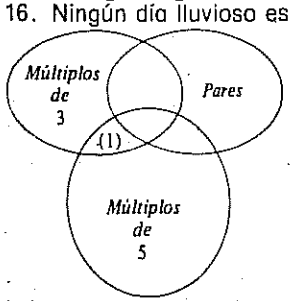
1. 11 es un número primo.
2. $x + 3 = 10; x \in N$
3. $6 < 8$
4. No es verdad que $3 < 5$
5. x es un múltiplo de 3; $x \in N$
6. Hoy es sábado; hoy es un día de la semana.

En los problemas del 7 al 10, dibuje los diagramas de Venn y sombree el conjunto solución para la negación. Aplique las leyes de DeMorgan para escribir dicha negación.

7. "x es par o $x > 5; x \in N$"
8. "Hoy es martes y es un día lluvioso", Hoy $\in$ Conjunto de todos los días
9. "$x > 3$ y $x < 10; x \in N$"
10. "$2x = 6$ o $x \neq 0; x \in N$"

En los siguientes problemas escriba la negación y dibuje el diagrama de Venn. Observe el cumplimiento de las reglas de negación para las proposiciones con cuantificadores.

11. El conjunto de números primos no es subconjunto del conjunto de números impares. U = conjunto de números racionales.
12. Todos los números naturales son enteros. U = racionales.
13. Las rectas paralelas no se cortan. U = conjunto de todas las rectas.
14. Por lo menos un número entero no es racional. U = conjunto de números reales.
15. Algunos triángulos equiláteros no son isósceles. U = conjunto de todas las figuras geométricas.
16. Ningún día lluvioso es claro. U = conjunto de todos los días.



En el diagrama de la izquierda tenemos tres conjuntos solución de tres proposiciones a, b, c, que son: A = conjunto de múltiplos de 3; B = conjunto de números pares, y C = conjunto de múltiplos de 5, respectivamente. En un dibujo igual al mostrado escriba el número de la proposición en el área adecuada para que la proposición sea verdadera.

Ejemplo: 1) Es falso que 45 no sea múltiplo de 3 o no sea múltiplo de 5. Usando Leyes de DeMorgan la proposición queda: 45 es múltiplo de 3 y es múltiplo de 5.

17. 2) 40 es múltiplo de 5 y es número par, pero no es múltiplo de 3.
18. 3) 30 es número par y múltiplo de 3 y también múltiplo de 5.
19. 4) 28 no es múltiplo de 5 ni de tres, pero es par.
20. 5) 45 es múltiplo de 3 y 5, y es número impar.
21. 6) es falso que 121 es múltiplo de 3 o múltiplo de 5 o número par.

Módulo 8

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará la suposición o hipótesis de la implicación y la conclusión de ella.
2. Determinará el valor de verdad de una implicación conociendo el valor de verdad o conjunto de verdad de su hipótesis y el de su conclusión.
3. Identificará las proposiciones equivalentes mediante sus conjuntos de verdad.
4. Graficará, mediante diagramas de Venn, el conjunto de verdad de una implicación.
5. Expresará en diferentes formas una implicación.
6. Obtendrá la conversa de una implicación y determinará su valor de verdad.
7. Hará una lista de formas diferentes de expresar una doble implicación.
8. Graficará el conjunto de verdad de una proposición bicondicional (doble implicación).
9. Determinará el valor de verdad de la contrapositiva, la inversa de una implicación.
10. Distinguirá las partes de un silogismo.
11. Graficará utilizando diagramas de Venn, un silogismo válido.
12. Expresará con sus propias palabras lo que es inferencia lógica.
13. Aplicará en casos sencillos las reglas de inferencias más usuales.
14. Diferenciará entre pensamiento cotidiano y el pensamiento matemático.

ESQUEMA RESUMEN

Implicación.

- Estructura y significado de la implicación.
- El conectivo lógico "si... entonces..."
- Formas de expresar una implicación.
- Notación.
- Valor de verdad.

Equivalencia lógica.

- Proposiciones equivalentes.
- Valor de verdad.
- Representación gráfica.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Variantes de la implicación.

Proposición conversa.
Conjunto de verdad.
Doble implicación.
Conjunto de verdad.
Contrapositiva de una proposición.
Representación gráfica y valor de verdad.

Silogismo.

Estructura de un silogismo.
Reglas de la inferencia.
Representación gráfica, utilizando diagramas de Venn, para mostrar la validez de un silogismo.

Demostraciones a problemas.

Implicación. Equivalencia lógica

Cuando asociamos dos proposiciones utilizando el conectivo lógico "si... entonces...", formamos la proposición compuesta más importante en la Matemática. Esta proposición compuesta se llama **Implicación** y se considera formada en dos partes: la **primera** es la proposición que se precede por la partícula "si" y la llamaremos **suposición o hipótesis de la implicación,** la segunda parte está constituida por la otra proposición precedida por la palabra "entonces" y la llamaremos la **conclusión de la implicación.**

Hay muchos modos diferentes de expresar una **implicación** y en algunos de ellos no aparece el conectivo lógico "si... entonces" razón por la que se debe desarrollar habilidad para expresar tales implicaciones en la forma en que se expresa el conectivo; en seguida se ven algunas de las formas más frecuentes, entre las que se incluye el símbolo o notación aceptado en la mayoría de los textos; considerando que "p" representa la suposición y "q" la conclusión, tendríamos:

si p entonces q.

$p \Longrightarrow q$. (La forma simbólica que se lee como "si p entonces q").

p sólo si q.

p implica q.

q si p. (Esta forma es frecuente y debemos observar que la **hipótesis** y la **conclusión** aparecen en orden invertido, razón de frecuentes errores).

Veamos algunos ejemplos en donde se cambia a la forma tradicional, si p entonces q.

a) "$x > 5$ **implica** $x > 4$".
"si $x > 5$ entonces $x > 4$".

b) "$x = 1$ **si** $3x - 1 = 2x$" (Esta es la forma q si p)
"si $3x - 1 = 2x$ entonces $x = 1$".

c) "Dos círculos con radios iguales tienen áreas iguales".
"Si dos círculos tienen radios iguales entonces tienen áreas iguales".

d) "Todos los ángulos rectos tienen la misma medida".
"Si los ángulos son rectos entonces tienen la misma medida"

El último ejemplo nos da una forma de proposición con cuantificado-

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

res; sabemos que ese tipo de proposiciones son simples y se les puede asignar un valor de verdad de inmediato, lo que nos sugiere la idea de considerar a las implicaciones como otra forma especial de las proposiciones simples, sólo que su **hipótesis** y su **conclusión** pueden ser proposiciones abiertas. Analicemos otro ejemplo: "Si **x** es múltiplo de 2, entonces es un número par; $x \in N$"; en el lenguaje de conjuntos quedaría como "**x** es elemento del conjunto de múltiplos de 2, y **x** es elemento del conjunto de números pares"; esto, como se puede observar, es una conjunción, por lo que **x** pertenece a ambos conjuntos, lo que significa que el conjunto de **todos** los múltiplos de 2 **es un subconjunto** del conjunto de números pares; es decir que "**si** al pertenecer al primer conjunto **entonces** pertenece al segundo", el primer conjunto debe necesariamente estar contenido en el segundo, y como ya vimos antes, decir "A es un subconjunto de B" es una proposición simple y su valor de verdad se puede expresar de inmediato.

De acuerdo con lo anterior, podemos decir entonces que el valor de verdad de una **implicación** puede darse de inmediato, y sólo es verdadera si el conjunto de verdad de su **hipótesis** es subconjunto del conjunto de verdad de su **conclusión;** de otro modo la implicación será falsa. También podemos observar de lo anterior que las siguientes proposiciones son **formas** diferentes de decir **una misma cosa.**

Todos los ángulos rectos **son** de la misma medida.

Si los ángulos son rectos **entonces** tienen la misma medida.

El conjunto de ángulos rectos **es un subconjunto** del conjunto de ángulos con la misma medida.

Tenemos entonces tres proposiciones que por decir lo mismo tienen el **mismo valor de verdad** o el **mismo conjunto de verdad.**

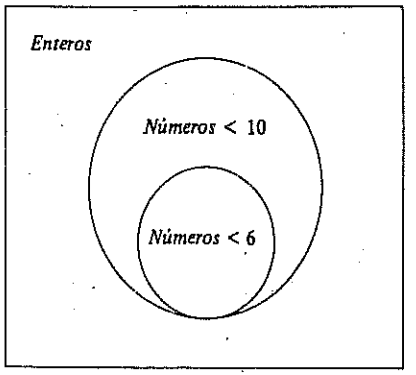
> Las proposiciones que tienen el **mismo valor de verdad** o el **mismo conjunto de verdad** las llamamos **proposiciones equivalentes.**

Una proposición universal afirmativa es entonces lógicamente **equivalente** a una implicación.

Ejemplos:

a) "Si $x < 6$, entonces $x < 10$, $x \in$ conjunto de números enteros". Para determinar su valor de verdad recurrimos al lenguaje de conjuntos y sus diagramas. La proposición **equivalente** sería "El conjunto de números enteros menores que 6 **es subconjunto** del conjunto de números enteros menores que 10". U = Conjunto de números enteros.

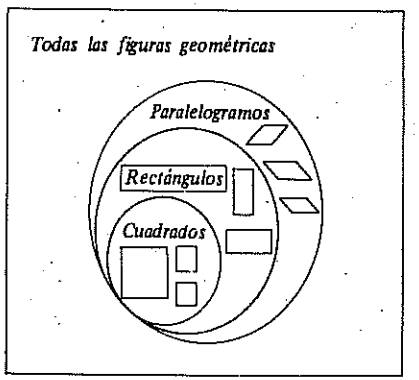
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A \subseteq B$



Gráfica de **Implicación Verdadera**

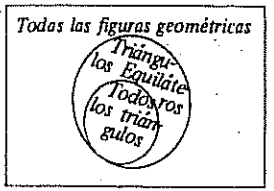
Compare esta gráfica con la del universal afirmativa

b) "Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo". Conjunto de cuadrados es subconjunto del conjunto de paralelogramos, conjunto de reemplazamiento el conjunto de todas las figuras geométricas. Se cumple lo que se afirma, por lo que la implicación es verdadera.



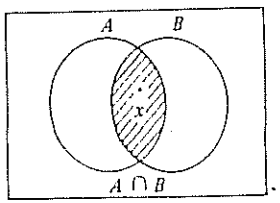
Gráfica de Implicación Verdadera

c) "Si una figura es un triángulo, entonces es un triángulo equilátero". El conjunto de todos los triángulos es un subconjunto del conjunto de triángulos equiláteros. Conjunto de reemplazamiento el conjunto de todas las figuras geométricas. Podemos ver en la figura que esta última afirmación no se cumple por lo que la implicación es falsa.



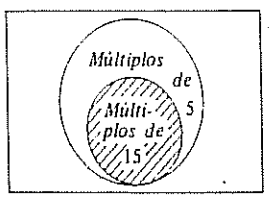
Gráfica de la implicación

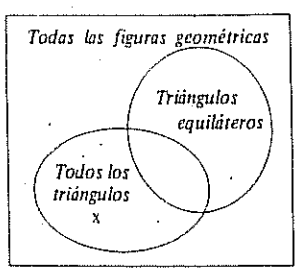
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com



d) "Si x es un elemento de A ∩ B, entonces x es un elemento de B". Esta proposición ya está en el lenguaje de conjuntos, y en el diagrama de Venn se muestra que el conjunto A ∩ B es un subconjunto del conjunto B, luego la implicación es verdadera.

e) "Todos los múltiplos de 15 son múltiplos de 5". Como se había hecho notar, las proposiciones con cuantificadores son una de las formas de decir que un conjunto es subconjunto de otro, al igual que las implicaciones, por lo que puede escribirse la proposición lógicamente equivalente "Si un número es múltiplo de 15, entonces es un múltiplo de 5", o en lenguaje de conjuntos, "El conjunto de múltiplos de 15 es un subconjunto del conjunto de múltiplos de 5". La implicación es verdadera como se muestra en la figura.





x representa un triángulo Isósceles

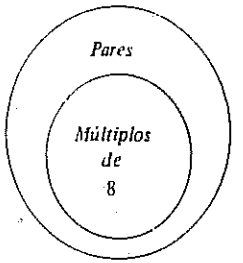
Para comprobar la validez de nuestra afirmación, usamos lo que se llama un "contra-ejemplo"; es decir, un ejemplo que no cumpla la implicación, es decir, en este caso una figura que siendo triángulo no sea equilátero. "Triángulo isósceles" es elemento de la **suposición o hipótesis,** pero no es elemento de la conclusión y su figura se muestra a la izquierda. El conjunto de la **hipótesis no es subconjunto** de la **conclusión** y la implicación es falsa.

Variantes de la implicación

La implicación da lugar al mayor problema en la búsqueda de la verdad, no solamente por el hecho de que existen tantas y tan diferentes formas de enunciar una implicación, pues aun usando el conectivo lógico "si ... entonces ...", pequeños cambios en las proposiciones o en el orden en que se dicen, cambian el valor de verdad de la implicación.

Si cambiamos el orden de las proposiciones dejando en su lugar al conectivo, formamos una variante de la implicación, a la que llamamos **Conversa** o recíproca de la implicación. Ejemplo: Cambiemos el orden de las proposiciones de la siguiente implicación "si un número entero es

múltiplo de 8, entonces es número par". "Si un número entero es par, entonces es múltiplo de 8".



Considerando el diagrama de Venn para la implicación dada, podemos apreciar que es verdadera, ya que el conjunto de múltiplos de 8 es subconjunto del de números pares, pero no sucede lo mismo con las proposiciones invertidas, por lo que la conversa es falsa. Contra-ejemplo: el 4 es par pero no es múltiplo de 8. Por lo anterior podemos concluir lo siguiente: "Aun cuando una **implicación** sea verdadera su **conversa** puede no serlo". En otras palabras, de la verdad de una implicación no se puede concluir la verdad de la conversa de la implicación. Sin embargo, puede darse el caso de que la conversa también sea verdadera. Ejemplo. "Si todos los ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es equilátero"; su proposición conversa "Si un triángulo es equilátero, entonces todos sus ángulos son iguales" Ambas proposiciones son verdaderas, es decir, el conjunto de triángulos con sus ángulos iguales es subconjunto del de triángulos equiláteros, y viceversa; por lo tanto, se trata de conjuntos iguales, y se dice que las proposiciones representan esencialmente lo mismo. Estas proposiciones cuyo **conjunto de verdad** o **valor de verdad** es el mismo, ya vimos que son proposiciones **equivalentes;** cuando se trata de una implicación y su conversa se pueden combinar en una proposición más compleja usando el conectivo "y", con lo que se forma una **doble implicación,** cuyo símbolo es la flecha con doble punta. Ejemplo:

"Si $7 - 2 = 5$, entonces $5 + 2 = 7$". Simbolizada esta **implicación** quedaría: "$(7 - 2 = 5) \Longrightarrow (5 + 2 = 7)$". La proposición **conversa** sería "$(5 + 2 = 7) \Longrightarrow (7 - 2 = 5)$". Con nuestros conocimientos de esos números podemos comprobar que ambas proposiciones son Verdaderas y combinadas en una doble implicación quedan, "$(7 - 2 = 5) \Longleftrightarrow (5 + 2 = 7)$" que se lee "$7 - 2 = 5$ **si y sólo si** $5 + 2 = 7$". Siendo su conjunto de verdad el mismo, **ambas son verdaderas** o **ambas son falsas,** demostrando una, se demuestra también a la otra. Veamos otro ejemplo.

"Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de su lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de sus otros dos lados".

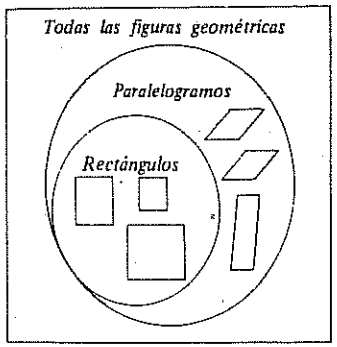
Conversa: "Si el cuadrado del lado mayor de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo".

Combinadas en una proposición conjuntiva las dos implicaciones anteriores dirían "Un triángulo es rectángulo, **si y sólo si** el cuadrado de su lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados". (Teorema de Pitágoras).

Cuando enunciamos una implicación estamos diciendo que un determinado conjunto es subconjunto de otro. Existe una modificación al introducir la negación en las proposiciones componentes que no cambia el valor de verdad de la implicación dada, nos da una **proposición equivalente** y la llamamos la **Contrapositiva** de la implicación, esta variante es muy útil en las demostraciones.

Veamos con un ejemplo el valor de verdad de una **implicación** y de su **contrapositiva.** "Si una figura geométrica es un rectángulo, entonces es

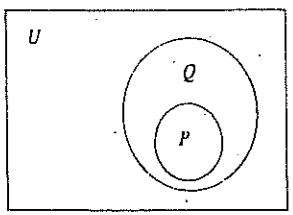
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com



un paralelogramo. "En lenguaje de conjuntos diríamos: "Si una figura geométrica es elemento del conjunto de rectángulos, entonces es elemento del conjunto de paralelogramos"; en seguida se muestra el diagrama de Venn donde se ve que la implicación es verdadera.

Formemos la contrapositiva de la implicación para lo cual formamos primero la conversa y luego negamos las proposiciones, quedándonos "Si una figura geométrica **no** es un paralelogramo, entonces **no** es un rectángulo". Haga un diagrama de Venn para esta última proposición y demuestre que son equivalentes.

Consideremos dos proposiciones "p" y "q" formando una implicación, y llamemos P y Q a sus conjuntos de verdad respectivamente; tomando la implicación como verdadera repasemos la implicación y sus variantes utilizando sólo símbolos. El símbolo "~" antes de una proposición indica su negación.



Implicación: $p \Longrightarrow q$ es verdadera siempre que como se muestra en el diagrama de Venn, $P \subseteq Q$.

Conversa: $q \Longrightarrow p$ su valor de verdad no se deduce del valor de verdad de la implicación.

Doble implicación: $p \Longleftrightarrow q$ es verdadera siempre que $P = Q$ ya que se formó con la conjunción de una implicación y su conversa $(p \Longrightarrow q)$ y $(q \Longrightarrow p)$.

Contrapositiva: $\sim q \Longrightarrow \sim p$ es una proposición equivalente a la implicación por lo cual tiene el mismo valor de verdad $P \subseteq Q$ **equivalente** a $Q' \subseteq P'$.

Inversa: $\sim p \Longrightarrow \sim q$ esta proposición es equivalente de la conversa, razón por la que no es muy frecuente su aplicación.

Silogismos. Demostraciones

En cualquier sistema matemático los **postulados** y las **definiciones** son las bases para las demostraciones. En álgebra se hacen ciertas suposiciones acerca de las propiedades de la igualdad, de la desigualdad y del conjunto de los números reales; estas suposiciones se aceptan como verdaderas y forman los **postulados** con los que se construye un conjunto de conclusiones acerca de los números para formar el sistema matemático, utilizando para ello el razonamiento deductivo. Las conclusiones o deducciones se expresan generalmente en la forma de implicaciones usando el "si . . .entonces. . .", y sus enunciados constituyen lo que conocemos comúnmente con el nombre de **Teoremas,** los que una vez demostrados, sirven también

junto con los postulados y definiciones, como bases para nuevas construcciones y nuevas demostraciones. Los teoremas son generalmente expresados en la forma "si . . .entonces. . ." por lo que la implicación es una parte importante en el proceso de razonamiento deductivo.

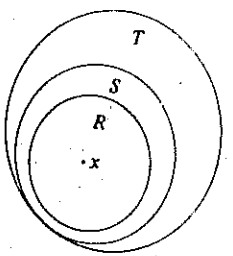
La hipótesis la constituimos con postulados o definiciones, y las relaciones lógicamente válidas que establecemos entre diferentes proposiciones simples o compuestas, nos llevan a admitir la validez de la conclusión al aceptar la hipótesis; esto es lo que constituye una demostración. Estas relaciones también llamadas argumentación, toman el nombre de **Reglas de Inferencia o Silogismos,** según su estructura.

Las reglas de inferencia son argumentaciones válidas en la forma de implicaciones y existen infinidad de ellas, por lo que sólo mencionaremos una de las de más frecuente aplicación, conocida como la Regla de la Cadena.

Ejemplo: Tómense dos implicaciones.

a) Si **x** es elemento del conjunto R, entonces **x** es elemento del conjunto S. Simbólicamente $(r \Longrightarrow s)$.
b) Si **x** es elemento del conjunto S. entonces **x** es elemento del conjunto T. Simbólicamente $(s \Longrightarrow t)$.

En la primera implicación decimos que $R \subset S$, y en la segunda que $S \subset T$, por lo tanto cualquier elemento de R lo es también de S, y por lo tanto también de T. En el lenguaje de conjuntos la conclusión que obtendríamos con las dos implicaciones verdaderas sería "Si **x** es elemento de R, entonces **x** es elemento de T" $(r \Longrightarrow t)$. Esta sería una conclusión válida como se puede ver en el diagrama de Venn que se presenta a la izquierda.



Regla de la cadena en símbolos:

$$\left\{\begin{matrix}(r \Longrightarrow s) \text{ y } (s \Longrightarrow t)\\ \text{hipótesis}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix}(r \Longrightarrow t)\\ \text{conclusión}\end{matrix}\right\}$$

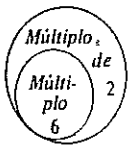
El silogismo es la otra unidad básica en las demostraciones, se forma con tres proposiciones. La primera, llamada **Premisa mayor** es una **implicación** aceptada como verdadera. La segunda, llamada **Premisa menor**, es una proposición también aceptada como verdadera y nos dice en un término, algo que es elemento del conjunto que se menciona en la hipótesis de la **premisa mayor;** a éste se le llama **término medio** porque interviene en ambas premisas o proposiciones pero nunca aparece en la **conclusión del silogismo.** La tercera proposición o conclusión se forma **suprimiendo** el término medio, conjunto que aparece en ambas premisas y tomando el término de la **premisa menor** como elemento del conjunto de la **premisa mayor.**

Silogismo simbolizado

$p \Longrightarrow q$ Premisa mayor $P \subset Q$
$x \in p$ Premisa menor P es el término medio.
$\overline{x \in Q}$ Conclusión.

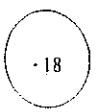
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

El diagrama de Venn para un silogismo válido o correcto presenta la gráfica de dos conjuntos, el de la hipótesis P y el de la conclusión Q, el primero siempre es subconjunto del segundo ($P \subset Q$); presenta también al elemento **x** del término medio el que por estar contenido en P forzosamente estará contenido en Q. **Ejemplo:**



Premisa Mayor: Si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 2.

{múltiplos de 6} $\subset$ {múltiplos de 2}



Premisa Menor: 18 es múltiplo de 6
$18 \in$ {múltiplos de 6}

Conclusión: 18 es múltiplo de 2
$18 \in$ {múltiplos de 2}

El silogismo anterior está simbolizado usando el lenguaje de conjuntos. Otra forma es la siguiente:

Premisa Mayor: Si **x** es elemento del conjunto de múltiplos de 6, entonces **x** es elemento del conjunto de múltiplos de 2.
Premisa Menor: 18 es elemento del conjunto de múltiplos de 6.
Conclusión: 18 es elemento del conjunto de múltiplos de 2.

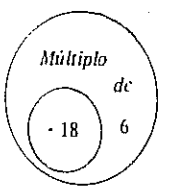


Diagrama del silogismo

Tanto en las reglas de inferencia como en los silogismos la **validez** no depende del valor de verdad de las proposiciones componentes, sino de la **forma** en que se emplean, pues si no se siguen las reglas de la lógica, la conclusión no será una **deducción** de las premisas; y del razonamiento o argumentación se dice que **no tiene validez** o que es **falaz.**

Lo anterior significa que la conclusión puede ser verdadera o falsa, pero su valor de verdad depende de una información diferente o adicional a la que proporcionan las premisas.

Ejemplos:

a)

Premisas { Si un animal es un oso entonces le gusta la miel
A mi animal preferido le gusta la miel

Conclusión:_____

Este silogismo es **inválido** independientemente de que la conclusión pueda ser verdadera o falsa porque de lo que se afirma en las premisas no se puede obtener una conclusión, ya que no se afirma que sólo a los osos les guste la miel por lo que mi animal preferido pudiera ser un oso o pudiera no serlo.

b)

Premisas { Si un número es múltiplo de 4 entonces es divisible entre dos
El número 14 es divisible entre dos

Conclusión: El número 14 es múltiplo de 4.

La conclusión es notoriamente falsa, el silogismo es **inválido** pues no siguió las reglas de la lógica.

c)

Premisas { Si un número es múltiplo de 4 entonces es divisible entre dos
El número 16 es divisible entre 2

Conclusión: El número 16 es múltiplo de 4

Ahora la conclusión es verdadera, pero el silogismo sigue siendo **inválido,** el valor de verdad de la conclusión lo obtengo de conocimientos de las relaciones entre los números, **diferentes** de los que se proponen en las premisas. La conclusión entonces **no se deduce** de las premisas.

En las demostraciones se utilizan uno o varios silogismos, principiando con los hechos enunciados o dados por el problema, o por hechos ya conocidos, como los postulados, hasta llegar a nuevos hechos o conclusiones, **siempre** usando el razonamiento deductivo. La demostración matemática exige apoyar con una o varias razones cada afirmación que se haga, esta razón puede ser un postulado, una definición o la conclusión de un teorema que ya fue demostrado.

> Para este tipo de demostraciones utilizaremos dos columnas, una para los hechos dados en el problema y las afirmaciones que iremos deduciendo hasta llegar a la conclusión que se quiere demostrar, y la otra columna en donde daremos las razones de cada afirmación que se haga.

Ejemplo: Supongamos que ya conocemos que los siguientes hechos son verdaderos; "Si un número es múltiplo de 9 y también de 5, entonces es múltiplo de 45". "Si la suma de los dígitos que forman un número es múltiplo de 9, entonces el número es múltiplo de 9". "Si un número termina en 0 o en 5, entonces es múltiplo de 5".

Pruebe que 33,210 es múltiplo de 45.

Proposiciones	Razones
33,210 es múltiplo de 5	(Si un número termina en 0) $\Longrightarrow$ (es múltiplo de 5).
$3 + 3 + 2 + 1 + 0 = 9$	Hechos de la suma.
33,210 es múltiplo de 9	(Si la suma de los dígitos de un número es múltiplo de 9) $\Longrightarrow$ (el número es múltiplo de 9).
Conclusión:	
33,210 es múltiplo de 45	(Si un número es múltiplo de 9 y también de 5 entonces es múltiplo de 45).

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

En la demostración anterior hemos utilizado tres silogismos durante nuestros razonamientos, sólo que por razones prácticas no los escribimos en la forma como los definimos y que a continuación se presenta, y en su lugar utilizamos las dos columnas, omitiendo la premisa menor que generalmente es evidente.

Premisa Mayor: (La razón que justifica nuestra afirmación). Si un número termina en 0 o en 5, entonces es múltiplo de 5.
Premisa Menor: **(Omitida)** 33,210 termina en 0.
Conclusión: (Nuestra afirmación) 33,210 es múltiplo de 5.

Premisa Mayor: Si la suma de dígitos que forman un número es múltiplo de 9, entonces el número es múltiplo de 9.
Premisa Menor: Los dígitos que forman el número 33,210 suman un múltiplo de 9. **(No omitida).**
Conclusión: 33,210 es múltiplo de 9.

Premisa Mayor: Si un número es múltiplo de 9 y también de 5, entonces es múltiplo de 45.
Premisa Menor: 33,210 es múltiplo de 9 y de 5.
Conclusión: 33,210 es múltiplo de 45.

Con el ejemplo anterior, se ve lo práctico que resulta el uso de las dos columnas en las demostraciones, por lo que a lo largo de este curso continuará empleándose. La premisa menor se omite para simplicidad ya que generalmente es una información dada o conseguida en el mismo problema.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION II-8

En los siguientes problemas diga cuál es la suposición y cuál es la conclusión, y reescriba la proposición usando la forma "si... entonces...", si corresponde.

1. Si llueve, entonces se pospondrá el juego.
2. Un número entero es múltiplo de 8 sólo si es par.
3. Para toda $x > 0$, $x > \frac{1}{x}$, $x \in N$.
4. Que x sea múltiplo de 9 implica que sea múltiplo de 3; $x \in N$.
5. El equipo gana si Pablo juega.
6. Si se acepta como verdadera la proposición "si $a = 5$, entonces $a^2 = 25$".
   ¿Cuál de las cuatro proposiciones siguientes es una deducción correcta?
   a) Si $a^2 = 25$, entonces $a = 5$
   b) Si $a \neq 5$, entonces $a^2 \neq 25$
   c) Si $a^2 \neq 25$, entonces $a \neq 5$
   d) $a^2 = 25$, sólo si $a = 5$
7. En los problemas que siguen dibuje el diagrama de Venn después de reescribir la proposición en lenguaje de conjuntos, de modo que se vea que la implicación es verdadera.
   a) "Si un número es divisible entre 6, entonces es número par".
   b) "Si $x < 10$, entonces $x < 15$; $x \in N$".
8. Usando las dos proposiciones que se dan, forme una implicación verdadera.
   a $x^2 = 4$; $x = 2$.
   b) Triángulo isósceles; triángulo equilátero.
9. Reescriba las siguientes implicaciones usando el lenguaje de conjuntos. Use diagramas de Venn para demostrar si la implicación es o no verdadera.
   a) Si un número es divisible entre 4, entonces es un número par.
   b) Si x es un número entero que no es menor que 10, entonces no es menor que 6.
10. Cambie la proposición universal verdadera que se da, por su equivalente lógica, una implicación en donde use primero el conectivo lógico "si ...entonces..." y luego escríbala usando "sólo si" para observar la impresión que se produce en el valor de verdad que no se ha cambiado.
    a) Todos los días lluviosos son nublados.
    b) Todos los múltiplos de 6 son múltiplos de 3.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Considerando a-n $>$ 5 como "p" y a n $=$ 4 como "q", escriba las siguientes implicaciones en la forma "si ...entonces...", recuerde que el símbolo $\sim$ representa la negación y también que n $\in$ R.

11. $p \Longrightarrow q$ 12. $q \Longrightarrow \sim p$ 13. $q \Longrightarrow p$

14. $\sim q \Longrightarrow \sim p$ 15. $\sim p \Longrightarrow \sim q$ 16. $\sim p \Longrightarrow q$

Diga qué variante de la implicación representan los símbolos.

