UNIDAD I
CONJUNTOS

Módulo 1
Conjuntos

OBJETIVO:
Definirá el término conjunto, determinará la pertenencia de un elemento a un conjunto; y la construcción enumerativa y descriptiva de los conjuntos.

La Teoría de Conjuntos es una teoría matemática, que proporciona los mejores medios para entender muchas fases de la matemática y sus aplicaciones en otras ramas de aprendizaje. El primer estudio formal sobre el tema fue realizado por el matemático alemán Georg Cantor[1] en el siglo XIX.

1 Georg Cantor (*San Petersburgo, 3 de marzo de 1845, Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático alemán, inventor con Dedekind de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de *formalizar* la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, o sea el mismo cardinal: Por ejemplo el conjunto de los racionales es *enumerable*, es decir del mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es: Existen por lo tanto varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

La importancia de la Teoría de Conjuntos radica en que a partir de ella se puede reconstruir toda la matemática, salvo la Teoría de Categorías. Por ejemplo, con la Teoría de Conjuntos se pueden definir los siguientes conceptos y probar todas sus propiedades: *par ordenado, relación, función, partición, orden, estructuras algebraicas, los naturales, los enteros, los racionales, los reales, los complejos, etc.*

No existe una definición formal del concepto de conjunto. La idea de conjunto es más bien intuitiva y podemos decir que es una colección de objetos. Así, podemos hablar de un conjunto de personas, de ciudades, de lapiceros o del conjunto de objetos que hay en un momento dado encima de una mesa. Por objeto entenderemos no sólo cosas físicas, como discos, computadoras, etc., si no también abstractos, como son números, letras, etc. A los objetos se les llama elementos del conjunto.

Un conjunto esta bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto, así el conjunto de los bolígrafos azules, esta bien definido, porque a la vista de un bolígrafo podemos saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no esta bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber distintas personas, que opinen si esa persona es alta o no lo es.

Ejemplos de conjuntos:

1.- Las naranjas en el costal de don Pepe.

2.- Los números: 2, 4, 6, 8 y 10.

3.- Las hojas de un árbol.

4.- Los equipos del fútbol mexicano:

5.- Los granos de arena de las playas oaxaqueñas.

6.- Los meses del calendario escolar:

7.- Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

Otros ejemplos

A = { x | x es una vocal }
B = { x | x es un número par mayor que 10 }
C = { x | x es una letra de la palabra matematica}

Por lo tanto, un conjunto se puede determinar por extensión o por comprensión.

Otros ejemplos

Cuadro comparativo de determinación de conjuntos:

Por extensión	**Por comprensión**
A = { a, e, i, o, u }	A = { x/x es una vocal }
B = { 0, 2, 4, 6, 8 }	B = { x/x es un número par menor que 10 }
C = {m, a, t, e, i, c }	C = { x/x es una letra de la palabra matematica }
D = { 1, 3, 5, 7, 9 }	D = { x/x es un número impar menor que 10 }
E = { b, c, d, f, g, h, j, . . . }	E = { x/x es una consonante }

Actividades de Aprendizaje

1.- Describe los conjuntos siguientes por extensión y por comprensión:

a) el conjunto de los números impares menores que 13.

b) el conjunto de los estados de la república mexicana.

c) el conjunto de los deportes.

d) el conjunto de los números mayores que 5 y menores que 17.

e) el conjunto de los matemáticos de la antigüedad.

2.- ¿El elemento “5” pertenece al conjunto de los impares?

3.- ¿El elemento “d” pertenece al conjunto de las vocales?

4.- ¿El elemento “3” pertenece al conjunto de los números primos?

5.- ¿El elemento “Guadalajara” pertenece al conjunto de los estados de la república?