17. $q \Longrightarrow p$

18. $\sim q \Longrightarrow \sim p$

19. $\sim p \Longrightarrow \sim q$

20. Utilice los diagramas de Venn para determinar el valor de verdad en los ejercicios del 11 al 16.

21. ¿Cuál de las proposiciones siguientes es equivalente a "si r, entonces s"?
    a) r, sólo si s b) s, sólo si r c) r, si sólo si s

22. Complete las siguientes oraciones de modo que el significado no cambie y que el valor de verdad sea Verdadero.
    a) Dado $r \Longrightarrow s$; _____ sólo si _____
    b) Dado $p \Longrightarrow q$; _____ si _____
    c) Cuando $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$ son implicaciones verdaderas, a "p" y "q" se les llama proposiciones. _____

En los problemas del 23 al 28, compruebe si los silogismos que se dan son o no válidos, explicando por qué. Dibuje un diagrama de Venn para cada problema. Recuerde que no estamos analizando la validez de cada afirmación.

23. Si un número es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5. 20 es múltiplo de 10.
    Por lo tanto, 20 es un múltiplo de 5.

24. Si una ciudad está en Nuevo León, entonces está en América. Monterrey está en América.
    Por lo tanto, Monterrey está en Nuevo León.

25. Si un número es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5. 75 es múltiplo de 5.
    Entonces, 75 es múltiplo de 10.

26. Todo burro tiene orejas.
    Tú tienes orejas.
    Por lo tanto, tú eres un burro.

27. Dos ángulos de un triángulo son iguales, si y sólo si los lados opuestos a esos ángulos son iguales.
    $\triangle ABC$, (léase triángulo ABC) AB $=$ BC
    Entonces, el ángulo C es igual al ángulo A.

28. Todos los ángulos rectos tienen igual medida.
    Los ángulos A y B son rectos.
    Por lo tanto, el ángulo A es igual al ángulo B.

29. Si aceptamos como postulado la siguiente proposición "Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida" ¿Cuáles de las siguientes proposiciones se pueden "deducir" de este postulado y por qué?
    a) Dos ángulos que no tienen la misma medida no pueden ser ángulos opuestos por el vértice.
    b) Algunos ángulos que tienen la misma medida, son ángulos opuestos por el vértice.
    c) Dos ángulos que tienen la misma medida son opuestos por el vértice,
    d) Dos ángulos que no son opuestos por el vértice, no pueden tener la misma medida.

    Escriba una conclusión basada en la información que se da.

30. El Sr. González recibirá un ascenso si termina su preparatoria.
    El Sr. González termina su preparatoria.

31. Todo número par es divisible entre dos, x es un número par.

RESUMEN

Hemos utilizado los términos que se introdujeron en la unidad anterior y han sido una gran ventaja, no sólo por facilitarnos la simbolización de nuestro lenguaje ordinario sino también porque nos han permitido expresarnos de una forma más clara y precisa, evitando así las ambigüedades propias del lenguaje ordinario.

En esta Unidad II definimos nuevos términos para precisar aún más nuestras expresiones e ideas, así como también nuestras argumentaciones o demostraciones, los más importantes son:

Deducción
Valor de verdad
Negación
Cuantificador particular
Equivalencia lógica
Conversa de una implicación
Demostración a dos columnas
Proposición abierta
Disyunción
Silogismo
Proposición simple
Conjunción
Leyes de DeMorgan
Implicación
Cuantificador universal
Doble implicación
Contrapositiva de una implicación

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Paneles de verificación

CONJUNTO DE PROBLEMAS II-5

1. Todos los lunes se lleva a cabo el saludo a la bandera.
2. García obtiene un buen salario.
3. Deducción: al aceptar que es martes.
4. Inducción: se generalizó lo sucedido cinco años consecutivos.
5. Deducción: al aceptar que los cuatro lados iguales midan 4 cm. dedujo la medida de cada lado.
6. Sí; proposición simple, verdadera.
7. No tiene conjunto de reemplazamiento por lo tanto, no es proposición.
8. Sí; proposición abierta {6}.
9. Sí; proposición abierta $\{x \in N \mid x \text{ es par}\}$.
10. "El conjunto de los múltiplos de 6 es subconjunto del de números pares".

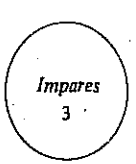
11. "3 es elemento del conjunto de números menores que 5"

CONJUNTO DE PROBLEMAS II-6

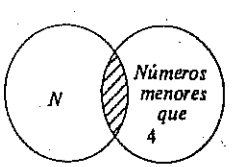
1. El conjunto de múltiplos de 6 es un subconjunto del conjunto de números pares.
2. 3 es un elemento del conjunto de números impares.
3. x es elemento del conjunto de números naturales y del conjunto de números menores que 4.
4. El triángulo T es un elemento del conjunto de triángulos equiláteros.

5.

6.

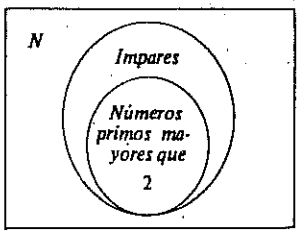


7.

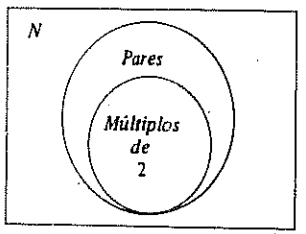


8.

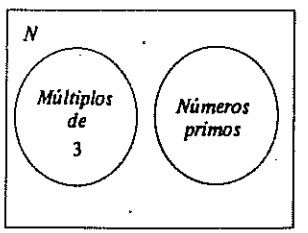
9.



10.



11.



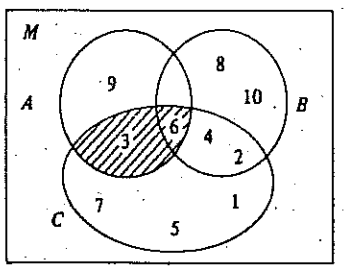
12. **Disyunción**
"$x < 8$" o "x es múltiplo de 3" $x \in M$
Conjunto de verdad
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 6, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

13. **Disyunción**
"x es múltiplo de 3" o "x es número par o es menor que 8", $x \in M$
Conjunto solución
$\{3, 6, 9\} \cup [\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}] =$
$= \{3, 6, 9\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = M$

14. **Primer paso**

"x es múltiplo de 3"	$A = \{3, 6, 9\}$
"x es par"	$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
"x es menor que 8"	$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
	$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Segundo paso.



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

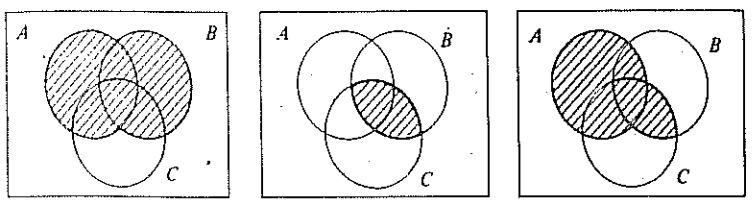
Respuesta "A ∩ C" "x es múltiplo de 3 y es menor que 8"

15. Usando los pasos 1 y 2 del problema anterior buscamos ahora la operación entre los conjuntos que nos dé {2, 3, 4, 6}
Solución
(A ∪ B) ∩ C que corresponde a:
"x es múltiplo de 3 o es par" y "x es menor que 8"

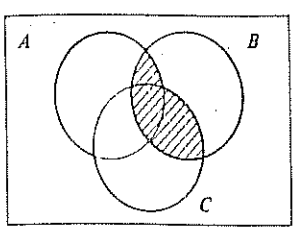
Sean A, B, C no disjuntos

16.

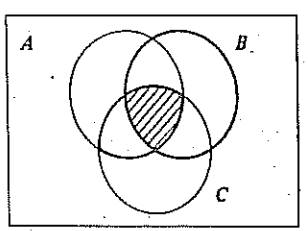
a ó b | b y c | (b y c) ó a



19. b y (c ó a)

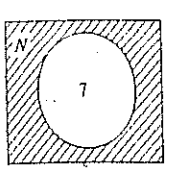


20. b y (c y a)



CONJUNTO DE PROBLEMAS II-7

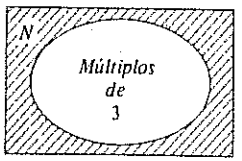
1. Es una proposición **simple.**
Negación. 11 no es un número primo. **Falsa.**



2. Proposición abierta. **Negación.** $x + 3 \neq 10$; $x \in N$.
El área sombreada contiene los elementos que cumplen con la negación.

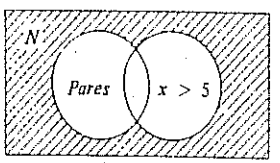
3. Proposición simple
Negación. $6 \not< 8$. **Falsa**

4. Proposición simple
Negación. $3 < 5$. Verdadera

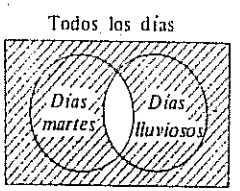


5. Proposición abierta.
Negación. "x no es un múltiplo de 3; $x \in N$"

6. Proposición simple.
Negación. "Hoy no es sábado". Valor de verdad contrario del que tenga la afirmación.

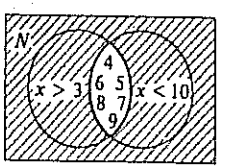


7. **Negación.** 2a. Ley de DeMorgan.

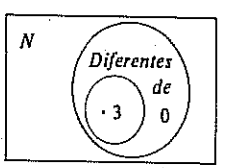


8. **Negación.**
1a. Ley de DeMorgan
"Hoy no es martes o no es un día lluvioso.

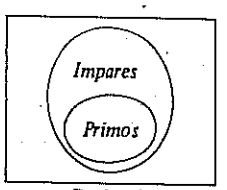
9. **Negación.**
"$x \geqslant 3$ ó $x \not< 10$, $x \in N$"
Esta negación es equivalente a:
"$x \leqslant 3$ ó $x \geqslant 10$, $x \in N$"



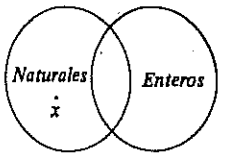
10. **Negación.**
"$2x \neq 6$ y $x = 0$; $x \in N$"



11. El conjunto de números primos es subconjunto del de números impares

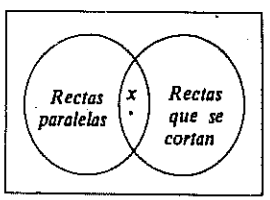


12. Algunos números naturales no son enteros.

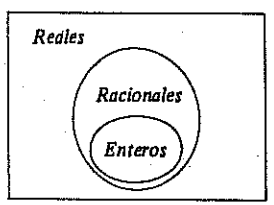


13. En este problema se afirma que las rectas paralelas no se cortan, y aunque no se menciona el cuantificador no se da lugar a excepciones por lo que se considera que se afirma que **todas** las rectas paralelas no se cortan. Este es el lenguaje ordinariamente empleado, por lo que debemos desarrollar capacidad para transformar lo que se nos dice a la forma simbólica que aquí aprendemos a manipular (esta transformación se puede hacer sólo mentalmente) para así **comprender** y **asimilar** el significado o semántica de lo que se nos dice.

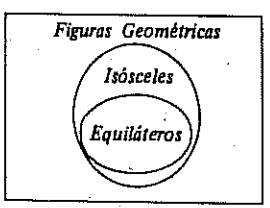
Negación: Algunas rectas paralelas se cortan. Observar que esta forma de simbolizar nos permite eliminar un error frecuente de la negación al tratar de negar la proposición en la forma siguiente:
Las rectas paralelas se cortan.
Forma equivocada y además frecuente.



14. Todos los números enteros son racionales.

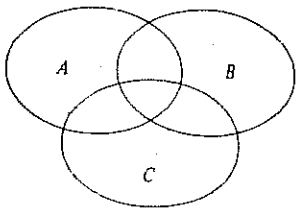


15. Todos los triángulos equiláteros son isósceles.

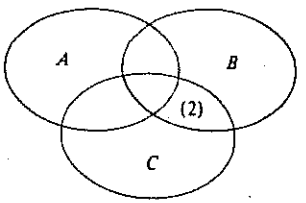


16. Algunos días lluviosos son claros.

A = {múltiplos de 3}
B = {pares}
C = {múltiplos de 5}

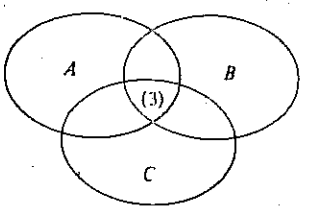


17.

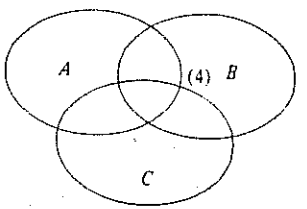


2) 40 es múltiplo de 5 y es par, pero no es múltiplo de 3.

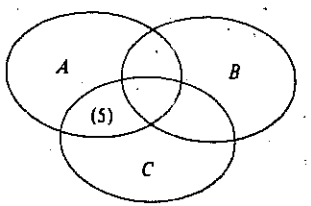
18.



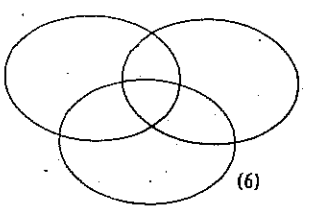
19.



20.



21. Falso que (121 múltiplo de 3 o múltiplo de 5) o par.
Es falso que (121 múltiplo de 3 o múltiplo de 5) y no es par.
(121 no es múltiplo de 3 y no es múltiplo de 5) y no es par.



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

CONJUNTO DE PROBLEMAS II-8

1. **Suposición:** Que llueva.
   Conclusión: Posponer el juego.

2. **Suposición:** Ser número entero múltiplo de 8.
   Conclusión: Ser par.
   Implicación: Si un número entero es múltiplo de 8, entonces es par.

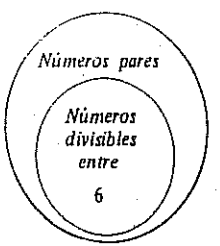
3. **Suposición:** $x > 0$, $x \in N$
   Conclusión: $x > \frac{1}{x}$, $x \in N$
   Implicación: Si $x > 0$, entonces $x > \frac{1}{x}$, $x \in N$

4. **Suposición:** x múltiplo de 9.
   Conclusión: x múltiplo de 3.
   Implicación: si x es múltiplo de 9, entonces es múltiplo de 3; $x \in N$.

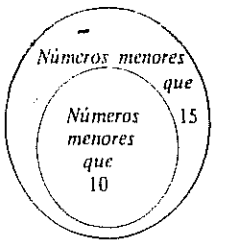
5. **Suposición:** Que Pablo juegue.
   Conclusión: El equipo gana.
   Implicación: Si Pablo juega, entonces el equipo gana.

6. a) $a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$ Incorrecto porque a podría ser -5.
   b) $a \neq 5 \Longrightarrow a^2 \neq 25$ Incorrecto por la misma razón que antes.
   c) Si $a^2 \neq 25$ entonces $a \neq 5$ Correcto porque si no se cumple la conclusión, no se cumple tampoco la hipótesis.
   d) $a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$ Incorrecto es la misma proposición que en inciso a) pero en otra forma.

7. a) Si un número es divisible entre 6, entonces es par.
   El conjunto de números divisibles entre 6 es subconjunto del conjunto de números pares.

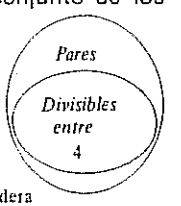


   b) Si $x < 10$, entonces $x < 15$, $x \in N$. El conjunto de números naturales menores que 10 es subconjunto del conjunto de números naturales menores que 15.



8. a) $x^2 = 4$; $x = 2$, $x \in N$. Implicación $x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$.
   b) $\triangle$ isósceles, $\triangle$ equilátero. Implicación. Si un $\triangle$ es equilátero $\Longrightarrow$ es isósceles.

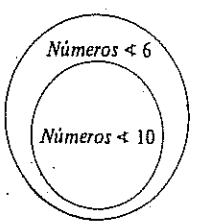
9. a) El conjunto de números divisibles entre 4 es subconjunto de los pares.
   Por definición "Los números divisibles por 4 son múltiplos de 4"
   El 4 es múltiplo de 2
   Por tanto es par
   Todos los múltiplos de 4 son pares



Verdadera

   b) El conjunto de números enteros no menores que 10 es subconjunto del conjunto de números enteros no menores que 6.
A = {Conjunto de números no menores que 10} = {10, 11, 12, 13, 14, . . .}
B = {Conjunto de números no menores que 6} = {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .}.

$A \subset B$



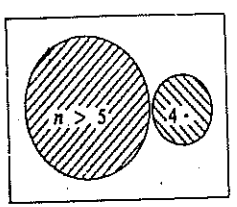
Verdadera

10. a) "**Si** un día es lluvioso **entonces** es nublado".
    b) "Un día es lluvioso **sólo si** es nublado".
    c) "**Si** un número es múltiplo de 6, **entonces** es múltiplo de 3".
    "Un número es múltiplo de 6 **sólo si** es múltiplo de 3".
    Analice detenidamente estas implicaciones y compárelas con las originales. Las tres formas nos dicen exactamente lo mismo, pero no siempre nos damos cuenta, el lenguaje ordinario nos presenta muchas dificultades para encontrar la verdad y esta es una oportunidad de analizar lo que decimos o nos dicen para poder juzgar.
11. Si $n > 5$, entonces $n = 4$ $n \in N$ $(p \Longrightarrow q)$.
12. Si $n = 4$, entonces $n \not> 5$ $n \in N$ $(q \Longrightarrow \sim p)$.
13. Si $n = 4$, entonces $n > 5$ $n \in N$ $(q \Longrightarrow p)$.

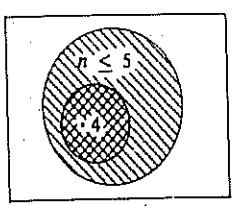
14. Si $n \neq 4$, entonces $n \not> 5$ $n \in N$ $(\sim q \Longrightarrow \sim p)$.
15. Si $n \not> 5$, entonces $n \neq 4$ $n \in N$ $(\sim p \Longrightarrow \sim q)$.
16. Si $n \not> 5$, entonces $n = 4$ $n \in N$ $(\sim p \Longrightarrow q)$.
17. La proposición $q \Longrightarrow p$ es la conversa.
18. La proposición $\sim q \Longrightarrow \sim p$ es la contrapositiva.
19. La proposición $\sim p \Longrightarrow \sim q$ es la inversa.
20. Una proposición equivalente a $n \not> 5$ sería $n \leq 5$; $(n \not> 5 \Leftrightarrow n \leq 5)$ en muchos casos es más conveniente usar el diagrama de una proposición afirmativa en lugar de la proposición negativa como lo haremos en algunos de los problemas que siguen.

Sombrearemos las hipótesis con rayado a la derecha

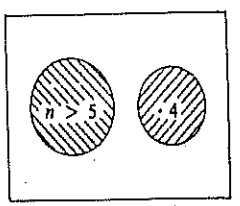
y las conclusiones con rayado a la izquierda



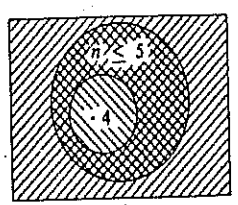
1. Implicación falsa



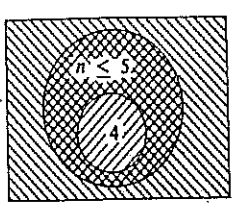
2. Implicación verdadera



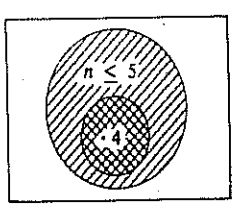
3. Implicación falsa



4. Implicación falsa



5. Implicación falsa



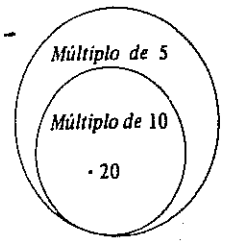
6. Implicación falsa

21. a) r sólo si s, equivale a $r \Longrightarrow s$.

22. a) $r \Longrightarrow s$; **r sólo si s**
    b) $p \Longrightarrow q$; **q si p**
    c) Cuando $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$ son implicaciones verdaderas, a "p" y "q" se les llama proposiciones **equivalentes.**

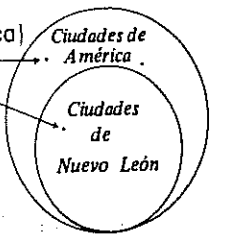
23. **Diagrama del Silogismo**
    {múltiplos de 10} ⊂ {múltiplos de 5}
    $20 \in$ {múltiplos de 10}
    $20 \in$ {múltiplos de 5}

    Razonamiento Válido



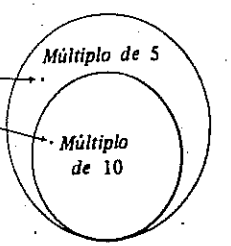
24. {ciudades de Nuevo León} ⊂ {ciudades de América}
    Monterrey $\in$ {ciudades de América} —?
    Monterrey $\in$ {ciudades de Nuevo León}

    Razonamiento Inválido
    Independientemente de que la conclusión sea verdadera.



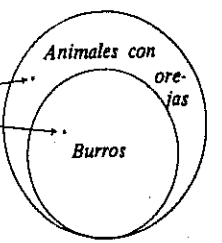
25. {múltiplos de 10} ⊂ {múltiplos de 5}
    $75 \in$ {múltiplos de 5} —?
    $75 \in$ {múltiplos de 10}

    Inválido

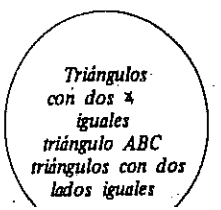


26. "Todo burro tiene orejas" es equivalente a "Si es burro $\Longrightarrow$ tiene orejas" y a {burros} ⊂ {animales con orejas}
    Tú $\in$ {animales con orejas} —?
    Tú $\in$ {burros}

    Inválido



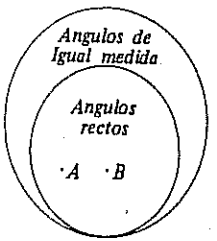
27. {Triángulos con dos ángulos iguales} = {triángulos con dos lados iguales}
    △ ABC $\in$ {triángulos con dos lados iguales}
    △ ABC $\in$ {triángulos con dos ángulos iguales}
    Observación: No se pretende demostrar las premisas, sino que se aceptan como verdaderas, sólo verificamos que la conclusión se derive de o esté contenida en las premisas.



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

28. {ángulos rectos} $\subset$ {ángulos con igual medida}
$\measuredangle A$ y $\measuredangle B \in$ {ángulos rectos}
$\measuredangle A = \measuredangle B$.

Válido



29. a) Esta proposición es equivalente a la proposición dada porque es la contrapositiva.
b) Esta proposición es la particular afirmativa que se puede deducir del Universal afirmativo que nos dan "Todos los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida".
c) Esta proposición es la conversa por lo que no se "deduce" de la implicación.
d) Esta proposición es la conversa equivalente a la conversa del inciso anterior.

30. Cambiamos a la forma si . . .entonces. . . , de modo que identifiquemos sin error la hipótesis y la conclusión.

Premisas { Si termina su preparatoria el Sr. González entonces recibirá un ascenso.
El Sr. González termina su preparatoria.

Conclusión: El Sr. González recibirá un ascenso

31. Si un número es par entonces es divisible entre dos; **x** es número par.

Conclusión: **x** es divisible entre dos.

UNIDAD III

LOS NUMEROS REALES

PreparatoriaabiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

La mayor parte del álgebra elemental está íntimamente ligada al sistema que forman los números reales.

Los elementos de conjuntos y lógica de las dos unidades anteriores nos capacitaron para estudiar la "estructura" del sistema de números reales y comprender las propiedades fundamentales que lo caracterizan como un campo, de manera que sin prescindir de las habilidades desarrolladas en aritmética las generalicemos y las perfeccionemos comprendiendo que siempre son válidas por "una razón", es decir que no solamente simbolizamos y aprendemos ciertas técnicas sino que además justificamos los cambios o modificaciones que introducimos al desarrollar un razonamiento simbólico. Esta forma de aprender las técnicas matemáticas justificando con la aplicación de la lógica en lo que llamamos demostración a dos columnas hace innecesario que memoricemos reglas y fórmulas al principio, pues esto se logra a través de la aplicación continua y repetida que hacemos para justificar, de modo que si una regla o fórmula se olvida en el futuro, se puede deducir cuando se necesite.

No se desconoce la importancia de la mecanización para agilizar las operaciones con los números, pero ésta no nos enseña cómo aplicar las operaciones en los problemas de la vida real, es más bien el conocimiento de la estructura de los números lo que nos permitirá aplicarlos a situaciones reales por analogía.

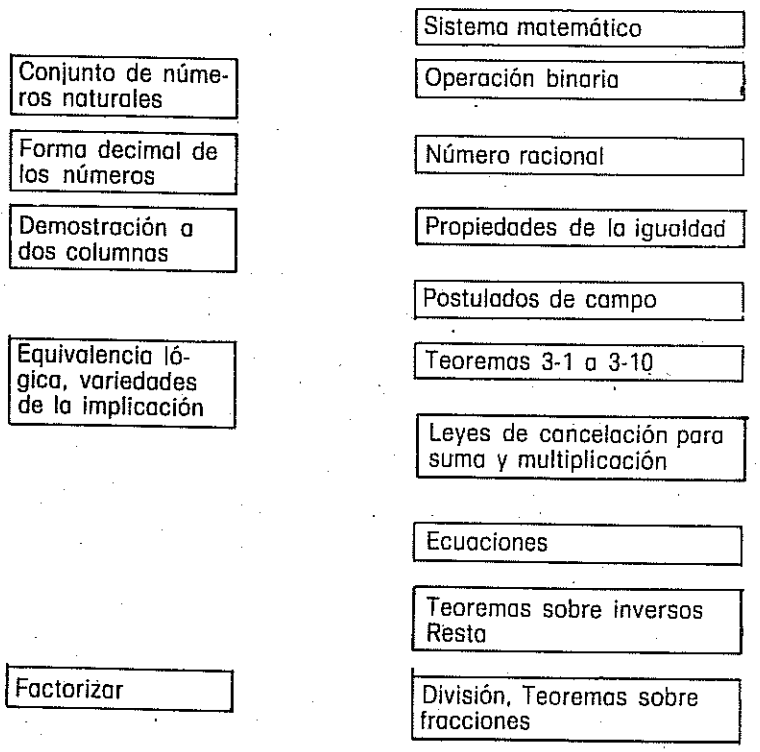
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al término de esta unidad el alumno:

1. Comprenderá el significado de "sistema matemático" y de "campo".
2. Distinguirá a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.
3. Operará con números racionales en su forma decimal o de fracción común, y en forma combinada.
4. Aplicará la notación literal en la representación de números reales y valorará la utilidad de ella en la generalización de las operaciones aritméticas.
5. Aplicará el mecanismo del proceso de las demostraciones a dos columnas en la solución de ecuaciones.

Diagrama temático estructural



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Sistema matemático. Es un conjunto de elementos y una o más operaciones con ellos.

Operación binaria. Es una regla que asocia a cada par de elementos de un conjunto con otro elemento único del mismo conjunto.

Conjunto de números enteros. $E = -\infty \ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots, +\infty$

Conjunto de números enteros positivos. Es el conjunto de los números enteros mayores que cero; es decir, $N = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Conjunto de números enteros negativos. Es el conjunto de enteros menores que cero; es decir, $A = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$

Conjunto de números racionales. Es el conjunto de los números que pueden representarse en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y $b \neq 0$.

Conjunto de números irracionales. Es el conjunto de los números que no pueden representarse a la forma de un racional, es decir, son números con infinitos decimales en los cuales no hay repetición periódica de dígitos en su parte decimal.

Conjunto de los números reales. Es el formado por los conjuntos de los números racionales y los irracionales $R = D \cup D'$

Propiedades de la igualdad. Son seis, las cuales son: reflexiva, de simetría, transitiva, de sustitución, aditiva y multiplicativa.
Reflexiva: Todo número es igual a sí mismo: si $m \in R$, $m = m$.
De simetría: Si un número es igual a otro, entonces éste es igual al primero. Si $m, n \in R$ y $m = n$ entonces $n = m$.
Transitiva: Si un número es igual a un segundo número, y éste igual a un tercer número, entonces el primero es igual al tercero.
si $m, n, p \in R$, $m = n$ y $n = p \Rightarrow m = p$.
De sustitución: si un número es igual a otro, en cualquier expresión el primero bien puede reemplazar al segundo sin alterar el valor de la expresión ($a = b$ y $a, b, \in R$) $\Rightarrow$ (b puede sustituir a la a).
Aditiva o de suma: si $a, b, c,$ y $d \in R$ y $a = b$ y $c = d \Rightarrow a + c = b + d$.
Multiplicativa: si a, b, c y $d \in R$ y $a = b$ y $c = d \Rightarrow ac = bd$.

Postulados de campo. 1. Cerradura, 2. Conmutativo, 3. Asociativo, 4. Distributivo, 5. Identidad, 6. Inversos.
Nota: Todos los conjuntos para los que se cumplan los seis postulados de campo enunciados, para la Adición y la Multiplicación, forman lo que se llama un campo.
Ejemplo: El campo de los Números Reales.

Recíproco. Se dice que un número real es el recíproco de otro si se cumple la condición de que: si $a \in R$ y $a \neq o$, entonces: $a.\left(\frac{1}{a}\right) = 1$, en donde $\frac{1}{a}$ se puede expresar también como a^{-1}, el cual es recíproco de a, y viceversa.

Ecuación. Es una igualdad que existe entre dos expresiones, y la cual está condicionada para cierto valor o valores de la variable (o incógnita).

Solución de una ecuación. Es el conjunto de valor o valores (también llamado conjunto de verdad) que toma la variable, y las transforman a la ecuación en una identidad.

Factorizar. La factorización consiste en que dada una expresión algebraica, ésta se puede expresar como un producto, haciendo la observación de que no cualquier expresión puede ser factorizable.

Resta o diferencia. La resta o diferencia está definida como una operación binaria que asocia a dos números reales a, b, con otro real "c" llamado resta o diferencia, de tal manera que: a, b, c, $\in R$, entonces: $a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$.

Elemento de identidad. Si la suma de un elemento $a \in R$ y el cero, nos da el mismo elemento a, entonces al cero se le denomina elemento identidad.
Y si el producto de otro elemento $a \in R$ por el uno (1), nos da el elemento a, entonces, al (1) se le denomina también, elemento identidad de donde el cero y el uno son los elementos identidad tanto para la suma como para el producto respectivamente.

Inverso. Se dice que $(-a)$ es el inverso aditivo de $a \in R$ si la suma de ambos es igual a cero, o sea, que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 9

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al estudiar este módulo, el alumno:

1. Dado un número, identificará a qué conjunto pertenece entre los naturales, enteros, racionales e irracionales.
2. Resolverá si una operación dada es o no una operación binaria para un determinado conjunto.
3. Identificará las propiedades de la igualdad usadas en proposiciones.
4. Representará un número racional en forma decimal y viceversa.

ESQUEMA RESUMEN

Sistema matemático.

— Operación binaria.
— Tipos postulados que caracterizan un campo.

El conjunto de los números reales.

— Conjunto de los números naturales.
— Conjunto de los números negativos.
— Conjunto de los números enteros.
— Conjunto de los números racionales.
— Conjunto de los números irracionales.
— Conjunto de los números reales.

Propiedad de la igualdad.

— Propiedad reflexiva.
— Propiedad de simetría.
— Propiedad transitiva.
— Propiedad de sustitución.
— Propiedad multiplicativa.

Un **sistema matemático** es un conjunto de **elementos** y una o más **operaciones** con ellos.

Al principiar este curso hablamos acerca del conjunto de los números naturales N, pues este conjunto es un sistema matemático ya que existen dos operaciones definidas con sus elementos; la suma (+) es una **operación** familiar con los elementos de N, así como también la multiplicación (·). A cada par de números naturales se le puede asociar con otro número natural **único** mediante las dos operaciones mencionadas, por ejemplo:
al 3 y al 4 la **suma** los asocia con el 7
y la **multiplicación** los asocia con el 12.

Por lo anterior decimos que tanto la suma como la multiplicación son operaciones **binarias** en el conjunto N.

Definición. Una **operación binaria** en un conjunto es una regla que nos asocia a cada **par** de elementos del conjunto con otro elemento **único** del mismo conjunto.

Cuando con la operación se asocia a **un** elemento de un conjunto con otro elemento **único** del mismo la operación se llama entonces **unaria**, ejemplo de esta operación es la de duplicar la cual asocia al 3 con el 6, al 4 con el 8, al 16 con el 32, etc.

Las operaciones de suma y multiplicación que nos son tan familiares en N, serán las únicas que consideraremos inicialmente y más adelante nos servirán para definir las operaciones resta y división.

Las propiedades fundamentales o **postulados** que caracterizan a un sistema matemático como el de los números reales las dividiremos en dos grupos. Al primer grupo lo llamaremos **postulados de campo;** cualquier sistema con dos operaciones binarias que cumpla con esos **postulados** se considera un **campo;** al segundo grupo lo llamaremos **postulados de orden** y lo trataremos en el próximo texto.

Las operaciones de sumar y multiplicar son **operaciones binarias** 'tambien' en el conjunto de los números reales. Es decir que si tomamos dos números reales ya sean naturales como en el ejemplo que vimos antes o números racionales o aun irracionales, la suma los asocia con otro número real único y la multiplicación también los asocia con otro número real único.

Sean a y b dos números reales, $a,b \in R$ la suma será otro número real y se representa $(a + b)$ la multiplicación da otro número real y se representa $(a \cdot b)$ es decir $(a + b) \in R$ y $(a \cdot b) \in R$, en este caso los paréntesis nos indican que lo que encierran es **un solo número.**

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

El conjunto de los números reales

El conjunto N es el primer conjunto numérico con el que tenemos contacto y fue durante muchos años el único, hasta que descubrimos que algunas operaciones no eran posibles con sus elementos, como el encontrar un número que sumado a otro nos dé este mismo, ejemplo: $5 + a = 5$, siendo $a \in N$; hubo necesidad de inventar otro número, el 0, formando así un nuevo conjunto, pues ahora tiene un elemento más, a este nuevo conjunto lo designaremos con la letra C.

Pero todavía había dificultades, aun en este conjunto no había un elemento que sumado al 5, por ejemplo, nos diera 3; para resolver este problema se definieron los números inversos aditivos o negativos y así se dice que por cada número natural "n" hay un inverso o negativo "$-n$". Este nuevo conjunto que llamaremos E, se define como el conjunto de **números enteros** positivos, negativos y cero, siendo $\mathbf{N} \subset \mathbf{E}$ por definición.

También en la multiplicación hubo problemas, pues ningún elemento de E, multiplicado por 8, digamos, nos da 4, lo cual dio lugar a que se definieran los números que resolverían el problema, formándose otro conjunto que llamamos el de los **números racionales** y que designaremos con una D, definiéndose sus elementos como sigue:

"Un número **x** es **racional** si se puede representar como el cociente de dos enteros, siendo el divisor diferente de 0".

$$\text{"}x \in D \Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \text{ y } a, b \in E, b \neq 0\text{"}$$

Existen números que no cumplen con la definición anterior, por lo que no son elementos del conjunto D: se les llama **números irracionales;** a éstos pertenece el número π que ya has usado antes en la geometría al resolver problemas con circunferencias.

Al conjunto de los números irracionales lo designaremos con la D', ya que su unión con el conjunto **D** forma el conjunto de los números reales que será nuestro universo y que designaremos con la **R; D** $\cup$ **D'** $=$ **R.**

El número racional se representa como una división, y así lo podemos reconocer, pero ¿cómo reconocerlo cuando tenemos el cociente o resultado de esa división? Tomemos el número $\frac{1}{2}$, el cociente es 0.5, ahora el $\frac{7}{3}$ su cociente nos da 2.3333 ... (recuerda que los puntos suspensivos significan que la parte decimal se sigue hasta infinito). Con estos ejemplos se ilustra otra definición de los números racionales usando su presentación decimal y dice:

"Un número **x** es **racional** si su parte decimal termina (como en $\frac{1}{2}$), cuando es infinita un dígito o grupo de dígitos se repite o es periódico (como el 3 en el número $\frac{7}{3}$)".

Ejemplos: Diga si los números siguientes son o no racionales, explique:

a) $\frac{5}{3}$ Este número es **racional** porque es el cociente de dos enteros, 5 y 3; su cociente es 1.6666... cuya parte decimal es periódica.

b) $6\frac{15}{16}$ Este número conocido como mixto en aritmética, es en realidad la representación de la suma de 6 con $\frac{15}{16}$, (en álgebra no utilizaremos estos números porque se confundirían con el producto de 6 por $\frac{15}{16}$); la suma es $\frac{111}{16}$, cociente de dos enteros que nos da 6.9375 cuya parte decimal termina; por lo anterior, el número es racional.

Siendo **N** un conjunto infinito y $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, entonces **R** también es infinito; en seguida presentamos algunos subconjuntos importantes de **R:**

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	**Conjunto de números naturales.**
$C = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	**Conjunto de números no negativos.**
$E = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	**Conjunto de números enteros.**
$D = \{x \in R \mid x = \frac{a}{b}, a,b \in E, b \neq 0\}$	**Conjunto de números racionales.**

Los cuatro conjuntos se relacionan entre sí y con el conjunto **R** de acuerdo con lo siguiente:

$$N \subset C \subset E \subset D \subset R$$

Hemos definido al conjunto de los **números reales,** con cuyos elementos vamos a trabajar, ya más adelante veremos los postulados de campo en los que nos basaremos para estructurar el "campo de los números reales".

Propiedades de la igualdad

En la Unidad 1 se ha introducido un símbolo, que como los números naturales y el de la suma, ya nos era familiar, el signo de igualdad (=), que ya fue definido en los conjuntos, y que ahora con los números nos dice que siendo $a,b \in R$ y $a = b$, las letras nos están representando a un **mismo número.** Para tener más elementos que nos ayuden a entender y aplicar los "postulados de campo", es conveniente antes de seguir adelante dar algunas definiciones acerca de las propiedades de la igualdad, y aun-

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

que algunas nos parecerán obvias o infantiles, es necesario repetirlas y tenerlas presentes porque nos servirán como razones o justificaciones en nuestras demostraciones a dos columnas, sobre todo si consideramos que en álgebra los números los representamos con letras por lo que no siempre se "ve" la igualdad.

Postulado 3-1. Propiedad reflexiva: todo número es igual a sí mismo.
$m \in R \Longrightarrow m = m$

Postulado 3-2. Propiedad de simetría: Si un número es igual a otro, entonces éste es igual al primero.
$(m, n \in R \text{ y } m = n) \Longrightarrow (n = m)$

Postulado 3-3. Propiedad transitiva: Si un número es igual a un segundo número, y éste igual a un 3o., entonces el 1o. es igual al 3o.
$(m, n, p \in R, m = n \text{ y } n = p) \Longrightarrow (m = p)$

Postulado 3-4. Propiedad de sustitución: Si un número es igual a otro, en cualquier expresión en que aparezca el primero puede reemplazarse por el segundo sin alterar el valor de la expresión.
$(a = b \text{ y } a, b \in R) \Longrightarrow$ (b puede sustituir a la a)

Postulado 3-5. Propiedad Aditiva o de Suma. Si a, b, c y d son cuatro números reales y $a = b$ y $c = d$, entonces
$a + c = b + d$.

Postulado 3-6. Propiedad multiplicativa: Si a, b, c y d son cuatro elementos de R y $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$.

Estas dos últimas propiedades de la igualdad, aunque se dan como postulados, se pueden demostrar utilizando la técnica a dos columnas, proposición-razón. Demostrar:

$a, b, c, d \in R, a = b \text{ y } c = d \Longrightarrow a + c = b + d$

	Proposición	Razón
1.	$a, b, c, d \in R$	Dado
2.	$(a + c) \in R$	Definición de operación binaria en R
3.	$a + c = a + c$	Propiedad reflexiva (postulado 3-1)
4.	$a = b$	Dado
5.	$a + c = b + c$	Propiedad de sustitución (postulado 3-4)
6.	$c = d$	Dado
7.	$a + c = b + d$	Propiedad de sustitución

Por supuesto que ya se habrá dado cuenta en la demostración que algunos pasos pueden combinarse (como el 3 y el 5), para hacer más corta la demostración; sin embargo, todavía no lo intentaremos para ganar en experiencia y claridad con esta técnica de demostración. Ahora usted demuestre el postulado 3-6, utilizando la misma técnica.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION III-9

En los problemas del 1 al 15 conteste Verdadero o Falso a la proposición dada. Las implicaciones se pueden verificar usando diagramas de Venn o las propiedades de la igualdad. En todo caso las razones o justificaciones sólo deben ser con lo estudiado hasta aquí.

1. $E \subset D$ 2. $D \subset R$ 3. $N \subset D'$ 4. $a \in C \Longrightarrow a \in D$
5. $a \in E \Longrightarrow a \in N$ 6. $C \cup D = R$ 7. $N \cap C = \{0\}$
8. $D \cup D' = R$ 9. $x = \sqrt{3} \text{ y } 2 = y \Longrightarrow x + 2 = \sqrt{3} + y$
10. Si $x = y$ y $5 = 5$, entonces $x + 5 = y + 5$
11. Si $3 = x + 2$ y $2 = z$, entonces $3 \cdot 2 = (x + 2) \cdot z$
12. Si $x = 3$, entonces $4 + x = 4 + 3$ Indicación: De una igualdad no se deduce conclusión, como no sea otra equivalente.
13. $x + 5 = y + 3 \text{ y } z = 2 \Longrightarrow (x + 5) \cdot z = (y + 3) \cdot 2$
14. $y = 4 \Longrightarrow 2y = 2 \cdot 4$
15. Si $x = y + 3$ y $y = 2$, entonces $x = 2 + 3$

En los problemas del 16 al 20 encuentre el número en forma decimal y conteste si es o no racional. Dé sus razones.

16. $1\frac{3}{4}$ 17. $\frac{7}{11}$ 18. 9 19. 10% de 1 20. $\frac{7}{8}$

Nota: El símbolo % se lee por ciento. "10% se lee 10 por ciento".

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 10

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al concluir el estudio de este módulo, el alumno:

1. Recordará los postulados de campo y reconocerá su aplicación en una demostración dada.

2. Demostrará proposiciones sencillas acerca de los números reales en que se utilicen los postulados de campo.

ESQUEMA RESUMEN

Postulados de campo.

— Cerradura para la suma y multiplicación.
— Conmutatividad para la suma y multiplicación.
— Asociatividad para la suma y multiplicación.
— Distributividad de la multiplicación respecto a la suma.
— Identidad para la suma y multiplicación.
— Inversos para la suma y multiplicación.

Algunos teoremas importantes.

Problemas-ejemplos.

En la demostración de la propiedad aditiva de la igualdad, y en la de la propiedad multiplicativa que usted hizo, hemos considerado sólo la suma y la multiplicación, operaciones que consideramos las fundamentales y para las que se cumplen o son válidos los seis postulados de campo que a continuación enunciamos.

Todo conjunto cuyos elementos cumplan con estos seis postulados para las dos operaciones que se mencionan, forma por ese motivo lo que se llama un campo; los números reales cumplen con los postulados y por eso nos referimos al "campo de los números reales".

Postulado 3-7. Cerradura.

a) **Para la suma:** Si **a** y **b** son elementos de **R**, entonces la suma también es elemento de **R**, y a los números **a** y **b** les llamamos sumandos. $a, b \in R \Longrightarrow (a + b) \in R$.

b) **Para la multiplicación:** Si **a** y **b** son elementos de **R** entonces el producto también es elemento de **R**, y a los números **a** y **b** les llamamos factores, el símbolo que emplearemos para la multiplicación será un punto a media altura, con objeto de que no se confunda con la letra x.
$a, b \in R \Longrightarrow (a \cdot b) \in R$.

Ejemplos: a) $2, 7 \in R \Longrightarrow (2 + 7) \in R$
b) $2, 7 \in R \Longrightarrow (2 \cdot 7) \in R$

Como siempre que utilizamos números naturales, el resultado de la suma o multiplicación nos es conocido ($2 + 7 = 9$ y $2 \cdot 7 = 14$), podemos aplicar la propiedad de sustitución de la igualdad en aquellas expresiones en que aparezcan las operaciones escribiendo los resultados, sin que por esto cambie el valor de la expresión, es decir que cuando aparezca $5 + 8$ se sustituirá por 13 o si es $5 \cdot 8$ se sustituirá por 40. Con esto reducimos la expresión haciéndola más fácil de manipular.

Postulado 3-8. Conmutativo.

a) **Para la suma:** Si **a** y **b** son números reales, el orden en que se sumen no afecta el resultado. $a, b \in R \Longrightarrow a + b = b + a$

b) **Para la multiplicación:** Si **a** y **b** son números reales el orden en que se multipliquen no afecta al producto
$a, b \in R \Longrightarrow a \cdot b = b \cdot a$

Ejemplos: a) $7, 3 \in R \Longrightarrow 7 + 3 = 3 + 7$
b) $7, 3 \in R \Longrightarrow 7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Postulado 3-9. Asociativo.

a) **Para la suma:** Si **a, b, c** son tres números reales, es igual que a la suma de **a** y **b** se le sume el valor **c**, a que al valor **a** se le sume la suma de **b** y **c**.
a, b, c $\in R \Longrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$

b) **Para la multiplicación:** Si **a, b** y **c** son elementos de **R**, es igual que el producto de **a** con **b** se multiplique por **c**, a que la **a** se multiplique por el producto de **b** con **c**.
a, b, c $\in R \Longrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ejemplos: a) $2, 3, 8 \in R \Longrightarrow (2 + 3) + 8 = 2 + (3 + 8)$
b) $2, 3, 8 \in R \Longrightarrow (2 \cdot 3) \cdot 8 = 2 \cdot (3 \cdot 8)$

Observe que en este postulado el orden de los tres sumandos o factores no se altera al aplicarlo, pero cada sumando o factor puede escribirse en el orden que se prefiera si aplicamos el postulado conmutativo y de ese modo en una aplicación combinada de ambos postulados, podemos representar a un mismo número real en muchas formas diferentes, por ejemplo, consideremos el número 12 representado por la suma de los números reales 2, 3 y 7.
$12 = (2 + 3) + 7$

	Proposiciones	Razones
1.	$(2 + 3) + 7 = 2 + (3 + 7)$	Postulado asociativo (no se cambió el orden)
2.	$2 + (3 + 7) = (3 + 7) + 2$	Postulado conmutativo
3.	$(3 + 7) + 2 = (7 + 3) + 2$	Postulado conmutativo en el primer sumando
4.	$(7 + 3) + 2 = 2 + (7 + 3)$	Postulado conmutativo
5.	$2 + (7 + 3) = (2 + 7) + 3$	Postulado asociativo

Use los postulados conmutativo y asociativo para escribir otras dos formas de representar el número 12 (la 6 y la 7) sin repetir ninguna de las anteriores.

6. — — — — — — — — — — — —
7. — — — — — — — — — — — —

Observe que tanto en el postulado conmutativo, como en el asociativo, siempre se consideran dos factores o dos sumandos, razón por la cual se introduce el paréntesis ( ) como símbolo de la asociación, es decir, la suma de 3 más 7 en el segundo paso del ejemplo anterior, representa a **un** número real, (el 10), en donde 3 y 7 son los sumandos, pero para el número 12 ambos representan un solo sumando, el 10, y el otro es el número 2; así considerados se conmutaron, es decir se cambió el orden entre **dos** sumandos, el 2 y el $(3 + 7)$. El cambio en el tercer paso se efectuó aplicando el conmutativo a los sumandos que están dentro del paréntesis, es decir los que forman al número 10.

Postulado 3-10. Distributivo.

a) **A la izquierda:**
Sean **a, b, c** $\in R \Longrightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

b) **A la derecha:**
Sean **a, b, c** $\in R \Longrightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

De acuerdo con este postulado podemos convertir un producto de sumas en una suma de productos. **Ejemplo:** El producto de sumas $(a + b) \cdot (c + d)$, se puede convertir en la suma de cuatro productos $(a \cdot c + a \cdot d) + (b \cdot c + b \cdot d)$.

Demostración:

	Proposiciones	Razones
1.	$(a + b) \cdot (c + d)$	Dado
2.	$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d$	Postulado distributivo a la izquierda.
3.	$(a + b) \cdot (c + d) = (a \cdot c + b \cdot c) + (a \cdot d + b \cdot d)$	Postulado distributivo a la derecha en cada paréntesis. (Justificación para la modificación efectuada en el lado derecho de la igualdad).

La razón que se da justifica el cambio efectuado en el lado derecho de la igualdad con respecto a la igualdad establecida en el número 2 ¿Qué justifica el que esta igualdad sea igual a la establecida en el número 2?

La propiedad de sustitución de la igualdad, o la transitiva, ($a = b$ en el 2o. paso; $b = c$ por distributivo, entonces $a = c$).

Para abreviar las demostraciones a dos columnas en las igualdades, como se conserva inalterable el lado izquierdo para llegar a demostrar lo propuesto, apoyados en la propiedad de sustitución de la igualdad, no lo escribiremos más que en la primera y última expresión o cuando se necesite para justificar algún cambio. Esto lo mostramos en la continuación de la presente demostración.

	Proposiciones	Razones
4.	$= a \cdot c + (b \cdot c + a \cdot d) + b \cdot d$	Postulado asociativo (para el cambio del lado derecho).
5.	$= a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c) + b \cdot d$	Postulado conmutativo (con los sumandos asociados por el paréntesis).
6.	$(a + b) \cdot (c + d) = (a \cdot c + a \cdot d) + (b \cdot c + b \cdot d)$	Postulado asociativo.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

En la expresión inicial de esta demostración podemos notar que los paréntesis, al asociarlos a dos números con su suma para representar así a un solo número, nos sirven también para indicar la multiplicación, de modo que podemos suprimir el punto que la simboliza y también es posible suprimir este símbolo, cuando los factores que se multiplican no provoquen confusión o ideas equivocadas, por ejemplo: el producto $a \cdot b$ puede escribirse simplemente ab; el producto $5 \cdot x$ puede escribirse $5x$. Pero en el producto de $2 \cdot 3$ no se puede eliminar el **símbolo** porque leeríamos **veintitrés** (23). En seguida presentamos algunos ejemplos de la aplicación de los cuatro postulados vistos hasta aquí, con objeto de fijar bien en nuestra mente su aplicación y por tanto su comprensión.

Ejemplo 1. Demuestre: $x, y \in R \Longrightarrow (2 \cdot x) \cdot (3 \cdot y) = 6 \cdot (x \cdot y)$

Proposiciones	Razones
1. $x, y \in R$	Dado
2. $2 \cdot x, 3 \cdot y \in R$	Postulado de cerradura para la multiplicación. El producto de dos números reales es otro número real.
3. $(2x)\ (3y) \in R$	Postulado de cerradura (ya no usamos los puntos para la multiplicación).
4. $(2x)\ (3y) = 2\,(x \cdot 3)\,y$	Postulado asociativo.
5. $= 2\,(3x)\,y$	Postulado conmutativo.
6. $= (2 \cdot 3)\,(xy)$	Postulado asociativo (nótese que el punto de la multiplicación lo usamos sólo cuando el suprimirlo causaría confusión).
7. $(2x)\ (3y) = 6xy$	Postulado de sustitución de la igualdad $(2 \cdot 3 = 6)$.

Ejemplo 2. Demuestre: $a \in R \Longrightarrow (2a + 5) + 3\,(2 + a) = 5a + 11$

Proposiciones	Razones
1. $(2a + 5) + 3\,(2 + a) = (2a + 5) + (3 \cdot 2 + 3a)$	Postulado distributivo.
2. $= (2a + 5) + (3a + 3 \cdot 2)$	Postulado conmutativo en el paréntesis derecho.
3. $= (2a + 5) + (3a + 6)$	Propiedad de sustitución de la igualdad $(3 \cdot 2 = 6)$.
4. $= 2a + (5 + 3a) + 6$	Postulado asociativo.
5. $= 2a + (3a + 5) + 6$	Postulado conmutativo.
6. $= (2a + 3a) + (5 + 6)$	Postulado asociativo (el orden no cambió).

7.	$= (2a + 3a) + 11$	Propiedad de sustitución.
8.	$= (2 + 3)\,a + 11$	Postulado distributivo.
9.	$(2a + 5) + 3\,(2 + a) = 5a + 11$	Propiedad de sustitución $(2 + 3 = 5)$.

NOTA IMPORTANTE: En el paso 8 de la demostración anterior se efectúa una aplicación del postulado distributivo pero leyendo el postulado de derecha a izquierda o justificando esto por la propiedad simétrica de la igualdad como se ve en seguida.

$$(x + y)\,z = xz + yz \Longrightarrow xz + yz = (x + y)\,z$$

Esta forma de aplicar el distributivo es tan frecuente que tiene un nombre especial, se llama **factorización** o también **sacar factor común.**

Analice todos los cambios efectuados en las dos demostraciones anteriores y observe las razones o justificaciones para cada uno de ellos, de modo que pueda aplicar la misma técnica en los siguientes problemas para auto-evaluación.

Siendo las operaciones de suma y multiplicación asociativas y conmutativas con los números reales, la suma de más de dos números o el producto de más de dos números, pueden representarse en la asociación u orden que más convenga sin alterar el resultado, por lo que podemos eliminar los paréntesis hasta que nos interese señalar alguna asociación u orden en particular. **Ejemplo:**

1. $a + b + c + d = a + (d + c) + b = (a + c) + (b + d) =$ etc.
2. $abc = (ab)\,c = b\,(ac) =$ etc.

Postulado 3-11. Identidad

a) **Para la suma:** La suma de cualquier elemento de **R** y el cero es el mismo elemento, por lo que al número cero le llamamos el elemento **identidad** para la suma.
$a \in R \Longrightarrow a + 0 = a.$

b) **Para la multiplicación:** El producto de cualquier elemento de **R** y el uno es el mismo elemento, entonces el número uno es el elemento **identidad** para la multiplicación.
$a \in R \Longrightarrow a \cdot 1 = a.$

c) El número cero es diferente del número uno: $0 \neq 1$.
Como tanto el 0 como el 1, son números reales para los que la multiplicación y la suma son conmutativas, podemos extender nuestro postulado como sigue:
si $a \in R \Longrightarrow a + 0 = 0 + a = a,\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$

En cada inciso del anterior postulado de campo hemos utilizado un solo número como elemento identidad; cuando se presenta una situación así, decimos que ese elemento usado es **único.**

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Teorema 3-1. El elemento identidad para la suma es único, y es el 0.

Teorema 3-2. El elemento identidad para la multiplicación es único, y es el 1.

A diferencia de los postulados, los teoremas son afirmaciones que se deben demostrar, y para utilizar sus conclusiones en otras demostraciones deben haber sido demostrados; las demostraciones que hemos realizado hasta aquí, han sido aplicación del razonamiento deductivo; empezando con una proposición que es dada o ha sido justificada, hacemos luego modificaciones basándonos en postulados o propiedades para asegurarnos de su validez, hasta llegar a la proposición que queríamos demostrar. Ese método se conoce como el método Directo. Para la demostración de los teoremas anteriores utilizaremos un método Indirecto, mismo que se aplica a todos los teoremas o problemas semejantes a éstos.

Demostración del teorema 3-1.

En primer lugar, consideramos como verdadera la proposición que niega lo que se pretende demostrar (razón del nombre de indirecta para la demostración), sea la hipótesis $a \in R$, otro elemento identidad diferente del 0 (negación de que 0 sea único), $a \neq 0$.

Proposición	Razones
$0 + a = 0$	Dado "a" como **otro** elemento identidad, al sumarlo al 0 vuelve a dar 0.
$a \neq 0$	Dado.
$a + 0 = a$	Postulado de identidad. $a \in R \Longrightarrow a + 0 = a$.
$a + 0 = 0 + a$	Postulado conmutativo para la suma.
$a = 0$	Propiedad de sustitución de la igualdad. La conclusión a la que llegamos contradice lo que aceptamos en el enunciado como hipótesis, $a \neq 0$.

Conclusión: Es falso que $a \neq 0$ y por lo tanto $a = 0$ siendo entonces un elemento "único", es decir que no importa cómo llamemos al elemento identidad, a, b, etc. siempre es el cero.

Emplee también el método indirecto para demostrar el teorema 3-2.

Postulado 3-12. Inversos

a) **Para la suma:** Para todo $a \in R$ existe otro elemento de R; $(-a)$, llamado el inverso para la suma de modo que la suma de los dos es 0.

b) **Para la multiplicación:** Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, existe otro elemento de R, $(\frac{1}{a})$, llamado el inverso de la multiplicación de modo que el producto de los dos es 1.

$$a \in R \Longrightarrow a + (-a) = 0 \qquad a \in R, a \neq 0 \Longrightarrow a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$$

En cada caso el resultado es el **elemento identidad** correspondiente a la operación efectuada, y siendo estas operaciones conmutativas nuestro postulado puede extenderse a:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$
$$a \cdot (\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}) \cdot a = 1; a \neq 0$$

Se puede decir que todo número real tiene un inverso para la suma y otro para la multiplicación, con la excepción anotada del 0; estos inversos también son elementos **únicos.**

Teorema 3-3. El inverso para la suma de $a \in R$, es $(-a)$ y es único.

Teorema 3-4. El inverso para la multiplicación de $a \in R$, $a \neq 0$ es $\frac{1}{a}$ y es único.

Los demostraciones de estos teoremas son también por el método indirecto.

Demostración del teorema 3-3.

Aceptemos que el número representado por **b** es **otro** inverso aditivo para el número a; $b \neq -a$.

$a + b = 0$	Dado "b" como inverso de "a" la suma es 0.
$a + (-a) = 0$	Postulado de inversos.
$a + b = a + (-a)$	Propiedad transitiva de la igualdad $a = b, b = c \Longrightarrow a = c$.
$-a = -a$	Propiedad reflexiva de la igualdad.
$-a + (a + b) = -a + [a + (-a)]$	Propiedad aditiva de la igualdad. $(a = b, c = d \Longrightarrow a + c = b + d)$
$(-a + a) + b = (-a + a) + (-a)$	Postulado asociativo.
$0 + b = 0 + (-a)$	Postulado de inversos. (Escogimos $-a$ para agregarlo con objeto de conseguir estos dos ceros).
$b = -a$	Postulado de identidad. $a + 0 = a$.

Conclusión: b resultó ser igual a $(-a)$, contradiciendo lo supuesto $b \neq -a$, por lo que lo supuesto debe ser falso, y en realidad sólo hay un inverso que es $(-a)$.

Corolario: Si la suma de dos números es cero, entonces un número es el inverso aditivo del otro. $a, b \in R$ y $a + b = 0 \Longrightarrow b = -a$ ó $a = -b$ Demuestre, utilizando el mismo método, el teorema 3-4.

Corolario al teorema 3-4. Si el producto de dos números es 1, entonces un número es el inverso multiplicativo del otro.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$a, b \in \mathbf{R};\ a \text{ y } b \neq 0, \text{ si } a \cdot b = 1 \Longrightarrow b = \frac{1}{a} \text{ ó } a = \frac{1}{b}$$

Para evitar confusiones que nos lleven a cometer errores al usar los inversos de los números reales, llamaremos de aquí en adelante **inverso** de un número sólo al aditivo, y al multiplicativo lo llamaremos el **recíproco.**

Algunos teoremas importantes

Demostraremos ahora algunos teoremas que son una consecuencia directa de los postulados y teoremas demostrados hasta aquí. Los teoremas que siguen complementan nuestro estudio y nos proporcionan, junto con lo anterior, información suficiente acerca de los números reales y sus relaciones, de manera que podamos resolver problemas con literales, es decir generalizaciones planteadas como proposiciones abiertas, y que obtengamos los elementos que forman el conjunto solución.

Teorema 3-7. Ley de cancelación para la suma

$$x + z = y + z \Longrightarrow x = y$$

NOTA: Observa que en la hipótesis no se incluye $x, y, z \in \mathbf{R}$. En adelante, si no se menciona otra cosa, los elementos serán números reales.