6) Cuáles son los elementos de:

a) El conjunto de los días de la semana
b) El conjunto de las estaciones del año
c) Los números impares menores de 11
d) Los números pares mayor que 10 y menor que 20
e) Los números primos menores de 15

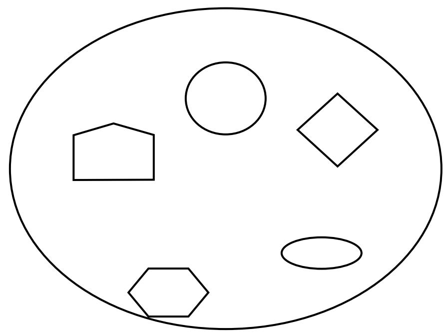
7) Colocar V ó F según lo afirmado sean verdadero o falso

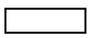
a) $6 \in \{2, 4, 5, 6, 9\}$ ( )
b) $y \in \{o, p, q, x\}$ ( )
c) $x \in \{o, p, q, y\}$ ( )
d) Perú $\in$ { países de Europa } ( )
e) Amazonas $\notin$ { ríos de América } ( )

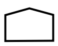
8. Si tenemos el conjunto A = {1,2,3,4,5}   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

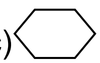
a) $3 \notin A$
b) $2 \in A$
c) $6 \in A$
d) $5 \notin A$

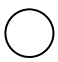
9. Considere el conjunto formado por las figuras geométricas ¿Cuál de los siguientes elementos no pertenece a él?



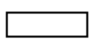
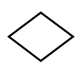
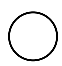
a) 

b) 

c) 

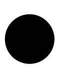
d) 

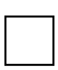
10. Dado el conjunto

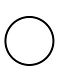
A = {  ,  ,  ,  } ¿Cuál de los siguientes elementos

pertenece a él?

a) 

b) 

c) 

d) 

11. Considere el conjunto formado por los países de Centroamérica ¿Qué país no pertenece a este conjunto?

a) Guatemala
b) Brasil
c) El Salvador
d) Belice

12. El conjunto de los números $\{3,5,6,8,20,37\}$, denotado en forma descriptiva es:

a) { x | x es menor que 38 }
b) { x | x es mayor que 38]
c) { 3, 6, 20, 38 }
d) { 1, 7, 9, 25 }

Módulo 2
Conjuntos Cardinales

OBJETIVO:
Encontrará la cardinalidad de un conjunto finito, conocerá los conjuntos finitos e infinitos, el conjunto universo, el conjunto vacío, la igualdad de conjuntos y la equivalencia entre conjuntos.

Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. En caso contrario, el conjunto es infinito. Por ejemplo:
M = {x / x es un río de la tierra} es un conjunto finito
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... } es un conjunto infinito

La *Cardinalidad* de un conjunto es el número de elementos que tiene el conjunto.

Por ejemplo, si A = {a, b, c, d, e} entonces la cardinalidad de A, que se denota por Card (A) es 5 pues A tiene 5 elementos. Si el conjunto es infinito, decimos que tiene cardinalidad infinita.

Ejemplos
P = { x / x es un país de la tierra } Conjunto finito
V = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ... } Conjunto infinito

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si es finito o infinito y en cada caso encuentra su cardinalidad.

a) F = {x / x es una vocal}

b) P = {2, 4, 6, 8, ... }

c) D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

d) F = {x / x es un número natural mayor que 3}

Conjunto Vacío

Es un conjunto que carece de elementos. Se le llama conjunto nulo, y se le denota por el símbolo ø o { }. Por ejemplo los conjuntos:
A = {Los perros que vuelan}
B = {x / x es un mes que tiene 53 días}

son ejemplos de conjuntos vacíos.

Otros ejemplos

Si C = { $x / x^3 = 8$ y x es impar } entonces C = { } o C = Ø
Si D = { x / x es un día de 90 horas } entonces D = { } o D = Ø

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si los conjuntos son iguales o diferentes al conjunto vacío:

a) A = {Los días que tienen 28 horas}

b) B = {x / x es un mes que tiene 29 días}

d) C = {$x / x^2 = 9$ y x es impar}

e) D = {x / x es un cuadrilátero con tres lados}

Conjuntos equivalentes

Si dos conjuntos poseen la misma cardinalidad, se dice que son conjuntos equivalentes, ya que tienen el mismo número de elementos, y puede establecerse entre ambos una correspondencia de uno a uno, o biunívoca. Son conjuntos equivalentes el conjunto de sillas de una clase y el del número de alumnos, si todas las sillas están ocupadas y no hay alumnos de pie.

Otro ejemplo:

Los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {a, e, i, o, u} son equivalentes porque tienen el mismo número de elementos.

Conjuntos iguales

Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales cuando ambos tienen los mismos elementos, es decir si cada elemento de A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. La igualdad se denota A = B.
En la igualdad, el orden de los elementos de cada conjunto no importa.
Ejemplos
a) Si A = {1, 2, 3, 4} y B = {3, 4, 1, 2} entonces A = B.
b) Si E = {vocal de la palabra mundo} y F = {u, o}
entonces E = F.