Demostración

	Proposiciones	Razones
1.	$x + z = y + z$	Dado
2.	$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z)$	Propiedad aditiva de la igualdad. Nosotros escogimos una segunda igualdad $-z = -z$ a nuestra conveniencia, pero sin escribirla, teniendo en mente la conclusión a la que queremos llegar; $x = y$.
3.	$x + [z + (-z)] = y + [z + (-z)]$	Postulado asociativo
4.	$x + 0 = y + 0$	Postulado de inversos
5.	$x = y$	Postulado de identidad

Es tan frecuente el uso del artificio empleado en el segundo paso de la demostración, que lo concretaremos en una definición con la que justificaremos ese paso en el futuro, incluyendo la aplicación multiplicativa.

> Definición: Una igualdad no se altera si **sumamos** o **multiplicamos** en **ambos lados** de la igualdad por un **mismo** número.

Teorema 3-8. Ley de cancelación para la multiplicación.

$$xz = yz,\ z \neq 0 \Longrightarrow x = y$$

Demuestre este teorema aplicando la misma técnica, considere la definición que acabamos de dar, y que es consecuencia de la aplicación de la propiedad multiplicativa de la igualdad y de la propiedad reflexiva.

Teorema 3-9. Si $x = y \Leftrightarrow -x = -y$

Demostración. Escriba las justificaciones a cada paso.

Demostrar: $x = y \Longrightarrow -x = -y$

$$\begin{aligned} x &= y \\ x + (-x) &= y + (-x) \\ 0 &= y + (-x) \\ -y + 0 &= -y + [y + (-x)] \\ -y &= -y + [y + (-x)] \\ -y &= (-y + y) + (-x) \\ -y &= 0 + (-x) \\ -y &= -x \\ -x &= -y \end{aligned}$$

Como la flecha nos indica una doble implicación debe demostrarse también en el otro sentido. Demuestre que $-x = -y \Longrightarrow x = y$. El teorema ya demostrado nos señala que dos números son iguales, si y sólo si sus inversos son iguales.

Teorema 3-10. Si $x = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}, x, y \neq 0$

Demuestre el teorema anterior que nos enseña que dos números son iguales, si y sólo si sus recíprocos son iguales.

Las proposiciones abiertas que mencionamos, se definieron como aquellas proposiciones que tenían una variable en su estructura y un conjunto de reemplazamiento para ella. En álgebra, cuando en estas proposiciones interviene la igualdad, las conocemos con el nombre de **ecuaciones** y al conjunto de verdad se le llama simplemente "la solución de la ecuación". En otras palabras, la **ecuación** es una igualdad condicionada sólo para ciertos valores de la variable, los que forman un conjunto llamado **la solución,** consideramos, como ya se dijo, que el conjunto de reemplazamiento es el de los números reales. Tenemos entonces los elementos necesarios para encontrar la solución de ecuaciones sencillas, sólo que por el momento disponemos únicamente de dos operaciones, la suma y la multiplicación.

Ejemplo a). Sea $3x + 5 = 23$ una ecuación con una variable, $x \in \mathbf{R}$.

Solución:

Proposición	Razones
$3x + 5 = 23$	Dado
$3x + \not{5} = (18 + \not{5})$	Propiedad de sustitución de la igualdad, $23 = 18 + 5$
$3x + \not{5} = 18 + \not{5}$	Ley de cancelación para la suma.
$3x = 3 \cdot 6$	Propiedad de sustitución de la igualdad, $18 = 3 \cdot 6$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$\not{2}x = \not{2} \cdot 6$ Ley de cancelación para la multiplicación.

$x = 6$

Conjunto solución $= \{6\}$

El conjunto solución en este caso, o también el conjunto de verdad de la proposición abierta, tiene sólo un elemento, el número 6.

Ejemplo b). Resolver $7x + 2 = 5x + 10$. Proporcione las razones.
Solución:

$7x + 2 = 5x + 10$	— — — —
$(5 + 2)x + 2 = 5x + 10$	— — —
$(5x + 2x) + 2 = 5x + 10$	— — —
$5x + (2x + 2) = 5x + 10$	— — —
$2x + 2 = 8 + 2$	— — —
$2x + \not{2} = 8 + \not{2}$	— — —
$2x = 2 \cdot 4$	— — —
$\not{2}x = \not{2} \cdot 4$	— — —
$x = 4$	— — —

Conjunto solución $= \{4\}$

Ejemplo c). Resuelva $3x + 5x = 15$. Proporcione las razones.
Solución:

$3x + 5x = 15$	— — — —
$(3 + 5)x = 15$	— — —
$8x = 15$	— — —
$(\frac{1}{8})(8x) = (\frac{1}{8}) \cdot 15$	— — —
$(\frac{1}{8} \cdot 8)x = (\frac{1}{8}) \cdot 15$	— — —
$1 \cdot x = (\frac{1}{8}) \cdot 15$	— — —
$x = (\frac{1}{8}) \cdot 15$	— — —

Conjunto solución $= \{(\frac{1}{8} \cdot 15)\}$

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION III-10

1. Proporcione las razones para la demostración de la siguiente proposición:
   1. $a, b, x, y \in R \Longrightarrow (xa + ya) + (xb + yb) = (x + y)(a + b)$
   2. $(xa + ya) + (xb + yb) = (x + y)a + (x + y)b$
   3. $= (x + y)(a + b)$
2. Demuestre a dos columnas que: $(x + 2) + a = 2 + (a + x)$
3. Demuestre a dos columnas que: $x[(a + b) + c] = xa + (xb + xc)$
4. Consideraremos conocidas las tablas para sumar los números del 1 al 9 únicamente, y que estos dígitos tienen un valor de acuerdo con su posición o lugar que ocupan en un número (unidades, decenas, centenas, etc.); ejemplo: el 3 en primer lugar vale 3, en segundo vale $3 \cdot 10 = 30$, en tercero vale $3 \cdot 100 = 300$; entonces podemos justificar con los postulados vistos hasta aquí la suma de dos números cualesquiera. Ejemplo: demostrar $27 + 36 = 63$ (Proporcione las razones después de la primera).

	Proposiciones	Razones
1.	$27 + 36 = (2 \cdot 10 + 7) + (3 \cdot 10 + 6)$	Definiciones del valor de los dígitos de acuerdo con su posición y sustitución de la igualdad $(27 = 20 + 7,\ 36 = 30 + 6)$
2.	$= [2 \cdot 10 + (7 + 3 \cdot 10)] + 6$	— — — — — —
3.	$= [2 \cdot 10 + (3 \cdot 10 + 7)] + 6$	— — — — —
4.	$= (2 \cdot 10 + 3 \cdot 10) + (7 + 6)$	— — — —
5.	$= (2 + 3) \cdot 10 + (7 + 6)$	— — —
6.	$= 5 \cdot 10 + 13$	— —
7.	$= 5 \cdot 10 + (1 \cdot 10 + 3)$	— —
8.	$= (5 \cdot 10 + 1 \cdot 10) + 3$	— —
9.	$= (5 + 1) \cdot 10 + 3$	—
10.	$= 6 \cdot 10 + 3$	—
11.	$= 60 + 3$	—
12.	$27 + 36 = 63$	—

5. Utilice el problema anterior como modelo para justificar la siguiente suma: $21 + 36 = 57$.
   Justifique cada una de las proposiciones dadas con algún postulado de campo o alguna propiedad de la igualdad.
6. $(8 + 5) \cdot 0 = 8 \cdot 0 + 5 \cdot 0$
7. $7(3\sqrt{2}) = (7 \cdot 3)\sqrt{2}$
8. $ax + ay = a(x + y)$
9. $x + y = z \Longrightarrow (x + y) + z = z + z$
10. $\frac{1}{3} = x \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Llene los espacios en blanco de modo que la proposición cumpla con uno y sólo uno de los postulados de campo, dé el nombre del postulado.

11. $(2 + \sqrt{3}) + (3 + \frac{1}{2}) = [(2 + \sqrt{3}) + \_\_\_\_] + \_\_\_\_$
12. $(7 \cdot 3) \cdot 2 = \_\_\_\_ (\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_)$
13. $(8 + 3) \cdot 4 = \_\_\_\_ (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)$
14. $[2(5 + 7)]\sqrt{3} = \_\_\_\_[(\_\_\_\_)\_\_\_\_]$

Demuestre a dos columnas las siguientes proposiciones:

15. $[(x + y) + 5] + z = (x + 5) + (y + z)$
16. $(x + 3)(y + 5) = (xy + 3y) + (5x + 15)$
17. Escriba 10 formas diferentes de la suma $(2 + 3) + 5$, y 5 formas diferentes del producto $(2 \cdot 3)\,5$, usando los postulados de campo que justifiquen los cambios que introduzca.

Escriba cuál o cuáles de los postulados o teoremas ya demostrados justifican la proposición dada en los problemas del 18 al 43. No debe ser necesariamente sólo un postulado o teorema, pueden ser más de uno.

18. $3 + 0 = 3$
19. $(-a) + 0 = -a$
20. $1 \cdot 1 = 1$
21. $(-1) \cdot 1 = -1$
22. $1 \cdot 6 = 6$
23. $0 + 0 = 0$
24. $(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$
25. $3(\frac{1}{2}) = 1$
26. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{5})} = 1$
27. $(-5) + [-(-5)] = 0$
28. $\pi + (-\pi) = 0$
29. $x + y = x \cdot 1 + y \cdot 1$
30. $0 + 1 \cdot (x + y) = x + y$
31. $(\sqrt{2} + 7) \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + 7} = 1$
32. $\frac{1}{(-4)} \cdot (-4) = 1$
33. $-(xy) + xy = 0$
34. $-[x + (0 + y)] + (x + y) = 0$
35. $3\sqrt{2} \cdot x \frac{1}{3\sqrt{2} \cdot x} = 1;\ x \neq 0$
36. $a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$
37. $a + 0 = -2 \Longrightarrow a = -2$
38. $a \cdot b = 1 \Longrightarrow a = (\frac{1}{b})$
39. $a \cdot 3 = 1 \Longrightarrow a = (\frac{1}{3})$
40. $x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$
41. $3 \cdot x = 3 \Longrightarrow x = 1$
42. $x + 2x = 3x$
43. $2a = 2 \Longrightarrow a = 1$

44. Complete la demostración del siguiente teorema, dando las justificaciones. **Teorema 3-5.** El producto de cualquier número real y cero es cero $x \in R \Longrightarrow x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

Demostración:

$0 + 0 = 0$	————
$x = x$	———
$x(0 + 0) = x \cdot 0$	———
$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$	———
$x \cdot 0 \in R \Longrightarrow -(x \cdot 0) \in R$	———
$-(x \cdot 0) = -(x \cdot 0)$	———
$-(x \cdot 0) + (x \cdot 0 + x \cdot 0) = -(x \cdot 0) + x \cdot 0$	———
$[-(x \cdot 0) + x \cdot 0] + x \cdot 0 = -(x \cdot 0) + x \cdot 0$	———
$0 + x \cdot 0 = 0$	———
$x \cdot 0 = 0$	———
$0 \cdot x = 0$	———
$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$	———

45. Justifique la demostración que sigue:
"El **inverso** del **inverso** de un número es el mismo número".

$x \in R \Longrightarrow -(-x) = x$

Demostración:

$x + (-x) = 0$	———
$(-x) + x = 0$	———
$x = -(-x)$	———

46. Demuestre que: "El **recíproco** del **recíproco** de un número es el mismo número" $x \in R, x \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

47. Complete la demostración del siguiente teorema:
Teorema 3-6. El producto de dos números reales es cero, si y sólo si, el primer factor es cero o el segundo factor es cero.
$x, y \in R, xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $y = 0$
$xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ ó $y = 0$

Demostración: Si $x \neq 0$, entonces tiene un recíproco $(\frac{1}{x})$ ———

$xy = 0$	———
$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$	———
$(\frac{1}{x})(xy) = (\frac{1}{x}) \cdot 0$	———

Conclusión: $x \neq 0 \Longrightarrow y = 0$

La **contrapositiva** de la implicación anterior es también verdadera y dice: $y \neq 0 \Longrightarrow x = 0$

Como el símbolo del teorema representa una doble implicación debe entonces probarse en ambos sentidos, esta otra demostración la justifica un teorema ya demostrado.
$x = 0$ ó $y = 0 \Longrightarrow x \cdot y = 0$

Demostración:

$x, y \in R\ x = 0$	————
$0 \cdot y = 0$	———
$x, y \in R, y = 0$	———
$x \cdot 0 = 0$	———

Conclusión: $x = 0$ ó $y = 0 \Longrightarrow xy = 0$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Resuelva para la variable.

48. $2x + 3 = 5$
49. $3x + 1 = 4$
50. $\frac{1}{x} = 2$
51. $-x = 6$
52. $7x + \sqrt{2} = 14 + \sqrt{2}$
53. $x + 2 = 0$
54. $x + (-8) = 0$
55. $x(x + 2) = 0$ Indicación: aplique el Teorema 3-6 $xy = 0 \Leftrightarrow x\ 0$ ó $y = 0$
56. $(x + 4)x = 0$
57. $[x + (-1)](x + 2) = 0$

Módulo 11

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Aplicará los postulados de las operaciones binarias suma, multiplicación y resta en expresiones algebraicas enteras.

2. Justificará el establecimiento de proposiciones en que se utilicen propiedades de los inversos.

ESQUEMA RESUMEN

Algunos teoremas importantes sobre los inversos.

— El inverso aditivo del número cero es el mismo cero
— $(-a) \cdot b = -ab$; $(a \text{ y } b \in R)$
— $(-a) \cdot (-b) = ab$; $(a \text{ y } b \in R)$
— $-(a + b) = (-a) + (-b)$; $(a \text{ y } b \in R)$

La Resta.

Definición y notación.

Teorema de la resta.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Algunos teoremas importantes sobre los inversos

Hemos definido ya el inverso aditivo de cualquier número real y al símbolo con el que lo representamos (−), y sólo en ese sentido utilizamos el signo (−). Veamos ahora algunos teoremas que nos serán muy útiles para manejar las relaciones entre los números reales.

Teorema 3-11. El inverso aditivo del número cero es el mismo cero. $-0 = 0$.

Demostración:

$0 + 0 = 0$	Postulado de identidad, $a + 0 = a$
$0 + (-0) = 0$	Postulado de inversos, $a + (-a) = 0$
$0 + 0 = 0 + (-0)$	Propiedad transitiva
$0 = -0$	Postulado de identidad para la suma
$-0 = 0$	Propiedad simétrica de igualdad

Teorema 3-12. $(-a) \cdot b = -(ab)$

Demostración:

$[a + (-a)] = 0$	Postulado de inversos
$[a + (-a)]\, b = 0 \cdot b$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$ab + (-a) \cdot b = 0 \cdot b$	Postulado distributivo
$ab + (-a)\, b = 0$	Teorema de multiplicación por 0
$(-a)\, b = -(ab)$	Corolario del teorema 3-3 que dice: $a + b = 0 \Longrightarrow a = -b$

De acuerdo con el teorema anterior las expresiones $(-a)\, b$, ó $-(ab)$ son equivalentes y pueden escribirse como $-ab$. **Ejemplo:**

$(-2)\, 3 = -(2 \cdot 3) = 2\,(-3) = -6$

Teorema 3-13. $(-a)\,(-b) = ab$

Demuestre este teorema utilizando pasos semejantes a los de la demostración anterior.

Los dos teoremas anteriores junto con la identidad $(a)\,(b) = ab$, forman lo que llamamos las reglas de los signos para la multiplicación.

Reglas de los signos.

$(a)\,(b) = ab$ positivo por positivo, producto positivo.
$(-a)\,(-b) = ab$ negativo por negativo, producto positivo.
$(-a)\, b = a\,(-b) = -ab$ negativo por positivo o positivo por negativo, producto negativo.

> En forma condensada podemos decir que: El producto de factores del mismo signo es positivo, y el producto de factores de signos contrarios es negativo.

Teorema 3-14. $-(a + b) = (-a) + (-b)$

Demostración: Escriba las justificaciones para cada paso.

$$(a + b) + [-(a + b)] = 0$$
$$[(-a) + (-b)] + \{(a + b) + [-(a + b)]\} = 0 + [(-a) + (-b)]$$
$$\{[(-a) + (-b)] + (a + b)\} + [-(a + b)] = 0 + [(-a) + (-b)]$$
$$\{[(-a) + (-b)] + (a + b)\} + [-(a + b)] = (-a) + (-b)$$
$$\{[(-a + a)\ + [(-b) + b]\} + [-(a + b)] = (-a) + (-b)$$
$$(0 + 0) + [-(a + b)] = (-a) + (-b)$$
$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

Este teorema justifica que cambiemos todos los sumandos por su inverso aditivo que corresponda cuando la asociación, precedida de un signo negativo, quiera eliminarse. **Ejemplo:**

a) $-[2 + (3 + a)] = (-2) + [-(3 + a)] = (-2) + [(-3) + (-a)]$

Los conjuntos de problemas anteriores nos proporcionan, a través de la continua y repetida aplicación de los postulados y teoremas, la habilidad necesaria para que en el futuro, al brincarnos pasos, no se pierda la noción de lo que estamos buscando y abreviemos los problemas sin equivocarnos. Insisto en la importancia de desarrollar los problemas como lo venimos haciendo, para gradualmente irlos simplificando o acortando, esto tiene por objeto también, que se aprenda los postulados y teoremas a través de su aplicación repetida y no con su lectura repetida o memorización.

La resta

Hemos considerado hasta aquí sólo dos operaciones con los números reales, la suma y la multiplicación, de manera que los postulados de campo se cumplen como se ha demostrado sólo para esas operaciones; por esta razón las operaciones de resta y división se definen en términos de las dos anteriores.

> La resta se define como: la **operación binaria** que asocia a dos números, reales **x, y**, con otro número real **único** llamado **la resta o la diferencia "r"**, de manera que $x - y = r \Leftrightarrow x = y + r$.
> **Ejemplo: $7 - 2 = 5$, ya que $7 = 2 + 5$.**

Como consecuencia de lo anterior vemos que el signo (—) tiene dos usos diferentes, uno para indicar el inverso aditivo y el otro para representar la operación de restar.

Teorema 3-15. La operación de restar un número es equivalente a sumar el inverso de ese número, $a - b = a + (-b) = r$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Demostración:

$a - b = r \Leftrightarrow a = b + r$	Definición de restar
$a + (-b) = (-b) + (b + r)$	Propiedad aditiva de la igualdad
$a + (-b) = (-b + b) + r$	Asociativo
$a + (-b) = 0 + r$	Inversos
$a + (-b) = r$	Identidad
$a - b = a + (-b)$	Propiedad de sustitución de la igualdad

Este último teorema tiene una gran importancia ya que al transformar la resta en una suma, nos permite utilizar todos los postulados de campo ya definidos para la suma, en la operación de restar y lo llamaremos **Teorema de la resta. Ejemplos:**

$(x + y) - z = (x + y) + -z)$, siendo ya una suma se le puede aplicar el conmutativo y asociarse como mejor convenga.

$= x + (-z) + y = (-z) + x + y$

$= x - z + y = -z + x + y$

Teorema 3-16. $a(b - c) = ab - ac$

Demostración:

$a(b - c) =$	Dado
$a[b + (-c)] =$	Teorema de la resta
$ab + a(-c) =$	Distributivo
$ab + [-(ac)] =$	Producto de factores con signos contrarios. Regla de los signos
$ab - ac = ab - ac$	Teorema de la resta

Este teorema nos enseña la forma de **distribuir** un factor sobre una resta.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION III-11

En los problemas del 1 al 16 diga cuál es la razón que justifica cada proposición.

1. $0 + 0 = 0$
2. $(-3) + -(-3) = 0$
3. $(-2) + (-6) = -8$
4. $(-3)[-(2 + x)] = 3(2 + x)$
5. $-14 = (-4) + (-10)$
6. $-(2x) = 14 \Longrightarrow 2x = -14$
7. $x(-2y) = -[x(2y)]$
8. $(-3)x = 12 \Longrightarrow 3x = -12$
9. $-x = -4 \Longrightarrow x = 4$
10. $\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{15}}\right) = 1$
11. $-x = 3 \Longrightarrow x = -3$
12. $-y = (-1)y$
13. $z = (-1)(-z)$
14. $(-2)(-4) = 8$
15. $(-3)(6) = -18$
16. $-5 = (-4) + (-1)$

Utilizando los teoremas y postulados hasta aquí vistos resuelva para "x" las siguientes ecuaciones. Hágalo por pasos asegurándose que conoce la justificación para cada cambio que introduzca, pero no es necesario que escriba estas justificaciones.

17. $-7x = 10 + (-2x)$

Solución:

$(-7)x = 10 + (-2x)$	$-ab = (-a)b$
$(-7) + 2x = [10 + (-2x)] + 2x$	Propiedad aditiva de la igualdad
$(-7)x + 2x = 10 + [(-2x + 2x)]$	Asociativo
$(-7)x + 2x = 10 + 0$	Inversos
$(-7)x + 2x = 10$	Identidad
$[(-7) + 2]x = 10$	Distributivo
$[-(5 + 2) + 2]x = 10$	Sustitución
$[[(-5) + (-2)] + 2]x = 10$	$-(a + b) = (-a) + (-b)$
$[-5 + (-2 + 2)]x = 10$	Asociativo
$(-5 + 0)x = 10$	Inversos
$(-5)x = 10$	Identidad
$(-5)x = (-5)(-2)$	Sustitución y Teorema $(-a)(-b) = ab$
$(-5)x = (-5)(-2)$	Cancelación para la multiplicación
$x = -2$	

18. $7x + 3 = -18$
19. $-6x = -2x + 4$
20. $-3x = 27$
21. $15x = -4x + 38$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Encuentre el número que se representa en cada problema. Efectúe los cambios y escriba la justificación como se muestra en el número 22.

22. $4 + 2(7 - 12)$

Solución:	$= 4 + [(2 \cdot 7) - (2 \cdot 12)]$	Teorema $a(b - c) = ab - ac$
	$= 4 + (14 - 24)$	Sustitución
	$= 4 + [14 + (-24)]$	Teorema de la resta
	$= (4 + 14) + (-24)$	Asociativo
	$= 18 + [-(18 + 6)]$	Sustitución $(24 = 18 + 6, 4 + 14 = 18)$
	$= 18 + [(-18) + (-6)]$	Teorema $-(a + b) = (-a) + (-b)$
	$= [18 + (-18)] + (-6)$	Asociativo
	$= 0 + (-6)$	Inversos
$4 + 2(7 - 12)$	$= -6$	Identidad

23. $(5 - 2)$
24. $(-15 - 8)$
25. $[-15 - (-9)]$
26. $2 - (3 - 7)$
27. $2 - [5 + (3 - 5)]$
28. $15 - [6 - 3(4 + 2)]$
29. $3 + [2 - 2(5 - 8)]$

30. Demuestre la siguiente implicación:
$x + a = b \Longrightarrow x = b - a$ (Esta es una propiedad muy usada en la solución de ecuaciones).

Módulo 12

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Demostrará algunas propiedades sencillas de la división usando propiedades conocidas de la división y los inversos.
2. Expresará un número racional de la forma decimal a fracción común y viceversa.
3. Escribirá el recíproco de un término algebraico dado.
4. Simplificará expresiones algebraicas fraccionarias.

ESQUEMA RESUMEN

La División.

Definición y notación.

Teorema de la división.

Teoremas sobre fracciones.

- $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{xz}{yw}$; $(x, y, z, w \in R$ con $y, w \neq 0)$
- $\dfrac{x}{y} = \dfrac{xz}{yz}$; $(x, y, z, \in R$ con $y, z \neq 0)$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; $(a, b, c, d, \in R$ con b y $d \neq 0)$
- $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$; $(a$ y $b \in R$ con a y $b \neq 0)$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

La división

La división es una **operación binaria** que asocia a dos números reales x, y, con un número real **único** llamado el **cociente** "R"

de modo que si $y \neq 0$, $x \div y = \frac{x}{y} = c \Leftrightarrow x = c \cdot y$

La división es una operación definida en términos de la multiplicación, de modo que los postulados válidos para la multiplicación lo son también para la división a través del siguiente teorema; se emplean dos símbolos y los números que intervienen toman diferentes nombres según la notación empleada, a saber: con el primer símbolo (÷) el primer número se llama dividendo y el segundo divisor; con el segundo, llamado forma de fracción y el más usado, al número de arriba le llamamos **numerador** y al de abajo **denominador;** en ambos casos el resultado **único** es el cociente "R".

Teorema 3-17. La operación de dividir dos números reales es equivalente a multiplicar el numerador por el recíproco del denominador.

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = c; b \neq 0$$

Nótese que tanto en la definición de la operación, como en el teorema anterior que llamaremos el **Teorema de la División,** ésta queda definida sólo si el denominador es diferente de cero.

Demostración: $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$ Definición de División

Como $b \neq 0$ existe $\frac{1}{b}$ Inversos

$(\frac{1}{b}) \cdot a = \frac{1}{b} \cdot (bc)$ Propiedad Multiplicativa de la Igualdad

$(\frac{1}{b})\, a = (\frac{1}{b} \cdot b)c$ Postulado Asociativo

$(\frac{1}{b})\, a = 1 \cdot c$ Postulado de Inversos

$(\frac{1}{b})\, a = c$ Postulado de Identidad

$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$ Propiedad Transitiva

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ Postulado Conmutativo

Teoremas sobre fracciones

Presentamos a continuación algunos teoremas básicos sobre fracciones que se demuestran directamente de la definición y teorema de la división. Son muy importantes en el manejo de las fracciones y algunos ya los hemos empleado de manera intuitiva, pero no nos debe engañar la forma inofensiva y simple como se presentan para su mejor comprensión, ni por esto se debe restarle importancia a su estudio, comprensión y aplicación.

Teorema 3-18. $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$; $(y, w \neq 0)$

Demostración: $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w}$ Dado

$= (x \cdot \frac{1}{y})(z \cdot \frac{1}{w})$ Teorema de la División

$= (xz)(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{w})$ Asociativo y Conmutativo

$= [(xz)(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{w})][(yw)(\frac{1}{yw})]$ Postulados, Identidad e Inversos

$= [(xz)(\frac{1}{yw})][(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{w})(yw)]$ Asociativo y Conmutativo

$= [(xz)(\frac{1}{yw})][(\frac{1}{y} \cdot y)(\frac{1}{w} \cdot w)]$ Asociativo y Conmutativo

$= [(xz)(\frac{1}{yw})]$ Postulados, Inversos e Identidad

$= \frac{xz}{yw}$ Teorema de la División

Corolario: $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Teorema 3-19. $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$; $(y, z, \neq 0)$

Demostración:

$\frac{xz}{yz} = (\frac{x}{y})(\frac{z}{z})$ — Teorema 3-18

$= (\frac{x}{y})(z \cdot \frac{1}{z})$ — Teorema de la División

$= \frac{x}{y}$ — Postulado Inversos e Identidad

Como puede notar hemos empezado a abreviar las demostraciones y lo mismo empezaremos a hacer en los problemas; efectuar cambios en un paso que se justifican con dos o más postulados y teoremas. Si ha seguido las indicaciones anteriores ya debe haber adquirido experiencia en la aplicación de la teoría, lo que le permitirá abreviar "brincándose" pasos y aplicando algunas reglas que nos ayudan a mecanizar operaciones repetitivas, sin perder por esto la comprensión del problema a resolver. El teorema 3-19 es de gran utilidad en la simplificación de fracciones. **Ejemplo:** 143/169 se puede simplificar como se muestra en seguida:

$$\frac{143}{169} = (\frac{11}{13})(\frac{13}{13}) = \frac{11}{13}$$

Teorema 3-20. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; $(b, d \neq 0)$

Demostración: Escriba las justificaciones que correspondan según los cambios introducidos.

$\Rightarrow$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a}{b}(bd) = \frac{c}{d}(bd)$

$(a \cdot \frac{1}{b})bd = (c \cdot \frac{1}{d})bd$

$ad(\frac{1}{b} \cdot b) = bc(\frac{1}{d} \cdot d)$

$ad = bc$

$\Leftarrow$

$ad = bc$

$ad(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}) = bc(\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{b})$

$a(d \cdot \frac{1}{d})\frac{1}{b} = c(b\frac{1}{b})\frac{1}{d}$

$a \cdot \frac{1}{b} = c\frac{1}{d}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Teorema 3-21. $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$; $(a, b \neq 0)$ La demostración es el problema 3.

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION III-12

1. Demuestre que: $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$; $(b \neq 0)$
2. Demuestre que:

   $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$; $b \neq 0$ (recuerde que $-(\frac{a}{b}) = -(a \cdot \frac{1}{b})$
3. Demuestre el teorema 3-21.
4. Escriba el recíproco de cada uno de los números que se dan a continuación.

   a) 36 b) -8 c) $x - 2$

   d) $\frac{1}{2x+3}$ e) $\frac{x}{y}$ f) $2 \div x$

En los problemas del 5 al 9 utilice los teoremas vistos hasta aquí para simplificar las fracciones que se dan. El postulado distributivo nos sirve para **factorizar** si lo escribimos $ab + ac = a(b + c)$ por la propiedad simétrica de la igualdad.

5. $\frac{323}{380}$ 6. $\frac{15xy}{3y}$ 7. $\frac{ax + ay}{bx + by}$

8. $\frac{3x - 6y}{12x - 24y}$ 9. $\frac{2(a-b)(x-y)}{6(a+b)(x-y)}$

10. Demuestre que: $ax = b$, $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ (Esta es una propiedad muy usada en la solución de ecuaciones).

11. Exprese en forma decimal las siguientes fracciones:

    a) $\frac{40}{80}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $1\frac{1}{3}$

    d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{12}{1000}$ f) $2\frac{3}{100}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

12. Exprese en forma fraccionaria los números decimales siguientes:

a) 0.035 b) 2.1 c) 0.75

d) 0.0001 e) 10.34 f) 0.80

RESUMEN

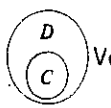
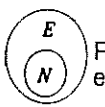
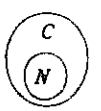
Los números reales los manipulamos durante muchos años, aunque probablemente sólo nos aprendimos la mecanización de algunas operaciones con ellos, sin comprender las relaciones que tienen con situaciones reales, ni las leyes que gobiernan esas relaciones, esos conocimientos nos permiten sacar grandes ventajas en la aplicación que de los **números reales** hacemos frecuentemente en la vida diaria. No se desconoce la importancia de la mecanización o habilidad para desarrollar los operaciones entre los números, pero éstos por sí solos no nos **enseñan** cómo aplicar esas operaciones en los problemas prácticos y se ve entonces, que es más bien la comprensión de la "estructura" de los números reales lo que nos permite aplicarla y para estudiar esa estructura introducimos nuevos términos como:

Sistema matemático
Campo
Operación binaria
Número racional
Propiedades de la igualdad
Postulados de campo
Inverso aditivo
Recíproco
Ecuación
Solución de una ecuación
Regla de signos
Factorizar
Teorema de la resta
Teorema de la división

Insisto en que más que poder repetir las deficiones de los términos anteriores, es la **comprensión** de esos términos la que facilitará el desarrollo de la habilidad y destreza en las evaluaciones numéricas, tema que trataremos en la siguiente unidad.

Paneles de Verificación

CONJUNTO DE PROBLEMAS III-9

1. Verdadero
2. Verdadero
3. Falso (ningún elemento en común)
4. $a \in C \Longrightarrow a \in D$  Verdadero
5. $a \in E \Longrightarrow a \in N$  Falso, es posible ser elemento de E sin ser elemento de N. Ejemplo: $-4 \in E$, $-4 \notin N$.
6. Falso, porque siendo $C \subset D \Longrightarrow C \cup D = D$.
7. Falso porque  $\Longrightarrow (N \cap C = N)$
8. Verdadero (definición).
9. Verdadero (postulado de suma de igualdades).
10. Verdadero (igual que anterior).
11. Verdadero (postulado de multiplicación de igualdades).
12. No se puede demostrar su validez a menos que agreguemos otra igualdad.
13. Verdadero (postulado de multiplicación de igualdades).
14. No es demostrable su validez con los elementos hasta aquí vistos.
15. Verdadero (postulado de sustitución de la igualdad).
16. $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1 + .75 = 1.75$ Es racional porque su parte decimal termina
17. $\frac{7}{11} = 0.636363\ldots$ Es racional porque es el cociente de dos enteros o también porque su parte decimal siendo infinita se repite o es periódica.
18. $9 = 9 \cdot 0$ Es racional porque su parte decimal termina o porque puede representarse como $\frac{9}{1}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

19. $10\%\ 1 = \dfrac{10}{100} = 0 \cdot 1$ — Es racional, su parte decimal termina o puede representarse como $\dfrac{10}{100}$

20. $\dfrac{7}{8} = 0.875$ — Es racional, es el cociente de dos enteros (7, 8)

CONJUNTO DE PROBLEMAS III-10

1. $a, b, x, y \in R \Longrightarrow (xa + ya) + (xb + yb) = (x + y)(a + b)$

1.	$a, b, x, y \in R$	Dado
2.	$(xa + ya) + (xb + yb) = (x + y)a + (x + y)b$	Distributivo a la derecha
3.	$= (x + y)(a + b)$	Distributivo a la izquierda (factorización)

2. $(x + 2) + a = 2 + (a + x)$

1.	$(x + 2) + a = (2 + x) + a$	Conmutativo
2.	$= 2 + (x + a)$	Asociativo
3.	$(x + 2) + a = 2 + (a + x)$	Conmutativo

Para que su respuesta sea correcta no es indispensable que tenga exactamente los mismos tres pasos anteriores, puede tener muchos más, lo que es indispensable es que las justificaciones correspondan realmente al cambio introducido.

3. $x[(a + b) + c] = xa + (xb + xc)$

	$x[(a + b) + c] = x(a + b) + xc$	Distributivo
	$= (xa + xb) + xc$	Distributivo
	$= xa + (xb + xc)$	Asociativo

4.

1.	$27 + 36 = (2 \cdot 10 + 7) + (3 \cdot 10 + 6)$	Definición del valor de los dígitos por su posición y propiedad de sustitución
2.	$= [2 \cdot 10 + (7 + 3 \cdot 10)] + 6$	Asociativo
3.	$= [2 \cdot 10 + (3 \cdot 10 + 7)] + 6$	Conmutativo
4.	$= 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10) + (7 + 6)$	Asociativo
5.	$= (2 + 3) \cdot 10 + (7 + 6)$	Distributivo (factorización)
6.	$= 5 \cdot 10 + 13$	Sustitución $(2 + 3 = 5, 7 + 6 = 13)$
7.	$= 5 \cdot 10 + (1 \cdot 10 + 3)$	Igual que en el primer paso
8.	$= (5 \cdot 10 + 1 \cdot 10) + 3$	Asociativo
9.	$= (5 + 1) \cdot 10 + 3$	Distributivo (factorización)
10.	$= 6 \cdot 10 + 3$	Sustitución $(5 + 1 = 6)$
11.	$= 60 + 3$	Sustitución $(6 \cdot 10 = 60)$
12.	$27 + 36 = 63$	Sustitución

5.

	$21 + 36 = (2 \cdot 10 + 1) + (3 \cdot 10 + 6)$	Definición del valor de los dígitos por su posición y propiedad de sustitución
	$= [2 \cdot 10 + (1 + 3 \cdot 10)] + 6$	Asociativo
	$= [2 \cdot 10 + (3 \cdot 10 + 1)] + 6$	Conmutativo
	$= (2 \cdot 10 + 3 \cdot 10) + (1 + 6)$	Asociativo
	$= (2 + 3) \cdot 10 + (1 + 6)$	Distributivo (factorización)
	$= 5 \cdot 10 + 7$	Sustitución $(2 + 3 = 5, 1 + 6 = 7)$
	$= 50 + 7$	Sustitución
	$21 + 36 = 57$	Sustitución

6. Distributivo

7. Asociativo

8. Distributivo o factorización

9. Aunque la conclusión de esta implicación es demostrable, todavía no hemos visto teorema, postulado o definición que la justifique.

10. Propiedad simétrica de la igualdad

11. $(2 + \sqrt{3}) + (3 + \dfrac{1}{2}) = [(2 + \sqrt{3}) + 3] + \dfrac{1}{2}$ — Asociativo

12. $(7 \cdot 3) \cdot 2 = \underline{7} \cdot (3 \cdot 2)$ — Asociativo

13. $(8 + 3) \cdot 4 = \underline{4}\,(\underline{8} + \underline{3})$ — Conmutativo

14. $[2(5 + 7)]\sqrt{3} = \sqrt{\underline{3}}\,[(\underline{5 + 7})2]$ — Conmutativo

15. $[(x + y) + 5] + z = (x + 5) + (y + z)$

	$[(x + y) + 5] + z = [x + (y + 5)] + z$	Asociativo
	$= [x + (5 + y)] + z$	Conmutativo
	$= (x + 5) + (y + z)$	Asociativo

16. $(x + 3)(y + 5) = (xy + 3y) + (5x + 15)$

	$(x + 3)(y + 5) = (x + 3)y + (x + 3) \cdot 5$	Distributivo
	$= (xy + 3y) + (x \cdot 5 + 3 \cdot 5)$	Distributivo
	$= (xy + 3y) + (5x + 3 \cdot 5)$	Conmutativo $(x \cdot 5 = 5x)$
	$(x + 3)(y + 5) = (xy + 3y) + (5x + 15)$	Sustitución $(3 \cdot 5 = 15)$

17. $(2 + 3) + 5$ en diez formas diferentes

1.	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$	Asociativo
2.	$= 2 + (5 + 3)$	Conmutativo
3.	$= (2 + 5) + 3$	Asociativo
4.	$= (5 + 2) + 3$	Conmutativo

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

	$= 5 + (2 + 3)$	Asociativo
	$= 5 + (3 + 2)$	Conmutativo
5.	$= (3 + 2) + 5$	Conmutativo
6.	$= 3 + (2 + 5)$	Asociativo
7.	$= 3 + (5 + 2)$	Conmutativo
8.	$= (3 + 5) + 2$	Asociativo
9.		
10.	$(2 \cdot 3) \cdot 5$ en cinco formas diferentes	

	$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$	Asociativo
1.	$= 2 \cdot (5 \cdot 3)$	Conmutativo
2.	$= (5 \cdot 3) \cdot 2$	Conmutativo
3.	$= 5 \cdot (3 \cdot 2)$	Asociativo
4.	$= (3 \cdot 2) \cdot 5$	Conmutativo
5.		

18. Postulado de identidad para la suma.
19. Postulado de identidad para la suma.
20. Postulado de identidad para la multiplicación.
21. Postulado de identidad para la multiplicación.
22. Postulado de identidad para la suma.
23. Postulado de inversos para la suma.
24. Postulado de inversos para la multiplicación.
25. Postulado de inversos para la multiplicación.
26. Postulado de inversos para la suma.
27. Postulado de inversos para la suma.
28. Postulado de identidad para la multiplicación.
29. Postulado de identidad para la suma y la multiplicación.
30. Postulado de inversos para la multiplicación.
31. Postulado de inversos para la multiplicación.
32. Postulado de inversos para la suma.
33. Postulado de identidad para la suma $(0 + y = y)$ y postulado de inversos para la suma.
34. Postulado de inversos para la multiplicación.
35. Corolario al teorema 3-3.
36. Postulado de identidad para la suma.
37. Corolario al teorema 3-4.
38. Corolario al teorema 3-4.
39. Corolario al teorema 3-3.
40. Corolario al teorema 3-3.

41. Postulado de identidad para la multiplicación y teorema 3-2.
42. Postulado distributivo y propiedad de sustitución de la igualdad $(1 + 2 = 3)$
43. Postulado de identidad para la multiplicación y teorema 3-2.
44. Teorema 3-5 $x \in R$, $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

$0 + 0 = 0$	Postulado de identidad para la suma (el primer número 0, se escogió buscando el producto x por 0)
$x = x$	Propiedad reflexiva de la igualdad
$x(0 + 0) = x \cdot 0$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$	Postulado distributivo
$x \cdot 0 \in R \Longrightarrow -(x \cdot 0) \in R$	Postulado de inversos
$-(x \cdot 0) = -(x \cdot 0)$	Propiedad reflexiva de la igualdad
$-(x \cdot 0) + (x \cdot 0 + x \cdot 0) = -(x \cdot 0) + x \cdot 0$	Propiedad aditiva de la igualdad
$[-(x \cdot 0) + x \cdot 0] + x \cdot 0 = -(x \cdot 0) + x \cdot 0$	Asociativo
$0 + x \cdot 0 = 0$	Inversos para la suma
$x \cdot 0 = 0$	Identidad
$0 \cdot x = 0$	Conmutativo
$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$	Propiedad transitiva

45. $x \in R, \Longrightarrow -(-x) = x$

$x + (-x) = 0$	Inversos
$(-x) + x = 0$	Conmutativo
$x = -(-x)$	Corolario al teorema 3-3

46. $x \in R, x \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$

$x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$	Inversos
$\left(\frac{1}{x}\right) x = 1$	Conmutativo
$x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}$	Corolario al teorema 3-4

47. Teorema 3-6. $x, y \in R$ $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $y = 0$

$x \neq 0 \Longrightarrow$ existe $\frac{1}{x}$	Postulado de inversos
$x \cdot y = 0$	Dado

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$	Propiedad reflexiva de la igualdad
$\frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \cdot 0$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$(\frac{1}{x} \cdot x)y = 0$	Asociativo y teorema de la multiplicación por cero $(x \cdot 0 = 0)$
$1 \cdot y = 0$	Inversos
$y = 0$	Identidad

Queda demostrado que para $xy = 0, x \neq 0 \Longrightarrow y = 0$ es una proposición verdadera por lo que la contrapositiva, su proposición equivalente también es verdadera, para $x \cdot y = 0, y \neq 0 \Longrightarrow x = 0$.

48. $2x + 3 = 5$

$(2x + 3) + (-3) = (2 + 3) + (-3)$	Propiedad de sustitución y aditiva de la igualdad $(5 = 2 + 3)$
$2x + [3 + (-3)] = 2 + [3 + (-3)]$	Asociativo
$2x + 0 = 2 + 0$	Inversos
$2x = 2 \cdot 1$	Identidad de la suma y de la multiplicación
$x = 1$	Cancelación
$\{1\}$	

49. $3x + 1 = 4$

$(3x + 1) + (-1) = (3 + 1) + (-1)$	Propiedad de sustitución y aditiva de la igualdad $(4 = 3 + 1)$
$3x + [1 + (-1)] = 3 + [1 + (-1)]$	Asociativo
$3x + 0 = 3 + 0$	Inversos
$3x = 3 \cdot 1$	Identidad de la suma y de la multiplicación
$x = 1$	
$\{1\}$	

50. $\frac{1}{x} = 2$

$x = x$	Propiedad reflexiva de la igualdad
$\frac{1}{x} \cdot x = 2 \cdot x$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$1 = 2 \cdot x$	Inversos
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	Reflexiva
$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot (2x)$	Propiedad multiplicativa
$\frac{1}{2} \cdot 1 = (\frac{1}{2} \cdot 2)x$	Asociativo
$\frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \cdot x$	Inversos
$\frac{1}{2} = x$	Identidad
$x = \frac{1}{2}$	Simétrica
$\{\frac{1}{2}\}$	

51. $-x = 6$

$x = -6$	Teorema 3-9. Si dos números son iguales, sus inversos son iguales.
$\{-6\}$	

52. $7x + \sqrt{2} = 14 + \sqrt{2}$

$7x + \sqrt{2} = 14 + \sqrt{2}$	Cancelación para la suma
$7x = 7 \cdot 2$	Sustitución
$x = 2$	Cancelación para la multiplicación
$\{2\}$	

53. $x + 2 = 0$

$x = -2$	Corolario al teorema 3-3, si dos números suman cero, uno es el inverso del otro
$\{-2\}$	

54. $x + (-8) = 0$

$x = -(-8)$	Corolario al teorema 3-3
$x = 8$	Problema 45 de este ejercicio
$\{8\}$	

55. $x(x + 2) = 0$

$x = 0$ ó $x + 2 = 0$	Teorema 3-6
$x = -2$	Corolario al teorema 3-3
$\{0\} \cup \{-2\} = \{0, -2\}$	El conjunto solución de una disyunción es la unión de los conjuntos de las proposiciones componentes

56. $(x + 4)x = 0$

$x + 4 = 0$ ó $x = 0$	Teorema 3-6
$x = -4$ ó $x = 0$	Corolario al teorema 3-3
$\{-4\} \cup \{0\} = \{-4, 0\}$	

57. $[x + (-1)](x + 2) = 0$

$x + (-1) = 0$ ó $x + 2 = 0$	Teorema 3-6
$x = -(-1)$ ó $x = -2$	Corolario al teorema 3-3
$x = 1$ ó $x = -2$	Problema 45 de este ejercicio
$\{1\} \cup \{-2\} = \{1, -2\}$	

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

CONJUNTO DE PROBLEMAS III-11

1. Postulado de identidad para la suma
2. Postulado de inversos para la suma
3. Teorema 3-14 y propiedad de sustitución de la igualdad $(2 + 6 = 8)$
4. Teorema 3-13 o regla de signos
5. Propiedad de sustitución $(14 = 4 + 10)$ y teorema 3-14
6. Teorema 3-9
7. Teorema 3-12
8. Teoremas 3-12 y 3-9
9. Teorema 3-9
10. Postulado de inversos para la multiplicación
11. Teorema 3-9
12. Postulado de identidad para la multiplicación y teorema 3-12
13. Postulado de identidad y teorema 3-13
14. Teorema 3-13 y propiedad de sustitución de la igualdad $(2 \cdot 4 = 8)$
15. Teorema 3-12 y propiedad de sustitución
16. Propiedad de sustitución $(5 = 4 + 1)$ y teorema 3-14
17. $-7x = 10 + (-2x)$. Fue resuelto como ejemplo, pero se le agregaron las razones

18.
$$\begin{aligned} 7x + 3 &= -18 \\ (7x + 3) + (-3) &= (-18) + (-3) \\ 7x + [3 + (-3)] &= (-18) + (-3) \\ 7x + 0 &= (-18) + (-3) \\ 7x &= (-18) + (-3) \\ 7x &= -(18 + 3) \\ 7x &= -21 = -(7 \cdot 3) \\ 7x &= 7(-3) \\ x &= -3 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} -6x &= -2x + 4 \\ -6x + 2x &= (-2x) + 2x + 4 \\ (-6)x + 2x &= [(-2x) + 2x] + 4 \\ (-6)x + 2x &= 0 + 4 \\ [(-6) + 2]x &= 4 \\ [-(4 + 2) + 2]x &= 4 \\ \{[(-4) + (-2)] + 2\}x &= 4 \\ \{(-4) + [(-2) + 2]\}x &= 4 \\ [(-4) + 0]x &= 4 \\ (-4)x &= 4 \\ (-\tfrac{1}{4})(-4)x &= (-\tfrac{1}{4})4 \\ 1 \cdot x &= -(\tfrac{1}{4} \cdot 4) \\ x &= -(1) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

NOTA: En la solución de estas ecuaciones existen varias alternativas que nos llevan al mismo resultado, sólo que como cada persona ve en forma diferente los mismos problemas, cada quien escoge el camino que su experiencia le dicta como el más expedito o efectivo. **Ejemplo:** Puede usarse la ley de cancelación para la multiplicación o la propiedad multiplicativa de la igualdad.

Es por estas razones que se insiste en la necesidad de practicar con estos ejercicios la aplicación de las definiciones y postulados vistos, aunque a veces nos parezca algo aburrido e intrascendente.

20.
$$\begin{aligned} -3x &= 27 \\ -3x &= 3 \cdot 9 \\ -3x &= (-3)(-9) \\ (-3)x &= (-3)(-9) \\ x &= -9 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 15x &= -4x + 38 \\ 15x + 4x &= 4x + [(-4x) + 38] \\ 15x + 4x &= [4x + (-4x)] + 38 \\ 15x + 4x &= 0 + 38 \\ (15 + 4)x &= 38 \\ 19x &= 38 \\ (\tfrac{1}{19})(19x) &= (\tfrac{1}{19})38 = (\tfrac{1}{19})(19 \cdot 2) \\ (\tfrac{1}{19} \cdot 19)x &= (\tfrac{1}{19} \cdot 19)2 \\ 1 \cdot x &= 1 \cdot 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

22. Resuelto en el texto
23. $5 - 2 = 3$ — Resta aritmética. Propiedad de sustitución
24.
$$\begin{aligned} (-15 - 8) &= (-15) + (-8) && \text{Teorema de la resta 3-15.} \\ &= -(15 + 8) && \text{Teorema 3-14} \\ &= -(23) && \text{Propiedad de sustitución} \\ (-15 - 8) &= -23 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} [-15 - (-9)] &= [-15 + \{-(-9)\}] && \text{Teorema de la resta} \\ &= [-15 + 9] && \text{Problema 45 del ejercicio III-2 que dice } -(-a) = a \\ &= [-(6 + 9) + 9] && \text{Sustitución} \\ &= [((-6) + (-9)) + 9] && \text{Teorema 3-14} \\ &= [(-6) + ((-9) + 9)] && \text{Asociativo} \\ &= [(-6) + 0] && \text{Inversos} \\ [-15 - (-9)] &= -6 && \text{Identidad} \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} 2 - (3 - 7) &= 2 + [-(3 + \{-7\})] && \text{Teorema de la resta} \\ &= 2 + [(-3) + \{-(-7)\}] && \text{Teorema } -(a + b) = (-a) + (-b) \\ &= 2 + [(-3) + 7] && \text{Problema 45 del ejercicio III-2 que dice } -(-a) = a \\ &= 2 + [7 + (-3)] && \text{Conmutativo. Ver nota al final.} \end{aligned}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$= 2 + (7 - 3)$	Teorema de la resta
$= 2 + 4$	Sustitución $(7 - 3 = 4)$, resta aritmética
$2 - (3 - 7) = 6$	Sustitución

NOTA: La aplicación del postulado conmutativo nos permite representar la suma, otra vez como resta, sólo que ahora a un número mayor se le resta otro menor. Este procedimiento es alterno del que sustituye al número por dos sumandos para utilizar el postulado de inversos como se ve a continuación.

$$\begin{aligned}(-3) + 7 &= (-3) + (3 + 4)\\ &= [(-3) + 3] + 4\\ &= 0 + 4\\ &= 4\end{aligned}$$

27. $2 - [5 + (3 - 5)]$

$= 2 - [5 + (3 + (-5))]$	Teorema de la resta
$= 2 - [5 + ((-5) + 3)]$	Conmutativo
$= 2 - [(5 + (-5)) + 3)]$	Asociativo
$= 2 - [0 + 3]$	Inversos
$= 2 - 3$	Identidad
$= 2 + (-3)$	Teorema de la resta
$= 2 + [-(2 + 1)]$	Sustitución
$= 2 + [(-2) + (-1)]$	Teorema 3-14
$= [2 + (-2)] + (-1)$	Asociativo
$= 0 + (-1)$	Inversos
$2 - [5 + (3 - 5)] = -1$	Identidad

28. $15 - [6 - 3(4 + 2)]$

$= 15 - [6 - 3(6)]$	Sustitución $(4 + 2 = 6)$
$= 15 - [6 - 18]$	Sustitución $(3 \cdot 6 = 18)$
$= 15 - [6 + (-18)]$	Teorema de la resta
$= 15 - [6 + (-(6 + 12))]$	Sustitución
$= 15 - [6 + ((-6) + (-12))]$	Teorema 3-14
$= 15 - [(6 + (-6)) + (-12)]$	Asociativo
$= 15 - [0 + (-12)]$	Inversos
$= 15 - (-12)$	Identidad
$= 15 + [-(-12)]$	Teorema de la resta
$= 15 + 12$	Problema 45. Ejercicio III-3. El inverso del inverso de un número es, ese mismo número
$15 - [6 - 3(4 + 2)] = 27$	Sustitución

29. $3 + [2 - 2(5 - 8)]$

$= 3 + [2 - (2 \cdot 5 - 2 \cdot 8)]$	Teorema 3-16
$= 3 + [2 - (10 - 16)]$	Sustitución
$= 3 + [2 + (-(10 - 16))]$	Teorema de la resta
$= 3 + [2 + (-(10 + [-16]))]$	Teorema de la resta
$= 3 + [2 + ((-10) + [-(-16)])]$	Teorema $-(a + b) = (-a) + (-b)$

$= 3 + [2 + ((-10) + 16)]$	Problema 45, Ejercicio III-2
$= 3 + [2 + (16 + (-10))]$	Conmutativo
$= 3 + [2 + (16 - 10)]$	Teorema de la resta
$= 3 + [2 + (6)]$	Sustitución
$= 3 + 8$	Sustitución
$3 + [2 - 2(5 - 8)] = 11$	Sustitución

30. $x + a = b \Longrightarrow x = b - a$

$x + a = b$	Dado
$(x + a) + (-a) = b + (-a)$	Propiedad aditiva de la igualdad
$x + [a + (-a)] = b + (-a)$	Asociativo
$x + 0 = b + (-a)$	Inversos
$= b + (-a)$	Identidad
$x = b - a$	Teorema de la resta

IMPORTANTE: La demostración de esta implicación nos permitirá en el futuro utilizar su conclusión sin necesidad de volver a dar todos los pasos aquí presentados generalizando como sigue:

> "Un número (a) que está sumando en un lado de una igualdad, se puede cancelar si sumamos **su inverso** en el otro lado de la igualdad $(-a)$".
> **Ejemplos:** a) $x + 3 = 5$
> $x = 5 + (-3) = 5 - 3$
> b) $x - 4 = x + (-4) = 2$
> $x = 2 + [-(-4)] = 2 + 4$

CONJUNTO DE PROBLEMAS III-12

1. $\frac{a}{b} = 1 \Longrightarrow a = b, (b \neq 0)$

$\frac{a}{b} = 1$	Dado
$a \cdot \frac{1}{b} = 1$	Teorema 3-17, de la división
$(a \cdot \frac{1}{b})b = 1 \cdot b$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$a(\frac{1}{b} \cdot b) = 1 \cdot b$	Asociativo
$a \cdot 1 = 1 \cdot b$	Inversos
$a = b$	Identidad

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

2. $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}\ (b\neq 0)$

1a. Parte $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$

$-\frac{a}{b}=-(a\cdot\frac{1}{b})$ Teorema de la división 3-17

$=(-a)(\frac{1}{b})$ Teorema 3-12 $-ab=(-a)b=a(-b)$

$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$ Teorema de la división

2a. Parte $-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$

$-\frac{a}{b}=-(a\cdot\frac{1}{b})$ Teorema de la división

$=a(-\frac{1}{b})=a(\frac{-1}{b})$ Teorema 3-12 y la 1a. parte de esta demostración

$a[\frac{-1(-1)}{b(-1)}]=a(\frac{1}{-b})=\frac{a}{-b}$ Teoremas 3-17, 3-18 y 3-19

3. $\frac{1}{(\frac{a}{b})}=\frac{b}{a}\ (a,b\neq 0)$ El recíproco de una fracción es otra fracción cuyo numerador es el denominador de la fracción dada y su denominador es el numerador de la fracción dada.

$\frac{1}{(\frac{a}{b})}=\frac{1}{a\cdot\frac{1}{b}}$ Teorema de la división

$=\frac{1}{a}\frac{1}{\frac{1}{b}}$ Corolario del teorema 3-18. $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}$

$=\frac{1}{a}b$ Problema 46, Ejercicio III-2 que dice $\frac{1}{\frac{1}{(\frac{}{a})}}=a$

$\frac{1}{(\frac{a}{b})}=\frac{b}{a}$ Conmutativo y teorema de la división

4. a) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{\frac{1}{2x+3}}=2x+3$

b) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{y}{x}$

c) $\frac{1}{x-2}$ f) $x\div 2$

5. $\frac{323}{380}=\frac{19\cdot 17}{19\cdot 20}=\frac{17}{20}$

6. $\frac{15xy}{3y}=\frac{3\cdot 5xy}{3y\cdot 1}=\frac{5x}{1}=5x$

7. $\frac{ax+ay}{bx+by}=\frac{a(x+y)}{b(x+y)}=\frac{a}{b}$

8. $\frac{3x-6y}{12x-24y}=\frac{3(x-2y)}{12(x-2y)}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{1}{4}$

9. $\frac{2(a-b)(x-y)}{6(a+b)(x-y)}=\frac{2(a-b)}{2\cdot 3(a+b)}=\frac{a-b}{3(a+b)}$

10. $ax=b\Longrightarrow x=\frac{b}{a}$

$ax=b$ Dado

$(ax)\frac{1}{a}=b(\frac{1}{a})$ Propiedad multiplicativa de la igualdad

$(\frac{1}{a};a)x=b\cdot\frac{1}{a}$ Asociativo, conmutativo

$1\cdot x=b\cdot\frac{1}{a}$ Inversos

$x=b\cdot\frac{1}{a}$ Identidad

$x=\frac{b}{a}$ Teorema de la división

11. a) $\frac{40}{80}=40\div 80=0.5$ b) $\frac{3}{4}=3\div 4=0.75$

c) $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=4\div 3=1.33\ldots$ d) $\frac{8}{5}=8\div 5=1.6$

e) $\frac{12}{1000}=0.012$ f) $2\frac{3}{100}=2.03$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

12. a) $\frac{35}{1000}$ b) $2\frac{1}{10}$ c) $\frac{75}{100}$

d) $\frac{1}{10\,000}$ e) $10\frac{34}{100}$ f) $\frac{80}{100}$

IMPORTANTE: Al igual que en el problema 30 del conjunto de ejercicios anteriores, la demostración nos permitirá brincarnos muchos pasos en la solución de ecuaciones, generalizando como se indica a continuación:

"Si un número $a(a \neq 0)$ es factor de **todo** un lado de una igualdad, se puede cancelar si multiplicamos **todo** el otro lado por **su recíproco** $(\frac{1}{a})$".

Ejemplos: a) $3x = 6$

$$x = 6\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3}$$

b) $\frac{x}{2} = x\left(\frac{1}{2}\right) = 5$

$$x = 5 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 5 \cdot 2$$

UNIDAD IV

APLICACIONES

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

En la Unidad III estudiamos la parte más importante de la estructura del conjunto de números reales con el objeto de facilitar la aplicación de éstas en situaciones reales, sin embargo, es indispensable cierto grado de mecanización para agilizar el desarrollo de las expresiones simbólicas.

En esta unidad ya no exigimos justificación a cada paso, siendo responsabilidad del alumno haber efectuado suficientes ejercicios como para memorizar postulados y teoremas y es también su responsabilidad efectuar los ejercicios de esta unidad para adquirir la agilidad y destreza necesarias, para lo cual se proporciona la terminología que le facilitará la aplicación de la teoría.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al término del estudio de esta unidad, el alumno:

1. Conocerá lo que es un término y una expresión algebraica.
2. Efectuará las operaciones, suma, resta, multiplicación, división y potenciación, con expresiones algebraicas con coeficientes racionales, aplicando los postulados y teoremas conocidos sobre ellas.
3. Empleará el lenguaje de la matemática como instrumento de abstracción y generalización para representar situaciones concretas.
4. Resolverá ecuaciones de 1er. grado, sencillas con una variable.

Diagrama temático estructural

Terminología

Operaciones con expresiones algebraicas

Polinomios

División de expresiones algebraicas

Productos notables

Factorización de expresiones algebraicas

Operaciones con fracciones
$+, -, \cdot, \div$

Propiedades de la igualdad, postulados de campo

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Aplicaciones

Glosario

Expresión algebraica. Se llama expresión algebraica a las combinaciones de números, literales, variables y signos de operación (+, −, ×, ÷).

Término. Se llama término o monomio a una expresión algebraica la cual no está enlazada por los signos de operación (+, −).

Coeficiente. Es el factor o factores que indica el número de sumandos iguales.

Términos semejantes. Se dice que dos o más términos son semejantes cuando difieren únicamente en el coeficiente, pero teniendo iguales el resto de sus factores (o sea, que consisten de las mismas literales y exponentes).

Potencia. Se llama potencia a la representación de un producto de factores iguales entre sí.

Base. Se llama la base de una potencia al factor que se repite tantas veces como lo indica el exponente.

Exponente. El exponente es el número que se escribe en la parte superior de la base, y el cual indica las veces que ella se repite como factor.

Binomio. Es la expresión algebraica que tiene dos términos y están relacionados por un signo de operación.

Trinomio. Es la expresión algebraica que contiene tres términos enlazados por los signos de operación.

Polinomio. Se llama a la expresión racional entera acomodada en orden descendente.

Mínimo común múltiplo. Cuando determinamos la suma de 2 o más fracciones y las debemos cambiar por otras equivalentes con un denominador común y el cual sea mínimo.

Fracción compleja.

Factor común. Se llama al mismo factor que aparece en cada uno de los términos de un polinomio.