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si los conjuntos son iguales o diferentes:

a) A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {3, 4, 1, 2, 6}

b) E = {vocal de la palabra sol} y F = {o}

c) C = {x / x es un número natural mayor que 3 y menor que 8} y D = {4, 5, 6, 7}

d) G = {consonante de la palabra coco} y F = {c, o}

Más Actividades de Aprendizaje

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, finitos, infinitos y cuál es la cardinalidad de cada uno de ellos?

a) A = { x / x es día de la semana}
b) B = { vocales de la palabra vals}
c) C = { 1, 3, 5, 7, 9, ...}
d) D = { x / x es un habitante de la luna}
e) E = { $x \in N / x < 15$}
f) F = { $x \in N$ y $5 < x < 5$ }
g) G = { $x \in N$ y $x > 15$}
h) H = { $x \in N$ y $x = x$}
i) I = { x / x es presidente del Océano Pacífico}

2. Diga cual de los siguientes conjuntos tiene mayor cardinalidad que el conjunto formado por

   $\{ x \in N \mid x \text{ es un primo menor que el } 13 \}$

a) { 2, 3, 5, 7, 11 }
b) {17, 19, 23, 29, 30 }
c) { 3, 7, 11, 13 }
d) { 4, 6, 9, 15, 20, 25 }

3. ¿Cuál de los siguientes conjuntos presenta mayor cardinalidad?

a) $\{ x \in N \mid x \text{ es un número par} < 10 \}$

b) $\{ x \in N \mid x \text{ es un número primo} < 7 \}$

c) $\{ x \in N \mid x \text{ es un número impar} < 13 \}$

d) $\{ x \in N \mid x \text{ es un número par} < 4 \}$

4. ¿Diga cuál de los siguientes conjuntos es infinito?

a) El conjunto formado por los cinco primeros números impares
b) El conjunto formado por los múltiplos de 10
c) El conjunto formado por los números que dividen al 9
d) El conjunto formado por los números dígitos

5. ¿Cuál de los siguientes conjuntos no es equivalente al conjunto? S = { r, t, u }

a) { r, t, u, v }
b) { 1, 2, 3 }
c) { r, t, v }
d) { a, b, c }

6. ¿Diga cuál de los siguientes conjuntos es equivalente al conjunto?

   $\{ x \mid x \text{ es divide al } 6 \}$

a) $\{ x \in N \mid x \text{ es un número par} \leq 8 \}$

b) $\{ x \in N \mid x \text{ es un número} \geq 6 \}$

c) { Los números impares múltiplos de 6 }
d) { Los números 1, 2, 3, 4, 5 }

Módulo 3
Subconjuntos

OBJETIVO:

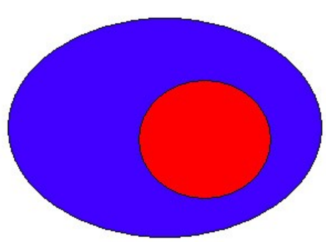
Conocerá la simbología de inclusión, los subconjuntos, el conjunto de números naturales; y definirá los siguientes términos, número primo, y múltiplo de un número

Un conjunto A es un subconjunto de B si todo elemento de A es también un elemento de B. En tal caso, se escribe $A \subseteq B$, y también decimos que A está contenido en B.

Por ejemplo:
Si A = {2, 4} y B = {3, 4, 1, 2} entonces $A \subseteq B$, pues cada elemento de A pertenece a B. Sin embargo,
Si A = {2, 4} y B = {3, 4, 1, 5} entonces A no es subconjunto de B (o no está contenido en B) pues el 4 que es elemento de A no es elemento de B. Y se escribe $A \not\subset B$.