Módulo 13

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Reconocerá términos y expresiones algebraicas.
2. Reconocerá en un término algebraico, al coeficiente numérico o y literal respecto a algún factor o factores de ella.
3. Distinguirá términos semejantes en una expresión algebraica.
4. Realizará las operaciones de suma y resta con expresiones algebraicas.

ESQUEMA RESUMEN

Terminología:

- Expresiones algebraicas.
- Términos algebraicos.
- Términos semejantes.
- Suma y resta de expresiones algebraicas.
- Reducción de términos semejantes.
- Ejemplos.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Terminología

Hemos visto algunas nociones fundamentales en el manejo de los números reales, y a medida que avancemos en la construcción de nuestro sistema matemático, seguiremos empleando todos los postulados y teoremas hasta aquí vistos. Es muy importante la **comprensión** de todos esos postulados y teoremas, ya que esas mismas ideas las iremos aplicando en combinaciones de símbolos y letras cada vez más grandes y complicadas, pero que siguen representando a los mismos números reales manejados en esos teoremas y postulados.

Debemos tener presente que aunque nuestro sistema de los números reales es puramente abstracto es "modelo" de sistemas reales concretos y que para sacarle el máximo provecho debemos manejarlo con soltura y fluidez, por lo cual, además de la **comprensión** de las ideas y conceptos de su estructura, es indispensable la "mecanización" de algunas operaciones. La mecanización mencionada se facilita con el uso de una terminología particular para las expresiones de nuestro lenguaje ordinario después de que las hemos simbolizado y así:

> A las combinaciones de números variables y signos de operaciones las llamamos **expresiones algebraicas,** y a las partes que las forman y están separadas por los signos de sumar (+) o restar (−) las llamamos **términos.**

Ejemplos:

a) $2x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 6ax - 15a^2$ forman una expresión compuesta de 4 términos; $2x^3$, $\frac{5}{3}x^2$, $6ax$, $-15a^2$

b) $4x^3 - \frac{6ax^2}{5} + \frac{2x}{a^2}$, es una expresión algebraica con 3 términos a saber: $4x^3$, $-\frac{6ax^2}{5}$, $\frac{2x}{a^2}$

c) $4 + 2(x - 3)$, es una expresión con sólo 2 términos que son el 4 y el producto $2(x - 3)$. En este caso, el segundo término está formado por dos factores, en donde uno de ellos a su vez constituye otra expresión algebraica de dos términos, x, -3.

> Los **términos,** entonces, están formados por factores, mismos que pueden ser numéricos o literales. Se dice que **un** factor o **varios** factores pueden ser el **coeficiente** del resto de los factores que forman a ese término.

Ejemplo:

1) En el término $6ax$ del ejemplo a) anterior
   6 es el coeficiente para el producto ax
   $6a$ es el coeficiente para x
   $6x$ es el coeficiente para a
2) En el término $-15a^2$ del ejemplo a) anterior
   -15 es el coeficiente para a^2

Observe que al factor numérico del ejemplo 2 le consideramos el signo de restar o de inverso aditivo, es decir que consideraremos **siempre** que el signo forma parte del coeficiente, sólo que en el caso del signo positivo o de suma, éste no se escribe cuando sea iniciación de una expresión como se ve en los ejemplos a), b) y c) anteriores para, $2x^3$, $4x^3$ y 4 respectivamente.

Generalmente se utiliza la palabra **coeficiente** a secas para señalar al **coeficiente numérico** (incluyendo el signo) y se acostumbra indicar el coeficiente **para la literal** que nos interese. **Ejemplo:**

En el término $-5axy$
El coeficiente es: -5
El coeficiente para x es: $-5ay$
El coeficiente para y es: $-5ax$
El coeficiente para xy es: $-5a$

> Se dice que dos o más términos son **semejantes** cuando difieren **únicamente** en el coeficiente, el resto de los factores deben ser idénticos.

Ejemplo 1): Los términos $3ax^2$ y $6ax^2$
Los coeficientes son 3 y 6 respectivamente, entonces son términos semejantes para ax^2
Ejemplo 2): Tomemos los términos $2xy^2$, $4ax^2y^2$, $5bxy$
Coeficientes para x^2: $4ay^2$ del 2o. término por lo que no tiene términos semejantes.
Coeficientes para x: $2y^2$ del 1o. y $5by$ del 3o. por lo que 1o. y 3o. son **términos semejantes** en x.
Coeficientes para y^2: $2x$ del 1o. y $4ax^2$ del 2o. por lo que 1o. y 2o. son **términos semejantes** en y^2.
Coeficientes para y: $5bx$ en el 3er. término.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Las expresiones algebraicas se llaman en general **multinomio** cuando tienen varios términos, pero a las más usuales se les llama por su número de términos. **Ejemplo:**

un término $\Longrightarrow$ monomio
dos términos $\Longrightarrow$ binomio
tres términos $\Longrightarrow$ trinomio

De este modo podremos identificar a las expresiones cuando tengamos varias.

Suma y resta de expresiones algebraicas

Si consideramos que las literales de nuestras expresiones algebraicas representan números reales, entonces, cada expresión algebraica representa a su vez un número real y por esa razón debe cumplir como todo número real, con los postulados y teoremas vistos hasta aquí.

Para determinar la suma o la resta de las expresiones algebraicas, operación llamada también **reducción de términos semejantes,** aplicamos los postulados asociativo, conmutativo y distributivo.

Ejemplo a) Sumar $2x + 3y - 4$ con $x - y + 2$

$(2x + 3y - 4) + (x - y + 2) =$	Dado
$= (2x + x) + (3y - y) + (-4 + 2)$	Postulado conmutativo y asociativo
$= (2 + 1)x + (3 - 1)y + (-4 + 2)$	Postulado distributivo: **Nota:** Observe que el coeficiente numérico de un término es la unidad cuando no aparece número escrito. El signo es parte del coeficiente
$= 3x + 2y + (-2)$	Propiedad de sustitución
$(2x + 3y - 4) + (x - y + 2) = 3x + 2y - 2$	Teorema de la resta

Ejemplo b) Restarle a $2x^3 + 3x - 2y^2 + 3$, la expresión $2x - y^2 - 2$

$(2x^3 + 3x - 2y^2 + 3) - (2x - y^2 - 2) =$	Dado
$= 2x^3 + 3x - 2y^2 + 3 - 2x + y^2 + 2$	Teorema 3-14 $[-(a+b) = -a - b]$
$= 2x^3 + (3x - 2x) + (-2y^2 + y^2) + (3 + 2)$	Postulado conmutativo y asociativo
$= 2x^3 + (3 - 2)x + (-2 + 1)y^2 + (3 + 2)$	Postulado distributivo
$= 2x^3 + x + (-1)y^2 + 5$	Propiedad de sustitución
$= 2x^3 + x - y^2 + 5$	Teorema sobre signos 3-12

De los ejemplos anteriores podemos considerar las operaciones de sumar y restar condensadas en los siguientes pasos:

1o. Eliminar todos los paréntesis o símbolos de asociación aplicando los teoremas sobre inversos que correspondan.

2o. Identificar los términos semejantes y asociarlos aplicando el postulado conmutativo cuando sea necesario.

3o. Operar sólo con los coeficientes de los términos semejantes (esto corresponde en los ejemplos a la aplicación del postulado distributivo).

Ejemplo: Efectúe las sumas y restas indicadas en la siguiente expresión:

$4x - [2x - 3y - (x + 4y)] + (x - 8)$

1o. $4x - [2x - 3y - x - 4y] + x - 8$
$4x - 2x + 3y + x + 4y + x - 8$

NOTA: Mientras se adquiere destreza, es conveniente eliminar primero los paréntesis interiores.

2o. $(4x - 2x + x + x) + (3y + 4y) - 8$

3o. $4 - 2 + 1 + 1 = 4$
$3 + 4 = 7$

$4x + 7y - 8$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION IV-13

Diga cuántos términos tiene cada una de las siguientes expresiones algebraicas. Ponga especial atención cuando existan paréntesis.

1. $4x^2 + 2xy - y^2 + 5$
2. $4x - [(2 + x) - 3]$
3. $(4x + 2)(2x - 3)$
4. $6 + 3a + (5a - b)$

En los siguientes problemas identifique los coeficientes (numéricos) en cada expresión.

5. $12p^3 - 8p^2 - 7p + 4$
6. $2a - 3b + 4c - d$
7. $-x^2 - 2xy - x - 7$

En cada uno de los problemas siguientes, elimínense los paréntesis y redúzcanse los términos semejantes.

8. $x - (2y + 3x) - 2y$
9. $3x - (2y - 4x) + 6y$
10. $(2x - 3y) + (y - 4w) - (w - 3x)$
11. $3x - [2x + 3y - (2y - 3x)] + 4y$
12. $9x - (2y - 3x) - [y - (2y - x)] - [2y + (4x - 3y)]$
13. $(-2x^3 + 7x^2 - x) + (4x^3 - 8x^2 + x - 6)$
14. $[(2a - b) + (2a - c)] + (-4a + b + c)$
15. $4a - [a - (2a + b)]$

En los siguientes problemas, asocie los últimos tres términos de cada expresión precediendo el paréntesis con un signo de:

a) Sumar
b) Restar

16. $2x^2 - 3y^2 + 4x - 3y - 1$
17. $x^2 - 2y^2 - x - 3y - 5$
18. $x + y - x^2 - 4 + 3y^2$
19. $r^3 + r^2s + 2rs^2 + s^3$
20. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

Módulo 14

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará potencia, base y exponente de una expresión algebraica.
2. Aplicará los postulados y teoremas conocidos sobre potencias a situaciones dadas con expresiones algebraicas.
3. Dividirá un multinomio entre un monomio.
4. Definirá con sus palabras, polinomio.
5. Calculará el grado de un polinomio respecto a una letra o variable.
6. Dividirá dos polinomios en una misma letra o variable.

ESQUEMA RESUMEN

Multiplicación de expresiones algebraicas.

Potencias, definición y notación.

Teorema: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $(a \in R \text{ y } m, n \in N)$
Teorema $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $(a \in R \text{ y } m, n \in N)$
Teorema: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $(a, b \in R \text{ y } n \in N)$
Ejemplos:

División de expresiones algebraicas.

Teorema: Si $a \in R, a \neq 0$ y $m, n, \in N$
Entonces:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si, } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{si, } m < n \\ 1 & \text{si, } m = n \end{cases}$$

Teorema: $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$; $c \neq 0$

División de un multinomio entre un monomio.

Término racional entero
Expresiones racionales enteras (polinomios).
Grado de un término racional.
Grado de un polinomio.
Ejemplos.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Multiplicación de expresiones algebraicas. Exponentes

Llamamos **potencia** a la representación de un producto de factores iguales, al factor que se repite le escribimos el número de veces que se repite en la parte superior derecha.

Ejemplos:

$a \cdot a \cdot a = a^3$; $x \cdot x = x^2$; $(x + 2)(x + 2)(x + 2)(x + 2) = (x + 2)^4$

Al factor lo llamamos la **base** de la potencia y al número que indica las veces que se repite lo llamamos **exponente.** Cuando el exponente es la unidad no se escribe.

De la definición de potencia se deducen algunos teoremas cuyas conclusiones nos simplifican la multiplicación en general, y la multiplicación de potencias en particular.

Teorema 4-1

$a \in R, m, n \in N$ $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Demostración:

$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a...a)}_{m \text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a...a)}_{n \text{ veces}}$ Definición de potencia

$= \underbrace{a \cdot a \cdot a...a\ a \cdot a...a}_{(m+n) \text{ veces}}$ Postulado asociativo

$= a^{m+n}$ Definición de potencia

Ejemplos: a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$
b) $(x - 1)^2 (x - 1) = (x - 1)^3$
c) $(-2)^4 (-2)^2 = (-2)^6$

Teorema 4-2

$a \in R; m, n \in N$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demuestre este teorema y dé un ejemplo numérico.

Teorema 4-3

$a, b \in R; n \in N$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

Demostración

$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab...ab}_{n \text{ veces}}$ Definición de potencia

$= \underbrace{(a \cdot a \cdot a...a)}_{n \text{ veces}}\underbrace{(b \cdot b \cdot b...b)}_{n \text{ veces}}$ Postulado conmutativo y asociativo

$= a^n b^n$ Definición de potencia

Ejemplos: a) $(2 \cdot 6)^2 = 2^2 \cdot 6^2 = 4 \cdot 36 = 144$
$(2 \cdot 6)^2 = (12)^2 = 144$
b) $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$
$(2x)^2 = (2x)(2x) = 4x^2$

Consideremos ahora las siguientes dos expresiones algebraicas: $(x + y)$ y $(2x + 3y)$, si las multiplicamos, su producto quedaría indicado así: $(x + y) \cdot (2x + 3y)$ aplicando el postulado distributivo se transformaría en $(x + y) \cdot 2x + (x + y) \cdot 3y$ y volviendo a distribuir $(x \cdot 2x + y \cdot 2x) + (x \cdot 3y + y \cdot 3y)$ que con la definición de potencia y postulados conmutativo y asociativo se puede escribir como $(2x^2 + 2xy) + (3xy + 3y^2)$ y reduciendo términos semejantes queda $2x^2 + 5xy + 3y^2$.

La aplicación sucesiva del postulado distributivo hasta donde sea posible, y la reducción de términos semejantes conducen a la multiplicación de las expresiones algebraicas. Para fines prácticos esta operación se efectúa siguiendo el procedimiento que se indica y que equivale a lo anterior.

1o. Se escriben los multinomios uno abajo del otro, ordenando los términos con la potencia descendente de una letra.

2o. Se multiplica cada término del multinomio inferior por todos los términos del multinomio de arriba, procurando que cada término se escriba inmediatamente abajo de su semejante para facilitar la reducción de términos semejantes.

3o. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo: $(x^2 + 2xy + 3y^2) \cdot (x - 2y)$ Ya están ordenados con las potencias de la x.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + 3y^2 \\ x - 2y \\ \hline x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \\ \quad - 2x^2y - 4xy^2 - 6y^3 \\ \hline x^3 + 0x^2y - xy^2 - 6y^3 \end{array}$$

$(x^2 + 2xy + 3y^2) \cdot (x - 2y) = x^3 - xy^2 - 6y^3$

NOTA: El término con coeficiente cero, tiene valor cero independientemente de los valores que se asignen a la "x" y a la "y", de modo que se omite en la respuesta por el postulado de identidad.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

División de expresiones algebraicas. Polinomios

Para dividir las expresiones algebraicas es necesario antes, completar nuestros teoremas sobre los exponentes para conocer la división de potencias.

Teorema 4-4. $a \in R, a \neq 0$ y $m, n \in N$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si, } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{si, } m < n \\ 1 & \text{si, } m = n \end{cases}$$

Demostración: si $m > n \Longrightarrow (m - n) \in N$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a \cdot a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}}}$$

Definición de potencia

$$\frac{\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{(m-n) \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot 1}_{n \text{ veces}}} = a^{m-n}$$

Teorema 3-19 $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$
Postulado de identidad

Demostración: Si, $m < n \Longrightarrow (n - m) \in N$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n \text{ veces}}}$$

Definición de potencia

$$\frac{\overbrace{a \cdot a \ldots a \cdot a \cdot 1}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{(n-m) \text{ veces}}} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Postulado de identidad y Teorema 3-19 $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$

Demostración: Si $m \in n \Longrightarrow (m - n) \in N$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m \text{ veces}}}$$

Propiedad de sustitución de la igualdad, $m = n$

$$= 1$$

Problema: si $a = b \Longrightarrow \frac{a}{b} = 1$

Ejemplos:

a) $\frac{a^7}{a^2} = a^{7-2} = a^5$ b) $\frac{a^5}{a^5} = \frac{1}{a^{5-5}} = \frac{1}{a^2}$ c) $\frac{a^3}{a^3} = 1$

Una vez vista la división de potencias podemos intentar la división de expresiones algebraicas para lo que nos será útil el siguiente teorema:

Teorema 4-5

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, c \neq 0$$

Demostración: $\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c}$ Teorema de la división

$= a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}$ Postulado distributivo

$= \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ Teorema de la división

En el teorema anterior hemos visto una fracción en la que se representa la división de un binomio entre un monomio, cambiándola por la división de cada término del binomio entre el monomio; este resultado,

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

junto con los postulados asociativo y conmutativo, nos permite dividir cualquier expresión algebraica entre un monomio.

Ejemplos:

a) Divídase $12x^4y^3 + 36x^3y^4 - 24x^2y$ entre $3x^2y^2$

$$\frac{12x^4y^3 + (36x^3y^4 - 24x^2y)}{3x^2y^2} = \frac{12x^4y^3}{3x^2y^2} + \frac{36x^3y^4 - 24x^2y}{3x^2y^2}$$

$$= \frac{12x^4y^3}{3x^2y^2} + \frac{36x^3y^4}{3x^2y^2} - \frac{24x^2y}{3x^2y^2}$$ Teorema 4-5

$$= \frac{3 \cdot 4x^4y^3}{3x^2y^2} + \frac{3 \cdot 12x^3y^4}{3x^2y^2} - \frac{3 \cdot 8x^2y}{3x^2y^2}$$ Factorización

$$= 4x^2y + 12xy^2 - \frac{8}{y}$$ División de potencias teorema 4-4 y teorema 3-19 $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$

b) Divídase $6x^3 - 9x^4y + 12xy^2$ entre $3xy$

$$\frac{6x^3 - 9x^4y + 12xy^2}{3xy} = \frac{6x^3}{3xy} - \frac{9x^4y}{3xy} + \frac{12xy^2}{3xy}$$ Aplicación sucesiva de teoremas 4-5 y 3-19

$$= \frac{2x^2}{y} - 3x^3 + 4y$$ Teoremas de división de potencias y simplificación de fracciones

En esta forma podemos concluir que para dividir un multinomio entre un monomio se divide cada término del multinomio entre el monomio.

> Decimos que todo término algebraico es **"racional entero"** para una o varias letras, si está formado del producto de potencias **positivas enteras** de dichas letras y cualquier otro factor que no las contenga.

Por ejemplo: $6ax^2y^2$, $2x^3y^3$, $3y^{2/3}$, son tres términos racionales enteros en "x" pero no en "y"; observe que el último término no contiene a "x" pero, de todas formas, se considera racional entero en "x".

> A las expresiones cuyos términos son **racionales enteros** para alguna letra, se les llama "expresiones racionales enteras o polinomios" y la forma polinomial se les da al acomodar los términos, empezando con el de la potencia mayor de esta letra siguiendo en orden descendente. Para ser prácticos le llamaremos, a la **expresión racional entera** acomodada en orden descendente, simplemente **polinomio.**

Ejemplos:

1) $5ax^4 + 2bx^3y - ax^2y^3 + 7a^2by^2$. Polinomio en "x". Se acostumbra representar a los polinomios con una letra mayúscula y en seguida entre paréntesis la letra para la cual es polinomio.

P(x): $5ax^4 + 2bx^3y - ax^2y^3 + 7a^2by^2$. **Recuerde que la P y la "x" no están multiplicando, es sólo una notación,** se lee **p** en **x.**

2) P(y): $-ax^2y^3 + 7a^2by^2 + 2bx^3y + 5ax^4$. Es la misma P por tratarse de la misma expresión, sólo que ahora con respecto a "y".

Se acostumbra representar a las cantidades constantes en un problema con las primeras letras del alfabeto dejando las últimas sólo para variables.

En la operación de dividir multinomios o expresiones algebraicas es muy conveniente el uso de polinomios, ya que, junto con la división de potencias ya vista, su uso simplifica bastante la operación de dividir. Las siguientes tres definiciones nos proporcionan la terminología adecuada para manejar los polinomios.

> 1a. Definición: "El **grado** de un término racional entero en **una letra** es el **exponente** de esa letra". El primer término del ejemplo 1 anterior es de 4o. grado en "x". El segundo término es de 1er. grado en "y".
>
> 2a. Definición: "El **grado** de un término racional entero en **dos o más letras** es la **suma de los exponentes** de esas letras". El segundo término del ejemplo 1) anterior es de 4o. grado en "x" e "y", porque "x" tiene un tres como exponente y "y" un uno, que suman 4.
>
> 3a. Definición: "El grado de un **polinomio** en una letra es el grado del 1er. término, es decir que el polinomio toma como grado el del término que lo tiene más alto". El grado de P(x) es 4o. y el grado de P(y) es 3o.

Ahora consideraremos la división de dos polinomios en una misma letra; el procedimiento es semejante al de la división aritmética.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

1. Divídase el primer término del dividendo entre el 1er. término del divisor.
2. Multiplíquese el cociente obtenido, por cada término del divisor y réstese el producto obtenido del dividendo.
3. Divídase el primer término del resultado de la resta para obtener el segundo término del cociente y con él repítase la operación indicada en el número 2.
4. Continúese el proceso hasta que el resultado de la resta sea cero o un polinomio de **menor** grado que el polinomio **divisor**; a este resultado se le llama **residuo** de la división.

Ejemplos:

1) Divídase $y^3 - 4y^2 + 5y - 2$ entre $y - 1$

Dividendo $P(y) = y^3 - 4y^2 + 5y - 2$ de 3er. grado

Divisor $D(y) = y - 1$ de 1er. grado

$y^2 - 3y + 2$ (cociente)

Divisor $y - 1$) $y^3 - 4y^2 + 5y - 2$

$-y^3 + y^2$ (resta)

Paso 1) $\frac{y^3}{y} = y^2$

Paso 2) $y^2 (y - 1) = y^3 - y^2$ esto se resta

$-3y^2 + 5y - 2$

Paso 3) $\frac{-3y^2}{y} = -3y$, 2o. término del cociente

$3y^2 - 3y$ (resta)

Paso 2) $-3y (y - 1) = -3y^2 + 3y$ que se resta

$2y - 2$

Paso 4) $\frac{2y}{y} = 2$,

$-2y + 2$ (resta)

0 (residuo)

3er. término del cociente $2(y - 1) = 2y - 2$

Si llamamos **C(y)** al polinomio del cociente y **R** al residuo, la división se podría representar como sigue:

$$\frac{P(y)}{D(y)} = C(y)$$ cuando el residuo es 0

$$\frac{y^3 - 4y^2 + 5y - 2}{y - 1} = y^2 - 3y + 2$$

2) Divídase $-6x^3 + x^2y - 12xy^2 - 6y^3$ entre $2x - 3y$

En este caso la división se representa

$$\frac{P(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{\text{Residuo}}{D(x)}$$ Cuando $R \neq 0$

$$\frac{-6x^3 + x^2y - 12xy^2 - 6y^3}{2x - 3y} = -3x^2 - 4xy - 12y^2 + \frac{-42y^3}{2x - 3y}$$

$-3x^2 - 4xy - 12y^2$

$2x - 3y$) $-6x^3 + x^2y - 12xy^2 - 6y^3$

$6x^3 - 9x^2y$

$-8x^2y - 12xy^2 - 6y^3$

$8x^2y - 12xy^2$

$-24xy^2 - 6y^3$

$24xy^2 - 36y^3$

$-42y^3$ (residuo)

La multiplicación de cada término del cociente la hacemos como en aritmética y le cambiamos el signo para restar.

$\frac{-6x^3}{2x} = -3x^2$

$\frac{-8x^2y}{2x} = -4xy$

$\frac{-24xy^2}{2x} = -12y^2$

3) Divídase $5x^3 - 14x + 3$ entre $x - 2$

Observemos que el polinomio en "x" del dividendo no tiene el término de 2o. grado; para hacer la división consideraremos siempre todos los términos en orden descendente, escribiendo los que no contenga el polinomio con un coeficiente cero, ya que por el postulado de identidad y teorema de la multiplicación por cero, no cambiamos en nada el valor de la expresión.

$5x^2 + 10x + 6$ (cociente)

(divisor) $x - 2$) $5x^3 + 0x^2 - 14x + 3$ (dividendo)

$-5x^3 + 10x^2$

$10x^2 - 14x$

$-10x^2 + 20x$

$6x + 3$

$-6x + 12$

15 (residuo)

En esta ocasión nos acercamos más a la división aritmética, escribiendo de la resta sólo los términos indispensables.

$\frac{5x^3}{x} = 5x^2$

$\frac{10x^2}{x} = 10x$

$\frac{6x}{x} = 6$

$$\frac{5x^3 - 14x + 3}{x - 2} = 5x^2 + 10x + 6 + \frac{15}{x - 2}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION IV-14

Efectúe las operaciones indicadas. Use teoremas de exponentes.

1. $y^{13} \cdot y^{11}$
2. $(-2)^2 (-2)^5$
3. $(5x)^4$
4. $(2x^2)^3$
5. $3xy \cdot (x^2 y^3)$
6. $a(a+2)^2 a^3(a+2)^4$
7. $4x^3y^2 (5xy^2 + 4x^2y)$

Efectúe las operaciones indicadas escribiendo la respuesta en la forma más simple.

8. $2ab (3a^2 + 3ab - 5b^2)$
9. $(3x + 2)(x + 5)$
10. $(x - 2)(x^2 + 5x - 3)$
11. $(x - 2y)^2$
12. $(x^2 - 2y^2)(x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4)$
13. $(x - 2)(x + 3)(x + 2)$
14. $(x^n - y^n)^3$
15. $2xy (3y - x - 1)^2$

En los problemas del 16 al 20 escriba los multinomios dados en la forma polinomial diciendo el grado del polinomio. La letra se indica en la notación para polinomios.

16. $2ax + 5y^2 - 3x^2y + a^3x^3$; $P(x)$
17. $4x^4 - 2x^3y + y^3 - 3x^2y^2$; $P(y)$
18. $3x^2y - 4xy^2 + 6x^4y^3$; $P(x)$
19. $7x^3y^2 - 14x^5y^3 + 28x^8y^5 - 21x^7y^6$; $P(y)$
20. $4z^2x + 5y + 4z^2x^2 - 3xyz$; $P(z)$

Efectúe las siguientes divisiones de potencias, usando los teoremas sobre exponentes.

21. $\dfrac{(x+y)^{12}}{(x+y)^4}$

22. $\dfrac{10m^6n}{15m^3n}$

23. $\dfrac{(2x^2y)^4}{(-3xy)^4}$

24. $\dfrac{24(x+y)^3(x-y)^2}{30(x+y)^2(x-y)^5}$

25. $\dfrac{(a+b)^3}{(ab)^3}$

Efectúe la división del multinomio y el monomio que se indica.

26. $(6x^3 - 9x^4y) \div (3xy)$
27. $(7a^3b^2 + 28a^6b^5 - 21a^7b^6 - 14a^5b^3) \div (7a^3b^2)$

Efectúe las divisiones de polinomios que se indican.

28. $(a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$
29. $(z^4 + z^3 + 2z + 15) \div (2z^2 - 6z + 4)$
30. $\dfrac{P(x)}{D(x)}$, si $P(x) = 3x^5 + 11x^4 - 15x^2 + 7x + 9$ y $D(x) = x^2 + 2x - 1$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 15

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Operará con facilidad algunos productos de binomios con coeficientes racionales llamados "productos notables", tales como: cuadrado de un binomio, cubo de un binomio, binomios conjugados.

2. Aplicará sus conocimientos sobre "productos notables" a factorizaciones que los involucren.

3. Factorizará expresiones algebraicas sencillas y valorará la utilidad de llegar a factorizaciones completas.

ESQUEMA RESUMEN

Productos notables.

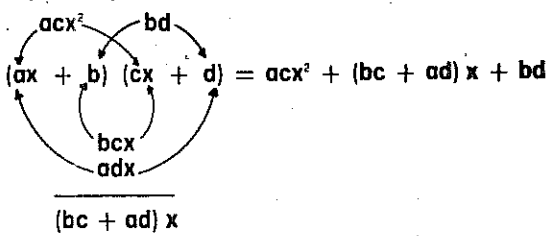
- Producto de binomios conjugados.
- Cuadrado de un binomio.
- Cubo de un binomio.
- Suma o diferencia de cubos.

Factorización.

- Factor común.
- Diferencia de cuadrados.
- Trinomios.
- Suma y diferencia de cubos.
- Factorización por agrupación.

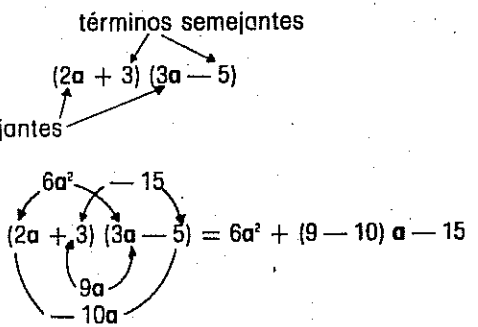
En las multiplicaciones de las expresiones algebraicas, algunas se repiten con mucha frecuencia y otras, aunque no iguales, pueden tomar la misma forma de ellas, de modo que los productos que resultan se repiten constantemente. Es por esta razón que a esos productos los llamamos PRODUCTOS NOTABLES y su memorización nos permite encontrar los productos efectuando las multiplicaciones mentalmente. "Las letras usadas en las fórmulas nos representan a cualquier expresión algebraica y su presentación en esta forma es sólo para facilitar su memorización". El alumno debe comprobar las fórmulas efectuando las multiplicaciones.

Multiplicación por inspección.

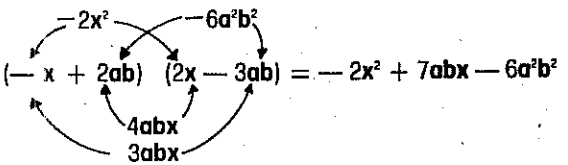


Dos binomios con términos semejantes se pueden multiplicar usando sólo los coeficientes, lo que en la mayoría de los casos puede hacerse mentalmente.

Ejemplo a)



Ejemplo b)



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Diferencia de cuadrados. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Este producto de dos binomios es el único caso en que no resulta un trinomio. A los factores que sólo difieren en un signo se les llama **BINOMIOS CONJUGADOS.**

Ejemplo a) $(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - (5)^2 = 4x^2 - 25$

Ejemplo b) $(a + b + 3)(a + b - 3)$ Este, aunque no es producto de binomios, su producto puede conseguirse dándole esa forma mediante el postulado asociativo.

$[(a + b) + 3][(a + b) - 3] = (a + b)^2 - (3)^2 = (a + b)^2 - 9$

Cuadrado de un binomio o trinomio cuadrado perfecto

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Con el doble signo consideramos las dos posibilidades en un binomio y los signos en el producto se corresponden con los del factor, al positivo en el factor, le corresponde el positivo en el producto, por lo que están escritos en el mismo orden de arriba abajo.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Ejemplo b) $(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2$
$= 4a^2 - 12a + 9$

Cubo de un binomio. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Ejemplo a) $(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3(2x)y^2 + y^3$
$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

Ejemplo b) $(a - 3b)^3 = a^3 - 3(a)^2(3b) + 3(a)(3b)^2 - (3b)^3$
$= a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

Suma o diferencia de cubos. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Ejemplo a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - (3)^3 = x^3 - 27$

Ejemplo b) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) = a^3 + (2)^3 = a^3 + 8$

Atención: El segundo factor de este producto es muy parecido al trinomio cuadrado perfecto. Cuídese de no confundirlos.

Factorización

En la primera unidad definimos lo que es un número compuesto y un número primo, y al proceso de descomponer un número en sus factores primos lo llamamos factorización **completa** de los números enteros. Las expresiones algebraicas nos representan números reales y si invertimos el proceso de encontrar un producto, que vimos en el tema anterior, estaremos factorizando las expresiones algebraicas, pero como en las expresiones algebraicas tenemos literales no podemos determinar los factores primos de los números que representan, ya que ni siquiera sabemos si son números enteros, por lo que en el futuro y hasta que se diga otra cosa consideraremos que las literales son **números enteros.**

Factorizamos **completamente** cuando llegamos a una expresión en que cualquier factorización posterior produce números fraccionarios.

Ejemplo: $2x + 6y = 2(x + 3y)$ distributivo.

Si se factoriza usando el 3 desconociendo el número representado por x quedaría $2 \cdot 3\left(\frac{1}{3}x + y\right)$, interviene una fracción por lo que la factorización ya era completa.

No existen fórmulas para la factorización, pero siendo el proceso inverso de la multiplicación, la experiencia en la aplicación de las fórmulas recién vistas nos permitirá reconocer cuando una expresión algebraica es el producto resultante de factores conocidos. Es sumamente importante la práctica intensa para dominar este proceso tan importante.

Factor común

Ejemplo 1) Descompóngase en factores $2ax^2 - 4ay^2 + 8a^2x$

El polinomio tiene un factor común en todos sus términos (2a). Aplicando el distributivo;

$2ax^2 - 4ay^2 + 8a^2x = (2a)x^2 - (2a)2y^2 + (2a)4ax = 2a(x^2 - 2y^2 + 4ax)$

Ejemplo 2) $4x^2 + 8x$

Esta expresión tiene un factor común (4x) y puede escribirse como

$(4x)x + 4x(2) = 4x(x + 2)$

Ejemplo 3) $a(x + 2y) - 3(x + 2y)$

Un factor común, $(x + 2y)$, está distribuido

$a(x + 2y) - 3(x + 2y) = (x + 2y)(a - 3)$

Diferencia de cuadrados

Ejemplo 4) $4x^2 - 9y^2$

Esta expresión puede reconocerse como una diferencia de cuadrados $(2x)^2 - (3y)^2$ producto de binomios conjugados.

$4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$

Ejemplo 5) $27ax^2 - 75a^3$

Reconocemos un factor distribuido en esta expresión,

$(3a)\ 27ax^2 - 75a^3 = (3a)(9x^2) - (3a)(25a^2) = 3a(9x^2 - 25a^2)$

El 2o. factor puede reconocerse como una diferencia de cuadrados $(3x)^2 - (5a)^2$, por lo que puede seguirse factorizando.

$3a(9x^2 - 25a^2) = 3a[(3x)^2 - (5a)^2] = 3a(3x + 5a)(3x - 5a)$

Trinomios

Ejemplo 6) $x^2 - 8x - 20$

Los trinomios son generalmente producto de dos binomios con términos semejantes y su multiplicación puede hacerse por inspección. En este caso, con el 1 como coeficiente de x^2, la factorización se concreta a buscar dos factores cuyo producto sea -20 y la suma -8; encontramos que -10 y $+2$ cumplen.

Preparatoria abiertaOnline
Disponible en
Preparatoria Abierta Online
www.prepa-abierta.com

$$x^2 - 8x - 20 = (x \quad ?)(x \quad ?) = (x - 10)(x + 2)$$

? x $-10x$
? x $2x$
$-8x$ $-8x$

Ejemplo 7) $12x^2 + 7xy - 10y^2$

Este trinomio puede descomponerse por aproximación sucesiva o tanteo para encontrar los factores de 12 y -10 cuyos productos inferiores de la multiplicación por inspección nos suman $+7$.

$acx^2 = 12x^2 \; bdy^2 = -10y^2$

$(ax + by)\;(cx + dy)$

bcxy
adxy

$(ad + bc)\,xy = 7xy$

$ac = 12$
$bd = -10$
$(ac + bc) = 7$

Es el problema más difícil de los vistos hasta aquí y sólo el desarrollo de la intuición a través de la experiencia nos puede facilitar las soluciones.

factores de 12: $4 \cdot 3$, $6 \cdot 2$, $\boxed{12 \cdot 1}$

factores de 10: $5 \cdot 2$, $\boxed{10 \cdot 1}$

$\boxed{12}\; x \quad - \boxed{10}\; y = -10xy$
$\boxed{1}\; x \quad \boxed{1}\; y \quad 12xy$
$2xy$

Escogemos primero los factores en círculos y los acomodamos de modo que se formen dos binomios, uno sobre otro, con las combinaciones que dan los factores. Los signos para obtener -10 deben ser opuestos, pero ninguna combinación puede sumar $+7$
$10 - 12 = -2$
$-10 + 12 = 2$

$4x \; + \; 5y = +15xy$
$3x \; - \; 2y = -8xy$
$7xy$

La combinación de 15 y 8 que nos da $+7$ es, $+15$ y -8, luego los binomios deben ser $(4x + 5y)$ y $(3x - 2y)$
$12x^2 + 7xy - 10y^2 = (4x + 5y)\;(3x - 2y)$

Ejemplo 8) $6x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4$
factores de 6: $6 \cdot 1$, $2 \cdot 3$
factores de 3: $3 \cdot 1$

$6x^2 \quad -3y^2 = 3x^2y$
$1x^2 \quad 1 \cdot y^2 = 6x^2y^2$

Los factores de 3 deben tener signos opuestos, ninguna combinación nos dará $+7$
$-3 + 6 = 3 \quad 3 - 6 = -3$

$6x^2 \quad -1 \cdot y^2 = -1 \cdot x^2y^2$
$1 \cdot x^2 \quad 3y^2 = 18x^2y^2$

tampoco obtendremos con estos números el $+7$

$2x^2 \quad 3y^2 = 9x^2y^2$
$3x^2 \quad 1 \cdot y^2 = 2x^2y^2$

para obtener $+7$ necesitamos $+9$ y -2 luego los binomios serán $(2x^2 + 3y^2)$ y $(3x^2 - y^2)$

$$6x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4 = (2x^2 + 3y^2)\,(3x^2 - y^2)$$

Ejemplo 9) $9x^2 - 48x + 64$

Este trinomio podría ser el cuadrado de un binomio ya que $+9x^2$ y $+64$ son los cuadrados exactos de $3x$ y 8. Lo único que debemos comprobar es que $48x$ sea el doble producto de $3x$ y 8. $(3x)\,(8) = 24x$, $(24x) \cdot 2 = 48x$.

$$9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2$$
$(3x) \quad (8)$

Cuando un trinomio es el cuadrado de un binomio le llamamos TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Suma y diferencia de cubos

Ejemplo 10) $8y^3 + 1$
Esta expresión es una suma de cubos $(2y)^3 + (1)^3$

$8y^3 + 1 = (2y)^3 + (1)^3$ operación mental
$= (2y + 1)\,[(2y)^2 - (2y)\,(1) + (1)^2]$ operación mental
$= (2y + 1)\,(4y^2 - 2y + 1)$

Ejemplo 11) $a^3 - 27$ Diferencia de cubos

$a^3 - 27 = a^3 - (3)^3$ mental
$= (a - 3)\,[a^2 + (a)\,(3) + (3)^2]$ mental
$= (a - 3)\,(a^2 + 3a + 9)$

Factorización por agrupación

Ejemplo 12) $ax - ay - bx + by$

Esta expresión con cuatro términos no la podemos factorizar en dos binomios con términos semejantes; el procedimiento a seguir es aplicar primero el postulado asociativo entre los términos que a nuestro juicio puedan factorizarse, y donde den con su factorización un factor común que nos permita lograr la factorización completa. Recuerde los ejercicios 16 a 20 del conjunto IV-1.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$(ax - ay) - (bx - by)$ $\qquad$ $(ax - bx) - (ay - by)$

$a(x - y) - b(x - y)$ $\qquad$ $(a - b)x - (a - b)y$

factor común $\qquad$ factor común

$(a - b)(x - y)$ $\qquad$ $(a - b)(x - y)$

Recordemos que cuando la factorización es completa los factores son siempre los mismos, no importa en qué orden hayamos factorizado.

Ejemplo 13) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3$
$(4x^2 - 12xy + 9y^2) + (4x - 6y) - 3$
$(2x - 3y)^2 + 2(2x - 3y) - 3$

Esta factorización no es completa, ya que tenemos unas sumas de productos, pero el polinomio tiene la forma del polinomio $x^2 + (b + d)x + bd$ que es el producto de $(x + b)(x + d)$ por lo que se puede factorizar la expresión anterior tomando a: $bd = -3$ $b + d = 2$ $x = 2x - 3y$ de donde $b = 3$ y $d = -1$

$(x + b)$ $\qquad$ $(x + d)$
$[(2x - 3y) + 3]\,[(2x - 3y) - 1]$
$(2x - 3y + 3)(2x - 3y - 1)$

PPROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION IV-15

En los siguientes problemas encuentre el producto mentalmente. Use las fórmulas vistas y postulado distributivo.

1. $-2a(3a - 4a^2)$
2. $(-2xy)(-3x^2y^3)$
3. $-a^3b^2(a^3 - 8b^3)$
4. $(2k - 3)(k - 7)$
5. $(a + b)(c + d)$
6. $(x - y)(x + y)$
7. $(y - 8)(y + 3)$
8. $(x - 2)(x + 5)$
9. $[(x - 2y) + 4]^2$
10. $[2(x - 3y) + 5]\,[3(x - 3y) - 2]$
11. $(2x + 5)^2$
12. $(x - 2y - z)^2$
13. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$
14. $(y^3 + 7)(y^3 - 2)$
15. $(2m - n + 3)^3$
16. $(5x - 3y)^3$
17. $(2x + 3y)^3$
18. $(x + 3y + 2z - 4w)(x + 3y - 2z + 4w)$
19. $(4x - 2y - 3z + 3w)(4x + 2y + 3z + 3w)$
20. $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y)^2$

Indicación: Use postulado asociativo

Sugerencia: Para memorizar las fórmulas, utilice su significado y no las letras con que se presenta, pues éstas cambian en los problemas.

Ejemplo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado en un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.
Procure usar sus propias palabras.

Factorice completamente

21. $3x^2 - 9x$
22. $y^3 + 4y$
23. $a^2x^2 + a^2$
24. $9 - a^2$
25. $225a^8 - 64b^2$
26. $3y(2x + 5) - 4x(2x + 5)$
27. $x^2 - 9$
28. $x^2 - a^2$
29. $169x^2 - 225y^2$
30. $t^2 - 5t - 66$
31. $x^2 - 5x - 14$
32. $(x + 2y)^2 - z^2$
33. $8x^{6n} + 27y^{3n}$
34. $x^2 - 8x + 16$
35. $5x^2 - 30xy + 45y^2$
36. $a^2b^2 - ab - 20$
37. $(x + y)^2 - 7(x + y) + 10$
38. $64 + 144k + 81k^2$
39. $3t^3 - 15t^2 + 12t$
40. $5^2 - (a + b)^2$
41. $x^2 - 4x(a + b) + 4(a + b)^2$
42. $x^6 - 17x^4 + 16$
43. $ax - ay - by + bx$
44. $2a - 6 - ab^2 + 3b^2$
45. $x^4 - 10x^2 + 9$
46. $7t^2 - 42t + 63$
47. $xy^3 + 2y^2 - xy - 2$
48. $2(x + 2)^2(x - 3) + 3(x + 2)(x - 3)^2$
49. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zw - w^2$
50. $x^6 - 7x^3 - 8$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 16

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al estudiar este módulo, el alumno:

1. Efectuará las cuatro operaciones fundamentales con expresiones algebraicas fraccionarias.
2. Aplicará sus conocimientos anteriores para simplificar expresiones algebraicas dadas hasta transformarlas en irreductibles.
3. Expresará en lenguaje simbólico matemático, proposiciones y situaciones problemáticas en lenguaje común.

ESQUEMA RESUMEN

Simplificación de fracciones.

- Suma de fracciones.
- Mínimo común múltiplo.
- Multiplicación y división de fracciones.
- Simplificación de fracciones complejas.
- Ejemplos.

Simplificación de fracciones

En el manejo de las fracciones es conveniente tener presente el teorema 3-19 $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$ $(y, z \neq 0)$ pues nos permite:

1er. Caso. Aplicado de derecha a izquierda $\frac{xz}{xy} = \frac{x}{y}$ simplificar las fracciones, es decir, reducirlos a términos más simples, simplificando un factor repetido en el numerador y denominador.

Ejemplos:

a) $\frac{54}{48} = \frac{27 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{27}{24} = \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{8}$

b) $\frac{x^2 - 4}{6x^2 + 12x} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{6x(x + 2)} = \frac{x - 2}{6x}$

c) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$

2o. Caso. El teorema aplicado tal como está nos permite modificar una fracción modificando sus términos a nuestra conveniencia.

$(\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}, y, z \neq 0)$

Ejemplos:

a) $\frac{9}{8}$ hagamos que su denominador sea 48

$\frac{9 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{54}{48}$

b) $\frac{3a + 1}{2a - 3}$ hagamos que su denominador sea $(2a - 3)(a + 1)$

$\frac{3a + 1}{2a - 3} = \frac{(3a + 1)(a + 1)}{(2a - 3)(a + 1)}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

c) $\frac{2x}{x-2}$ hagamos que su denominador sea $x^2 - 4$

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+4x}{x^2-4}$$

Aunque las operaciones efectuadas en los ejemplos anteriores son sencillas, es muy fácil confundirnos en la aplicación del teorema 3-19.

Ejemplos:

a) $\frac{3+x}{x} = 3$ Incorrecto. $\frac{3+7}{7} = \frac{10}{7} \neq 3$

b) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = -6x$ Incorrecto.

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3}{x+3}$$ Correcto.

c) $\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2} = \frac{a^2}{b^2}$ Incorrecto. $\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}$ No tiene simplificación

El teorema justifica la simplificación de **factores** únicamente, $(\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y})$ debemos insistir en el hecho de que esos factores lo son de toda la expresión; de todo el numerador y todo el denominador y no sólo factores en un término de la expresión.

Ejemplo:

a) $\frac{4x^2-20}{4(x-5)} = \frac{x^2-20}{x-5}$ ¡Incorrecto! pues el 4 del numerador multiplica sólo ax^2.

b) $\frac{4x(x-5)}{4(x-5)} = \frac{4x}{4} = x$ Correcto, pues $(x \cdot 5)$ y 4 son factores del numerador y denominador a la vez.

Suma de fracciones

La suma algebraica de dos o más fracciones con el mismo denominador es una fracción con este denominador común y la suma de todos los numeradores como numerador. El teorema 4-5 nos señala y justifica la operación $(\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c})$, si de acuerdo a la propiedad de simetría de la igualdad $(a = b \Longrightarrow = a)$ lo escribimos como $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Ejemplos:

a) $\frac{5}{2a} + \frac{7}{2a} = \frac{5+7}{2a} = \frac{12}{2a} = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot a} = \frac{6}{a}$

b) $\frac{2x^2}{x-4} + \frac{5}{x-4} - \frac{3x}{x-4} = \frac{2x^2+5-3x}{x-4} = \frac{2x^2-3x+5}{x-4}$

Con frecuencia nos encontramos factores o denominadores que sólo difieren en el signo por lo que un cambio en la posición del signo (Problema 2 de III-12) en la fracción nos presenta el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{3x-2y}{5x-3} + \frac{2x-y}{3-5x} =$$

$$= \frac{3x-2y}{5x-3} + \frac{2x-y}{-(-3+5x)}$$ Teorema 3-14 $-(a+b) = -a-b$

$$= \frac{3x-2y}{5x-3} + \frac{-(2x-y)}{5x-3}$$ $(\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b})$ y Conmutativo

$$= \frac{(3x-2y)-(2x-y)}{5x-3}$$

$$= \frac{3x-2y-2x+y}{5x-3}$$

$$= \frac{x-y}{5x-3}$$

Para determinar la suma de dos o más fracciones con diferentes denominadores debemos cambiar las fracciones por otras equivalentes y con un denominador común, preferentemente el mínimo para que el resultado sea lo más simple posible, al que llamaremos el **Mínimo Común Múltiplo (MCM);** para efectuar esto utilizamos el 2o. caso visto al principiar este tema para modificar los términos de las fracciones.

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de un conjunto de números o expresiones algebraicas lo encontramos con el siguiente procedimiento:

1. Factorice totalmente todos los números y expresiones.
2. Forme un producto con cada uno de los factores positivos diferentes, escogiendo el que tenga el exponente más grande.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Ejemplos:

a) **MCM** de 75, 15, 36, 6

$75 = 5^2 \cdot 3$
$15 = 5 \cdot 3$
$36 = 3^2 \cdot 2^2$
$6 = 3 \cdot 2$

Factores positivos diferentes 5, 3, 2, escogemos cada uno de ellos con el exponente más grande que tengan. **MCM** $= 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 900$

b) MCM de $6x - 12$, $16 - 4x^2$, $x^2 + 4x + 4$

$6x - 12 = 6(x - 2) = 2 \cdot 3(x - 2)$
$16 - 4x^2 = 4(4 - x^2) = 2^2 (2 - x)(2 + x)$
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

Factores positivos diferentes 2, 3, $(x - 2)$ y $(x + 2)$; $(2 - x)$ es el factor negativo de $(x - 2)$ que ya fue considerado y sólo se toma una vez cada factor

$$\text{MCM} = 2^2 \cdot 3\,(x - 2)\,(x + 2)^2 = 12(x - 2)\,(x + 2)^2$$

Ejemplo a) Sumar algebraicamente $\frac{a}{3b} + \frac{9a}{2b} - \frac{15}{b}$; necesitamos cambiar las fracciones por otras equivalentes con un común denominador que será el MCM de **3b, 2b, b**; MCM $= 2 \cdot 3 \cdot b$

$$\frac{a \cdot 2}{3b \cdot 2} + \frac{9a \cdot 3}{2b \cdot 3} - \frac{15 \cdot 2 \cdot 3}{b \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\frac{2a}{6b} + \frac{27a}{6b} - \frac{90}{6b} = \frac{2a + 27a - 90}{6b} = \frac{29a - 90}{6b}$$

Ejemplo b)

$$\frac{4x - 5}{2x - 3} + \frac{-8x + 5}{14x - 21}$$ EL MCM de $2x - 3$, $7(2x - 3)$ es $7(2x - 3)$

$$\frac{(4x - 5)7}{(2x - 3)7} + \frac{-8x + 5}{7(2x - 3)} = \frac{(28x - 35) + (-8x + 5)}{7(2x - 3)} =$$

$$= \frac{20x - 30}{7(2x - 3)} = \frac{10(2x - 3)}{7(2x - 3)} = \frac{10}{7}$$

El procedimiento se puede concretar en el siguiente ejemplo c)

Ejemplo c)

$$\frac{3x}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$$

$(x + 2)(x - 2)$ $\quad$ $(x - 2)(x - 3)$ Denominadores factorizados

MCM $= (x + 2)(x - 2)(x - 3)$

$$= \frac{3x(x - 3)}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$$

$$- \frac{2(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)(x + 2)}$$ Denominador común

$$= \frac{3x(x - 3) - 2(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$$ Suma de los numeradores

$$= \frac{(3x^2 - 9x) - (2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$$ Multiplicación en el numerador

$$= \frac{3x^2 - 11x - 4}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$$ Suma de numeradores

$$= \frac{(3x + 1)(x - 4)}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$$ Numerador resultante factorizado para ver la posibilidad de reducir más la fracción.

Ejemplo d)

$$\frac{3x}{x^2 - 4x + 4} + \frac{5x^2}{3(x^2 - 4)} + \frac{2}{2x^2 - x - 6}$$ Denominadores factorizados

$(x - 2)^2$ $\quad$ $3(x + 2)(x - 2)$ $\quad$ $(2x + 3)(x - 2)$

$$\text{MCM} = 3(x - 2)^2 (x + 2)(2x + 3)$$

$$= \frac{3x \cdot 3(x + 2)(2x + 3)}{(x - 2)^2 3(x + 2)(2x + 3)} +$$

$$= \frac{5x^2 (x - 2)(2x + 3)}{3(x + 2)(x - 2)(x - 2)(2x + 3)} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 3(x - 2)(x + 2)}{(2x + 3)(x - 2)\,3(x - 2)(x + 2)}$$ Denominador común

$$= \frac{9x(x + 2)(2x + 3) + 5x^2(x - 2)(2x + 3) + 6(x - 2)(x + 2)}{3(x - 2)^2 (x + 2)(2x + 3)}$$ Suma de fracciones.

$$= \frac{(18x^3 + 63x^2 + 54x) + (10x^4 - 5x^3 - 30x^2) + (6x^2 - 24)}{3(x - 2)^2 (x + 2)(2x + 3)}$$ Suma de numeradores, multiplicando y reduciendo términos semejantes.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$= \frac{10x^4 + 13x^3 + 39x^2 + 54x - 24}{3(x-2)^2(x+2)(2x+3)}$$

Multiplicación y división de fracciones

La multiplicación de dos o más fracciones es una aplicación directa del teorema 3-18 $\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}\ y, w \neq 0\right)$

Ejemplo a) $\frac{34}{65} \cdot \frac{39}{85} = \frac{34 \cdot 39}{65 \cdot 85}$

Antes de efectuar las multiplicaciones en numerador y denominador, obteniendo números y expresiones muy grandes, es conveniente factorizar totalmente cada factor, indicar los productos y simplificar

$$\frac{34 \cdot 39}{65 \cdot 85} = \frac{(17 \cdot 2)(13 \cdot 3)}{(13 \cdot 5)(17 \cdot 5)} = \frac{6}{25}$$

Ejemplo b)

$$\frac{3x^3}{4y^2} \cdot \frac{5y}{x^2} = \frac{3x^3 \cdot 5y}{4y^2 \cdot x^2} = \frac{3 \cdot 5x}{4y} = \frac{15x}{4y}$$

Ejemplo c)

$$\frac{x^2 - 9}{3x^2 + 11x - 4} \cdot \frac{5x + 20}{x^2 - 4x + 3} = \frac{[(x+3)(x-3)][5(x+4)]}{[(3x-1)(x+4)][(x-3)(x-1)]}$$

$$= \frac{5(x+3)}{(3x-1)(x-1)} = \frac{5x + 15}{3x^2 - 4x + 1}$$

Para la división de dos fracciones aplicamos el teorema de la división $\left(\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}\right)$ y el teorema 3-21 $\left(\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}\right)$ Ejemplos:

Ejemplo a) $\frac{3}{7} \div \frac{13}{11} = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{\left(\frac{13}{11}\right)} = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{13}{11}\right)}$ Teorema de la división

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{13}$ Teorema 3-21

$= \frac{33}{91}$

Ejemplo b)

$\frac{6}{7} \div \frac{8}{9} = \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} = \frac{(2 \cdot 3)(3^2)}{7 \cdot (2^3)} = \frac{3^3}{7 \cdot 2^2} = \frac{27}{28}$ Siempre simplifica todo lo posible

Ejemplo c)

$$\frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} \div \frac{x + y}{x} = \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} \cdot \frac{x}{x + y} = \frac{(x+y)(x-y) \cdot x}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)} =$$

$$= \frac{x}{x^2 + xy + y^2}$$

Ejemplo d)

$$\frac{x^2 - 9y^2}{3ax + 6ay} \div \frac{x^2 - 3xy}{ax + ay} = \frac{(x-3y)(x+3y)}{3a(x+2y)} \div \frac{x(x-3y)}{a(x+y)} =$$

$$\frac{(x-3y)(x+3y)}{3a(x+2y)} \cdot \frac{a(x+y)}{x(x-3y)} = \frac{(x-3y)(x+3y)(x+y)a}{3a(x+2y)x(x-3y)}$$

$$= \frac{(x+3y)(x+y)}{3x(x+2y)}$$

Simplificación de fracciones complejas

A una fracción que contiene en su numerador o en su denominador, o en ambos, más fracciones, le llamamos una **fracción compleja.**

Ejemplos: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, $\frac{1 + \frac{2}{3}}{4 - \frac{1}{2}}$, $\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$

Este tipo de fracción debe simplificarse a una fracción con enteros o polinomios en su numerador y denominador, antes de poder efectuar operaciones con ella. Veremos dos métodos para reducir las fracciones complejas y la aplicación de cualquiera de ellos nos la dictará la experiencia.

Método 1. $\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x + 1 + \frac{1}{x}}$ Consiste en efectuar las operaciones de suma en numerador y denominador hasta tener la división de dos fracciones a la que le aplicamos el procedimiento ya visto.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$\frac{\dfrac{x^3-1}{x}}{\dfrac{x(x+1)+1}{x}} = \frac{x^3-1}{x}\cdot\frac{x}{x(x+1)+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)\cdot x}{x(x^2+x+1)} = x-1$$

Método 2. Consiste en usar como factor el MCM de todos los denominadores en la expresión aplicando el teorema 3-19 $\frac{x}{y}=\frac{xz}{yz}$, $(y, z \neq 0)$ y distribuir ese factor. MCM = x.

$$\frac{(x^2-\frac{1}{x})x}{(x+1+\frac{1}{x})x} = \frac{x^3-1}{x^2+x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} = x-1$$

Ejemplo:

$$\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z}}$$

Método 1

$$\frac{\dfrac{z^3+8}{8z^3}}{\dfrac{4-2z+z^2}{4z^3}} = \frac{z^3+8}{8z^3}\cdot\frac{4z^3}{4-2z+z^2}$$

$$= \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{2\cdot 4z^3}\cdot\frac{4z^3}{(z^2-2z+4)}$$

$$= \frac{(z+2)}{2}$$

Método 2

MCM $= 8z^3$

$$\frac{(\frac{1}{8}+\frac{1}{z^3})8z^3}{(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z})8z^3} = \frac{z^3+8}{8-4z+2z^2} = \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{2(z^2-2z+4)} = \frac{z+2}{2}$$

PROBLEMAS PARA AUTOEVALUACION IV-16

Conteste si la proposición es correcta o incorrecta.

1. $\frac{x^2-a^2}{x^2-a^2}=0$
2. $\frac{7x+1}{1+7x}=1$
3. $\frac{3(a+b)}{(x+y)3}=\frac{a+b}{x+y}$
4. $\frac{a^2x-ay}{a^2x^2-a^2y^2}=\frac{x-ay}{x^2-a^2y^2}$

$$= \frac{x-ay}{(x+ay)(x-ay)} = \frac{1}{x+ay}$$

Reducir a términos más simples las siguientes expresiones:

5. $\frac{28}{63}$
6. $\frac{143}{195}$
7. $\frac{187}{391}$
8. $\frac{x^2+2x}{x^2-4x}$
9. $\frac{a^2x-a^2y}{ax^2-ay^2}$
10. $\frac{y^2-y-6}{y^2+2y-15}$
11. $\frac{14x-24-2x^2}{x^2+x-20}$
12. $\frac{x^2-36}{x^3-216}$
13. $\frac{2x^2-14x+20}{7x-2x^2-6}$

En los siguientes problemas determine el MCM.

14. 121, 143
15. $9abc$; $15a^2bc^2$, $6a^3$, bc^2
16. $45x^2(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $36xy^2(x-y)$
17. x^3+y^3; x^2-y^2; $x^2+2xy+y^2$
18. $a-3b$; a^2-9b^2; $a^2-6ab+9b^2$

Efectúe las sumas algebraicas de las fracciones que se indican.

19. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

20. $\frac{3}{2x} + \frac{-11}{x}$

21. $\frac{3(5x-7)}{(x+7)^2} - \frac{2x(4x+37)}{(x+7)^2}$

22. $\frac{2x+3}{6} - \frac{4x-7}{9}$

23. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x}$

24. $x + y + \frac{x^2}{x-y}$ Indicación: Considera $\frac{x+y}{1}$

25. $x + \frac{6}{x}$

26. $8x + \frac{x-9}{x+7}$

27. $\frac{5}{x-3} + \frac{7}{3-x}$ Indicación $\frac{x}{-y} = \frac{-x}{y}$

28. $\frac{x+5}{x^2+7x+10} - \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

29. $\frac{t-6}{2t^2-12t} + \frac{2t}{t^2-7t+6} - \frac{t+1}{2t^2-2t}$

30. $\frac{1}{x^3-1} + \frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}$

31. $\frac{a^2+4}{a^3-27} + \frac{7}{3-a} - \frac{a-5}{a^2+3a+9}$

32. $\frac{2xy}{x^3+y^3} - \frac{x}{x^2-xy+y^2}$

Efectuar las operaciones indicadas.

33. $\frac{7}{22} \cdot \frac{33}{35}$

34. $\frac{4}{7} \div \frac{16}{21}$

35. $\left(\frac{5}{16} \div \frac{9}{64}\right) \frac{7}{15}$

36. $\frac{9ax^2}{10by} \cdot \frac{18xy^2}{15ab}$

37. $\frac{3x-5}{7xy} \div \frac{2x+3}{14x^2}$

38. $\frac{a^4-b^4}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{a-b}{ab+b^2}$

39. $\frac{x^2-y^2-x+y}{x+2y} \div \frac{x-y}{x-2y}$

Simplifique las siguientes fracciones complejas por **ambos** métodos.

40. $\frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}$

41. $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}}$

42. $\frac{\frac{2}{x^2} - \frac{x}{4}}{x^2+2x+4}$

En los siguientes problemas utilice el método que juzgue más conveniente para reducir la fracción compleja.

43. $\frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}$

44. $2a - \frac{1}{a - \frac{4}{a}}$

45. $\frac{\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1}}{\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2}}$

46. Expresar en lenguaje simbólico matemático las situaciones dadas en lenguaje común y que se dan a continuación:

a) El doble de un número es 25.

b) La suma de dos números es 36.

c) El producto de dos números es 120.

d) El cociente de dos números es 101.

e) El cociente de dos números es 15 y el resto o residuo es 3.

f) El cinco por ciento de una cantidad es igual a las dos terceras partes de otra.

g) El cuadrado de un número más el doble de él es igual a un medio de otra.

h) Calcular el largo y el ancho de un rectángulo cuya superficie es 3 200 m² y sabiendo que el largo es el doble del ancho.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

RESUMEN

Ya decíamos en la unidad anterior, de la necesidad de comprender el significado de la terminología y de los símbolos, con objeto de poderlos aplicar en las diferentes situaciones de la realidad, sin restar importancia a la "mecanización" de algunas operaciones. Es en esta unidad en donde completamos la terminología algebraica para establecer los fundamentos de las cuatro operaciones entre las expresiones algebraicas, iniciando así un cierto grado de "mecanización"; es responsabilidad del alumno efectuar los ejercicios suficientes para desarrollar la habilidad que le permita concentrar sus mejores esfuerzos en el planteo de problemas y en la aplicación efectiva de la teoría asimilada, más que en el desarrollo de las operaciones.

Los términos aquí introducidos son:

Expresión algebraica

Término

Coeficiente

Términos semejantes

Potencia

Base de la potencia

Exponente

Polinomio

Mínimo común múltiplo

Fracción compleja

Paneles de Verificación

CONJUNTO DE PROBLEMAS IV-13

1. Cuatro. $4\underline{x}^2$, $2\underline{x}\underline{y}$, $-\ \underline{y}^2$, 5
2. Dos. $4\underline{x}$, $-[(2 + \underline{x})-3]$
3. Uno. $(4\underline{x} + 2)\ (2\underline{x} - 3)$
4. Tres. 6, $3a$, $(5\underline{a} - \underline{b})$
5. $12, -8, -7, 4$
6. $2, -3, 4, -1$
7. $-1, -2, -1, -7$
8. $x - (2\underline{y} + 3\underline{x}) - 2y = x - 2\underline{y} - 3\underline{x} - 2\underline{y} = -2\underline{x} - 4\underline{y}$ para x: $(1 - 3)x$ para y: $(-2 - 2)y$
9. $3\underline{x} - (2\underline{y} - 4\underline{x}) + 6\underline{y} = 3\underline{x} - 2\underline{y} + 4\underline{x} + 6\underline{y} = 7\underline{x} + 4\underline{y}$
10. $(2\underline{x} - 3\underline{y}) + (\underline{y} - 4\underline{w}) - (\underline{w} - 3\underline{x}) = 2\underline{x} - 3\underline{y} + \underline{y} - 4\underline{w} - \underline{w} + 3\underline{x} = 5\underline{x} - 2\underline{y} - 5\underline{w}$
11. $3x - [2x + 3y - (2y - 3x)] + 4y = 3x - (2x + 3y - 2y + 3x) + 4y = 3x - 2x - 3y + 2y - 3x + 4y = -2x + 3y$
12. $9x - (2y - 3x) - [y - (2y - x)] - [2y + (4x - 3y)] =$
$= 9x - 2y + 3x - (y - 2y + x) - (2y + 4x - 3y)$
$= 9\underline{x} - 2y + 3\underline{x} - y + 2y - \underline{x} - 2y - 4\underline{x} + 3y$
$= 7x$

En el siguiente problema identificamos con rayas a los términos semejantes y eliminamos (postulado de identidad para la suma), aquellos con coeficiente cero.

13. $(-2x^3 + 7x^2 - x) + (4x^3 - 8x^2 + x - 6) = -2\underline{x}^3 + 7x^2 - x + 4\underline{x}^3 - 8x^2 + x - 6 = 2x^3 - x^2 - 6$
14. $[(2a - b) + (2a - c)] + (-4a + b + c) = 2a - b + 2a - c - 4a + b + c = 0$
15. $4a - [a - (2a + b)] = 4a - (a - 2a - b) = 4a - a + 2a + b = 5a + b$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

16. a) $2x^2 - 3y^2 + (4x - 3y - 1)$ b) $2x^2 - 3y^2 - (-4x + 3y + 1)$
17. a) $x^2 - 2y^2 + (-x - 3y - 5)$ b) $x^2 - 2y^2 - (x + 3y + 5)$
18. a) $x + y + (-x^2 - 4 + 3y^2)$ b) $x + y - (x^2 + 4 - 3y^2)$
19. a) $r^3 + (r^2s + 2rs^2 + s^3)$ b) $r^3 - (-r^2s - 2rs^2 - s^3)$
20. a) $x^4 - 4x^3y + (6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4)$ b) $x^4 - 4x^3y - (-6x^2y^2 + 4xy^3 - y^4)$

CONJUNTO DE PROBLEMAS IV-14

1. $y^{13} \cdot y^{11} = y^{13+11} = y^{24}$
2. $(-2)^2 (-2)^5 = (-2)^{2+5} = (-2)^7 = -128$
3. $(5x)^4 = 5^4 \cdot x^4 = 625x^4$
4. $(2x^2)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^{2\cdot 3} = 8x^6$
5. $3xy(x^2y^3) = 3x^{1+2} \cdot y^{1+3} = 3x^3y^4$
6. $a(a+2)^2 \cdot a^3 (a+2)^4 = a^{1+3}(a+2)^{2+4} = a^4(a+2)^6$
7. $4x^3y^2(5xy^2 + 4x^2y) = 4x^3y^2(5xy^2) + 4x^3y^2(4x^2y)$
   $= 4 \cdot 5x^{3+1} \cdot y^{2+2} + 4 \cdot 4x^{3+2} \cdot y^{2+1}$
   $= 20x^4y^4 + 16x^5y^3$
8. $2ab(3a^2 + 3ab - 5b^2) = 2ab(3a^2) + 2ab(3ab) + 2ab(-5b^2)$
   $= 6a^3b + 6a^2b^2 - 10ab^3$ Teorema 3-12
9. $(3x+2)(x+5) = 3x^2 + 17x + 10$

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x+5 \\ \hline 3x^2+2x \\ 15x+10 \\ \hline 3x^2+17x+10 \end{array}$$

10. $(x-2)(x^2+5x-3) = x^3 + 3x^2 - 13x + 6$

$$\begin{array}{r} x^2+5x-3 \\ x-2 \\ \hline x^3+5x^2-3x \\ -2x^2-10x+6 \\ \hline x^3+3x^2-13x+6 \end{array}$$

11. $(x-2y)^2 = (x-2y)(x-2y) = x^2 - 4xy + 4y^2$

$$\begin{array}{r} x-2y \\ x-2y \\ \hline x^2-2xy \\ -2xy+4y^2 \\ \hline x^2-4xy+4y^2 \end{array}$$

12. $(x^2-2y^2)(x^4+2x^2y^2+4y^4) = x^6 - 8y^6$

$$\begin{array}{r} x^4+2x^2y^2+4y^4 \\ x^2-2y^2 \\ \hline x^6+2x^4y^2+4x^2y^4 \\ -2x^4y^2-4x^2y^4-8y^6 \\ \hline x^6 \qquad\qquad -8y^6 \end{array}$$

13. $(x-2)(x+3)(x+2) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x+3 \\ \hline x^2-2x \\ 3x-6 \\ \hline x^2+x-6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2+x-6 \\ x+2 \\ \hline x^3+x^2-6x \\ 2x^2+2x-12 \\ \hline x^3+3x^2-4x-12 \end{array}$$

14. $(x^n - y^n)^3 = (x^n - y^n)(x^n - y^n)(x^n - y^n)$
    $= x^{3n} - 3x^{2n}y^n + 3x^ny^{2n} - y^{3n}$

$$\begin{array}{r} x^n-y^n \\ x^n-y^n \\ \hline x^{2n}-x^ny^n \\ -x^ny^n+y^{2n} \\ \hline x^{2n}-2x^ny^n+y^{2n} \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^{2n}-2x^ny^n+y^{2n} \\ x^n-y^n \\ \hline x^{3n}-2x^{2n}y^n+x^ny^{2n} \\ -x^{2n}y^n+2x^ny^{2n}-y^{3n} \\ \hline x^{3n}-3x^{2n}y^n+3x^ny^{2n}-y^{3n} \end{array}$$

15. $2xy(3y-x-1)^2 = 2xy(3y-x-1)(3y-x-1) =$
    $= 18xy^3 - 12x^2y^2 - 12xy^2 + 2x^3y + 4x^2y + 2xy$

$$\begin{array}{r} 3y-x-1 \\ 2xy \\ \hline 6xy^2-2x^2y-2xy \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6xy^2-2x^2y-2xy \\ 3y-x-1 \\ \hline 18xy^3-6x^2y^2-6xy^2 \\ -6x^2y^2+2x^3y+2x^2y \\ -6xy^2+2x^2y+2xy \\ \hline 18xy^3-12x^2y^2-12xy^2+2x^3y+4x^2y+2xy \end{array}$$

NOTA: En este problema (2xy) no se puede distribuir hasta que se elimine la potencia.

16. $P(x)$: $a^3x^3 - 3x^2y + 2ax + 5y^2$. Tercer grado
17. $P(y)$: $y^3 - 3x^2y^2 - 2x^3y + 4x^4$. Tercer grado
18. $P(x)$: $6x^ny^3 + 3x^2y - 4xy^2$. Cuarto grado
19. $P(y)$: $-21x^7y^6 + 28x^8y^5 - 14x^5y^3 + 7x^3y^2$. Sexto grado
20. $P(z)$: $4z^3x + 4z^2x^2 - 3xyz + 5y$. Tercer grado
21. $\dfrac{(x+y)^{12}}{(x+y)^4} = (x+y)^{12-4} = (x+y)^8$
22. $\dfrac{10m^6n}{15m^3n} = \dfrac{\cancel{5}\cdot 2m^{6-3}\cancel{n}}{\cancel{5}\cdot 3\cancel{n}} = \dfrac{2m^3}{3}$
23. $\dfrac{(2x^2y)^4}{(-3xy)^4} = \dfrac{2^4x^{2\cdot 4}y^4}{(-3)^4x^4y^4} = \dfrac{2^4x^8}{2^4x^4} = \dfrac{16}{81}x^{8-4}$ Teorema 3-12 $(-a)(-b) = ab$ para $(-3)^4$
    $= \dfrac{16}{81}x^4$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

24. $$\frac{24(x+y)^3(x-y)^2}{30(x+y)^2(x-y)^3} = \frac{\not{6}\cdot 4(x+y)^{3-2}}{\not{6}\cdot 5(x-y)^{3-2}} = \frac{4(x+y)}{5(x-y)}$$

25. $$\frac{(a+b)^3}{(ab)^3} = \frac{(a+b)^3}{a^3b^3}$$ Las potencias no tienen la misma base, $(a+b)$ y ab, por lo que no se aplica la resta de exponentes.

26. $$\frac{6x^3-9x^4y}{3xy} = \frac{6x^3}{3xy} - \frac{9x^4y}{3xy} = \frac{2x^2}{y} - 3x^3$$

27. $$\frac{7a^3b^2+28a^5b^5-21a^7b^6-14a^5b^3}{7a^3b^2} =$$
$$= \frac{7a^3b^2}{7a^3b^2} + \frac{28a^5b^5}{7a^3b^2} - \frac{21a^7b^6}{7a^3b^2} - \frac{14a^5b^3}{7a^3b^2}$$
$$= 1 + 4a^5b^3 - 3a^4b^4 - 2a^2b$$

28. $a+1 \,/\, a^4-2a^3-3a^2-4a-8$

a^3-3a^2+0a-4 Cociente

$-a^3$

$-3a^3-3a^2$

$+3a^2$

$0a^2-4a$

$0a$

$-4a-8$

-4

$-\frac{4}{4}$ Residuo

Como el primer término de cada resta **siempre** es cero, pruebe omitiéndolo para simplificar más la operación

$$\frac{a^4-2a^3-3a^2-4a-8}{a+1} = a^3-3a^2-4-\frac{4}{a+1}$$

29. Observamos que al dividendo le hace falta el término de la potencia dos, por lo que se agrega con coeficiente cero.

$2z^2-6z+4 \,/\, z^4+z^3+0z^2+2z+15$

$\frac{1}{2}z^2+2z+5$ Cociente

$3z^3-2z^2$

$4z^3-2z^2+2z$

$12z^2-8z$

$10z^2-6z+15$

$30z-20$

$24z-5$ Residuo

$$\frac{z^4}{2z^2} = \frac{1\cdot z^2}{2} = \frac{1}{2}z^2$$

$$\frac{4z^3}{2z^2} = 2z$$

$$\frac{10z^2}{2z^2} = 5$$

$$\frac{z^4+z^3+2z+15}{2z^2-6z+4} = \frac{1}{2}z^2+2z+5+\frac{24z-5}{2z^2-6z+4}$$

30. $$\frac{3x^5+11x^4-15x^2+7x+9}{x^2+2x-1} = 3x^3+5x^2-7x+4+\frac{-8x+13}{x^2+2x-1}$$

$x^2+2x-1 \,/\, 3x^5+11x^4+0x^3-15x^2+7x+9$

$3x^3+5x^2-7x+4$

$-6x^4+3x^3$

$5x^4+3x^3-15x^2$

$-10x^3+5x^2$

$-7x^3-10x^2+7x$

$14x^2-7x$

$4x^2+0x+9$

$-8x+4$

$-8x+13$

CONJUNTO DE PROBLEMAS IV-15

1. $-2a(3a-4a^2) = -6a^2+8a^3$
2. $(-2xy)(-3x^2y^3) = 6x^3y^4$
3. $-a^3b^2(a^3-8b^3) = -a^6b^2+8a^3b^5$
4. $(2k-3)(k-7) = 2k^2-17k+21$
5. $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
6. $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$
7. $(y-8)(y+3) = y^2-5y-24$
8. $(x-2)(x+5) = x^2+3x-10$
9. $[(x-2y)+4]^2 = (x-2y)^2+2\cdot(x-2y)\cdot 4+4^2$
$= x^2+2x(-2y)+4y^2+8(x-2y)+16$
$= x^2-4xy+4y^2+8x-16y+16$
10. $[2(x-3y)+5][3(x-3y)-2]$
$= 6(x-3y)^2+11(x-3y)-10$
$= 6(x^2-6xy+9y^2)+11(x-3y)-10$
$= 6x^2-36xy+54y^2+11x-33y-10$

Preparatoria abierta Online | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

11. $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 2(2x)(5) + 25$
$= 4x^2 + 20x + 25$

12. $(x - 2y - z)^2 = [(x - 2y) - z]^2 = (x - 2y)^2 - 2(x - 2y)z + z^2$
$= x^2 - 4xy + 4y^2 - 2xz + 4yz + z^2$

13. $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - (1)^3 = x^3 - 1$

14. $(y^3 + 7)(y^3 - 2) = y^6 + 5y^3 - 14$

15. $(2m - n + 3)^3 = [2m - (n - 3)]^3 =$
$= (2m)^3 - 3(2m)^2(n - 3) + 3(2m)(n - 3)^2 - (n - 3)^3$
$= 8m^3 - 12m^2(n - 3) + 6m(n - 3)^2 - (n - 3)^3$
$= 8m^3 - 12m^2n + 36m^2 + 6m(n^2 - 6n + 9)$
$- [(n^3 - 3n^2(3) + 3n(3)^2 - (3)^3]$
$= 8m^3 - 12m^2n + 36m^2 + 6mn^2 - 36mn + 54m -$
$- (n^3 - 9n^2 + 27n - 27)$
$= 8m^3 - 12m^2n + 36m^2 + 6mn^2 - 36mn + 54m -$
$- n^3 + 9n^2 - 27n + 27$

16. $(5x - 3y)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(3y) + 3(5x)(3y)^2 - (3y)^3$
$= 125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$

17. $(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

18. $[(x + 3y) + (2z - 4w)][(x + 3y) - (2z - 4w)] =$
$= (x + 3y)^2 - (2z - 4w)^2$
$= (x^2 + 6xy + 9y^2) - (4z^2 - 16zw + 16w^2)$
$= x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2 + 16zw - 16w^2$

19. $[(4x + 3w) - (2y + 3z)][(4x + 3w) + (2y + 3z)]$
$= (4x + 3w)^2 - (2y + 3z)^2$
$= (16x^2 + 24xw + 9w^2) - (4y^2 + 12yz + 9z^2)$
$= 16x^2 + 24xw + 9w^2 - 4y^2 - 12yz - 9z^2$

20. $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y)^2 = (\frac{1}{2}x)^2 + 2(\frac{1}{2}x)(\frac{2}{3}y) + (\frac{2}{3}y)^2$

$= (\frac{1}{2})^2x^2 + x(\frac{2}{3}y) + (\frac{2}{3})^2y^2$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{9}y^2$

21. $3x^2 - 9x = 3x(x - 3)$

22. $y^3 + 4y = y(y^2 + 4)$

23. $a^2x^2 + a^2 = a^2x^2 + a^2 \cdot 1 = a^2(x^2 + 1)$

24. $9 - a^2 = (3)^2 - a^2 = (3 + a)(3 - a)$

25. $225a^6 - 64b^2 = (15a^4)^2 - (8b)^2 = (15a^4 + 8b)(15a^4 - 8b)$

26. $3y(2x + 5) - 4x(2x + 5) = (3y - 4x)(2x + 5)$

27. $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

28. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

29. $169x^2 - 225y^2 = (13x)^2 - (15y)^2 = (13x + 15y)(13x - 15y)$

30. $t^2 - 5t - 66 = (t - 11)(t + 6)$

31. $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$

32. $(x + 2y)^2 - z^2 = [(x + 2y) + z][(x + 2y) - z] =$
$= (x + 2y + z)(x + 2y - z)$

33. $8x^{6n} + 27y^{3n} = (2x^{2n})^3 + (3y^n)^3 = [(2x^{2n}) + (3y^n)][(2x^{2n})^2 -$
$- (2x^{2n})(3y^n) + (3y^n)^2]$
$= (2x^{2n} + 3y^n)(4x^{4n} - 6x^{2n}y^n + 9y^{2n})$

34. $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$

35. $5x^2 - 30xy + 45y^2 = (5x - 15y)(x - 3y) = 5(x - 3y)^2$

36. $a^2b^2 - ab - 20 = (ab - 5)(ab + 4)$

37. $(x + y)^2 - 7(x + y) + 10 = [(x + y) - 5][(x + y) - 2]$

38. $64 + 144k + 81k^2 = (8 + 9k)^2$

39. $3t^3 - 15t^2 + 12t = 3t(t^2 - 5t + 4) = 3t(t - 4)(t - 1)$

40. $5^2 - (a + b)^2 = [5 + (a + b)][5 - (a + b)] = (5 + a + b)(5 - a - b)$

41. $x^2 - 4x(a + b) + 4(a + b)^2 = [x - 2(a + b)]^2$

42. $x^8 - 17x^4 + 16 = (x^4)^2 - 17(x^4) + 16 = (x^4 - 16)(x^4 - 1)$
$= (x^2 + 4)(x^2 - 4)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

43. $ax - ay - by + bx = (ax - ay) + (bx - by)$
$= a(x - y) + b(x - y)$
$= (a + b)(x - y)$

44. $2a - 6 - ab^2 + 3b^2 = (2a - 6) - (ab^2 - 3b^2)$
$= 2(a - 3) - b^2(a - 3)$
$= (2 - b^2)(a - 3)$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

45. $x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2)^2 - 10(x^2) + 9 = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$
$= (x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$

46. $7t^2 - 42t + 63 = (7t - 21)(t - 3) = 7(t - 3)^2$

47. $xy^3 + 2y^2 - xy - 2 = (xy^3 + 2y^2) - (xy + 2) = y^2(xy + 2) - 1(xy + 2)$
$= (y^2 - 1)(xy + 2)$
$= (y + 1)(y - 1)(xy + 2)$

48. $2(x + 2)^2(x - 3) + 3(x + 2)(x - 3)^2 =$
$= (x + 2)(x - 3)[2(x + 2) + 3(x - 3)]$
$= (x + 2)(x - 3)(5x - 5)$
$= 5(x + 2)(x - 3)(x - 1)$

49. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zw - w^2$
$= (x^2 + 2xy + y^2) - (z^2 - 2zw + w^2)$
$= (x + y)^2 - (z - w)^2$
$= [(x + y) + (z - w)][(x + y) - (z - w)]$
$= (x + y + z - w)(x + y - z + w)$

50. $x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3)^2 - 7(x^3) - 8 =$
$= (x^3 - 8)(x^3 + 1)$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

CONJUNTO DE PROBLEMAS IV-16

1. Incorrecta. $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2} = 1$

2. Incorrecta. $\frac{7x + 1}{1 + 7x} = 1$

3. Correcta. $\frac{3(a + b)}{(x + y)3} = \frac{a + b}{x + y}$

4. Incorrecta. $\frac{a^2x - ay}{a^2x^2 - a^2y^2} = \frac{a(ax - y)}{a^2(x^2 - y^2)} = \frac{a(ax - y)}{a^2(x + y)(x - y)} =$
$= \frac{ax - y}{a(x + y)(x - y)}$

5. $\frac{28}{63} = \frac{7 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{4}{9}$

6. $\frac{143}{195} = \frac{13 \cdot 11}{13 \cdot 15} = \frac{11}{15}$

7. $\frac{187}{391} = \frac{17 \cdot 11}{17 \cdot 23} = \frac{11}{23}$

8. $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x} = \frac{x(x + 2)}{x(x - 4)} = \frac{x + 2}{x - 4}$

9. $\frac{a^2x - a^2y}{ax^2 - ay^2} = \frac{a^2(x - y)}{a(x^2 - y^2)} = \frac{a(x - y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{a}{x + y}$

10. $\frac{y^2 - y - 6}{y^2 + 2y - 15} = \frac{(y - 3)(y + 2)}{(y + 5)(y - 3)} = \frac{y + 2}{y + 5}$

11. $\frac{14x - 24 - 2x^2}{x^2 + x - 20} = \frac{-(2x^2 - 14x + 24)}{(x + 5)(x - 4)} =$
$= -\frac{2(x - 4)(x - 3)}{(x + 5)(x - 4)} = -\frac{2(x - 3)}{(x + 5)}$

12. $\frac{x^2 - 36}{x^3 - 216} = \frac{(x + 6)(x - 6)}{(x - 6)(x^2 + 6x + 36)} = \frac{x + 6}{x^2 + 6x + 36}$

13. $\frac{2x^2 - 14x + 20}{7x - 2x^2 - 6} = \frac{2(x^2 - 7x + 10)}{-(2x^2 - 7x + 6)}$
$= -\frac{2(x - 5)(x - 2)}{(2x - 3)(x - 2)} = -\frac{2(x - 5)}{2x - 3}$

14. $(11)^2(13)$

15. $(2)(3)^2(5)a^3bc^2$

16. $(3)^2(4)(5)x^2y^2(x + y)^2(x - y)^2$

17. $(x + y)^2(x - y)(x^2 - xy + y^2)$

18. $(a - 3b)^2(a + 3b)$

19. $(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) - \frac{3}{10} = \frac{9}{6} - \frac{3}{10} = \frac{45 - 9}{30} = \frac{36}{30} = \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 5} = \frac{6}{5}$

20. $\frac{3}{2x} + \frac{-11}{x} = \frac{3 - 22}{2x} = \frac{-19}{2x}$

21. $\frac{3(5x - 7)}{(x + 7)^2} - \frac{2x(4x + 37)}{(x + 7)^2} = \frac{3(5x - 7) - 2x(4x + 37)}{(x + 7)^2} =$
$= \frac{-(8x + 3)(x + 7)}{(x + 7)^2} = -\frac{8x + 3}{x + 7}$

22. $\frac{2x + 3}{6} - \frac{4x - 7}{9} = \frac{3(2x + 3) - 2(4x - 7)}{18} = \frac{-2x + 23}{18}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

23. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x}=\frac{x(x+1)-(x+2)(x+3)}{x(x+2)}=\frac{-2(2x+3)}{x(x+2)}$

24. $\frac{x+y}{1}+\frac{x^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)+x^2}{x-y}=\frac{2x^2-y^2}{x-y}$

25. $x+\frac{6}{x}=\frac{x^2+6}{x}$

26. $8x+\frac{x-9}{x+7}=\frac{8x^2+57x-9}{x+7}$

27. $\frac{5}{x-3}+\frac{7}{3-x}=\frac{5}{x-3}-\frac{7}{x-3}=\frac{5-7}{x-3}=\frac{-2}{x-3}$

28. $\frac{x+5}{x^2+7x+10}-\frac{x-1}{x^2+5x+6}=\frac{4x+20}{(x+5)(x+3)(x+2)}=$

$=\frac{4(x+5)}{(x+5)(x+3)(x+2)}=\frac{4}{(x+3)(x+2)}$

29. $\frac{t-6}{2t^2-12t}+\frac{2t}{t^2-7t+6}-\frac{t+1}{2t^2-2t}=\frac{2(2t^2-t+6)}{2t(t-6)(t-1)}=\frac{2t^2-t+6}{t(t-6)(t-1)}$

30. $\frac{1}{x^3-1}+\frac{x}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}=$

$=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{x}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{x-1}$

$=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$

31. $\frac{a^2+4}{a^3-27}+\frac{7}{3-a}-\frac{a-5}{a^2+3a+9}=\frac{-7a^2-13a-74}{(a-3)(a^2+3a+9)}$

32. $\frac{2xy}{x^3+y^3}-\frac{x}{x^2-xy+y^2}=\frac{-x(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$

33. $\frac{7}{22}\cdot\frac{33}{35}=\frac{7\cdot(11\cdot 3)}{(2\cdot 11)(7\cdot 5)}=\frac{3}{10}$

34. $\frac{4}{7}\div\frac{16}{21}=\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{16}=\frac{4(7\cdot 3)}{7(4^2)}=\frac{3}{4}$

35. $\left(\frac{5}{16}\div\frac{9}{64}\right)\cdot\frac{7}{15}=\left(\frac{5}{4^2}\cdot\frac{4^6}{3^2}\right)\frac{7}{3\cdot 5}=\frac{28}{27}$

36. $\frac{9ax^2}{10by}\cdot\frac{18xy^2}{15ab}=\frac{(3^2ax^2)(9\cdot 2xy^2)}{(5\cdot 2by)(3\cdot 5ab)}=\frac{27x^3y}{25b^2}$

37. $\frac{3x-5}{7xy}\div\frac{2x+3}{14x^2}=\frac{(3x-5)14x^2}{7xy(2x+3)}=\frac{2x(3x-5)}{y(2x+3)}$

38. $\frac{a^4-b^4}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a-b}{ab+b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)^2b^2}{(a-b)^2(a^2+b^2)(a+b)b}=b$

39. $\frac{x^2-y^2-x+y}{x+2y}\div\frac{x-y}{x-2y}=\frac{(x+y-1)(x-y)(x-2y)}{(x+2y)(x-y)}=$

$=\frac{(x+y-1)(x-2y)}{x+2y}$

40. $\frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}=\frac{3}{\frac{3+8}{12}}=\frac{3}{\frac{11}{12}}=\frac{3}{1}\cdot\frac{12}{11}=\frac{36}{11}$

$\frac{(3)}{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)}\frac{12}{12}=\frac{36}{3+8}=\frac{36}{11}$

41. $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab}$

$\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}=\frac{ab}{a^2+b^2}$

$\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)a^2b^2}{\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)a^2b^2}=\frac{a^3b-ab^3}{a^4-b^4}=\frac{ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=\frac{ab}{a^2+b^2}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

42. $$\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{x}{4}}{x^2+2x+4}=\frac{\frac{8-x^3}{4x^2}}{\frac{(x^3+2x+4)}{1}}=\frac{-(x^3-8)}{4x^2}.$$

$$\frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{-(x-2)(x^2+2x+4)}{4x^2(x^2+2x+4)}$$

$$\frac{(\frac{2}{x^2}-\frac{x}{4})4x^2}{(x^2+2x+4)4x^2}=\frac{8-x^3}{4x^2(x^2+2x+4)}=\frac{-(x-2)(x^2+2x+4)}{4x^2(x^3+2x+4)}=-\frac{x-2}{4x^2}$$

43. $$\frac{(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y})(x+y)(x-y)}{(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y})(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{(x^2+xy)-(xy-y^2)}{(x^2-xy)+(xy+y^2)}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$$

44. $$2a-\frac{1}{a-\frac{4}{a}}=2a-\frac{1}{\frac{a^2-4}{a}}=2a-\frac{a}{(a+2)(a-2)}=\frac{2a^3-9a}{a^2-4}$$

45. $$\frac{(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1})(x-1)(x-2)(x-3)}{(\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-2})(x-1)(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)-2(x-2)(x-3)}{2(x-1)(x-2)-3(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{-x^2+6x-9}{-x^2+6x-5}=\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)}$$

46. a) Sea x el número, entonces: $2x = 25$

b) Sea x uno de los números e y el otro, entonces: $x + y = 36$

c) Sea x uno de los factores e y el otro, entonces: $xy = 120$

d) Sea x el dividendo e y el divisor, entonces: i) $x \div y = 101$ u) $101\ y = x$

e) Sea x el dividendo e y el divisor, entonces: $15y + 3 = x$

(Sabemos que el dividendo debe ser igual al producto del divisor por el cociente más el voto)

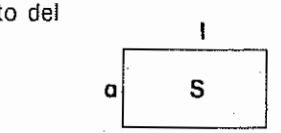
f) Sea x la primera cantidad e y la segunda, entonces: i) $5\%x = \frac{2}{3}y$

u) $\frac{5x}{100} = \frac{2y}{3}$

g) Sea x el primer número e y el segundo, entonces: $x^2 + 2x = \frac{1}{2}y$

h) Sea l el largo y a el ancho del rectángulo (ver fig.). Sabemos que el largo es igual al doble del ancho, o sea $L = 2a$, y la superficie es el producto del largo por el ancho.

Entonces, tenemos:



$$\boxed{S_{rect} = l \cdot a}$$

Por condición del problema

$$1 = 2a$$

Entonces reemplazando, nos queda:

$$3200 = 2a \cdot a = 2a^2.$$

Como: $2a^2 = 3200$

$$a^2 = \frac{3200}{2} = 1600$$

$$a = 40m$$

Ya que $a \cdot a = 40\ m \times 40\ m = 1600\ m^2$

Luego, el largo del rectángulo es 80 m y el ancho 40 m.