La representación gráfica de $A \subseteq B$ está dada por los esquemas siguientes. En el de la izquierda, A es el conjunto pintado de rojo y el B está pintado de azul:

$A \subseteq B$



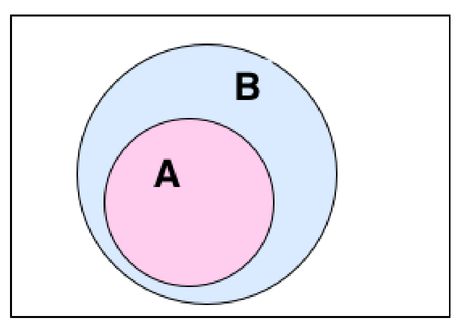


Diagrama que muestra que $A \subseteq B$

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si los conjuntos A son subconjuntos de B usando la notación de subconjunto:

a) A = {2, 4, 3} y B = {3, 4, 1, 2, 5}

b) A = {vocales} y B = {a, b, c, d, e, f, i, ñ, o, s, t, u}

c) A = {0, 2, 4, 3} y B = {3, 4, 1, 2, 5}

d) A = {2, 4, 3, 6} y B = {3, 4, 1, 2, 5}

e) A = {2, 4, 3, 5, 1} y B = {3, 4, 1, 2, 5}

Conjunto de números naturales N

Los números naturales son un sistema estudiado en aritmética, en el cual el conjunto de objetos es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (Los puntos suspensivos significan "y así sucesivamente").

Escribir 1, 2, 3 es diferente de escribir 1, 2, 3,…porque, en el primer caso se consideran únicamente los primeros tres números Naturales y, en el segundo caso, los puntos suspensivos indican que estamos considerando todos los números Naturales. Así, hay mucha diferencia en escribir:

1, 2, 3, 4 Y 1, 2, 3

¿Habrá diferencia en escribir: 1, 2, 3, 4,… Y 1, 2, 3,…?

____

Claro que no hay diferencia. Cada uno de los números 1, 2, 3,… es un número natural, por lo tanto 48 es un número natural y 479 también lo es. De las siguientes afirmaciones ¿cuáles son ciertas y cuáles falsas?

½ es un número Natural ______________________

4715.4 es un número Natural __________________

83 295 891 es un número natural________________

Esperamos que hayas puesto falsas las dos primeras y verdadera la última.

En este conjunto podemos ordenar a los elementos a través de las relaciones de orden “menor o igual que”, “mayor o igual que”, simbolizado como $\leq$, $\geq$, respectivamente y como operaciones fundamentales la suma y el producto $\{+, x\}$. El conjunto de los números naturales se identifica con la letra N, es decir:

N = $\{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5,...$\}$

¿Podrías decir cuál es el último elemento de este conjunto? ___________. La respuesta es no, pues siempre que se de un número natural siempre habrá uno más grande que él. Por ejemplo: si pensamos que el número más grande es 123456798, basta con sumarle uno para obtener un número más grande que él: 123456799.

De esta manera, resumimos que: La cantidad de números naturales es infinita, porque siempre es posible agregar un número más. No existe un número que sea el mayor de todos.

DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Desde hace mucho tiempo, el hombre se ha visto ante la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades.

A través de la práctica el hombre descubrió que este problema a veces sí tenía solución y a veces no. Este hecho hizo que se estudiase que relación se encontraba entre los números en los que este problema sí tenía solución y los números en los que no. De esta forma comenzó a estudiarse la divisibilidad.

De esta forma surge la pregunta natural ¿cuándo un número es divisible por otro? ____

Un número es divisible entre otro cuando lo contiene exactamente un número entero de veces, es la respuesta.

En otras palabras, si dividimos un número entre otro número, el cociente debe ser un número entero y el residuo debe ser cero.

Por ejemplo:

¿El 20 es divisible entre 5?____________________

Así es, pues el cociente es 4 y el residuo es cero

¿El 30 es divisible entre 6?____________________

Claro, el cociente es 5 y el residuo es cero.

¿El 48 es divisible entre 9?____________________

No verdad, pues el cociente es 5 pero el residuo es 3.

De manera formal, decimos que un número natural *b* es **divisible** por otro natural *a* (distinto de cero) si existe un tercer natural *c* tal que $b = a \cdot c$. Se suele expresar de la forma a|b, que se lee *a* divide a *b* (o *a* es **divisor** de *b*, o también *b* es **múltiplo** de *a*.

Por ejemplo, 6 es divisible por 3, ya que $6 = 3 \cdot 2$; pero no es divisible por 4, pues no existe un entero *c* tal que $6 = 4 \cdot c$. Es decir, el residuo de la división de 6 entre 4 no es cero.

Usando esto último, ¿qué se puede decir de la división de 36 por 4? ______________

Si escribiste que el 6 es divisible por 4 porque existe el número natural 9 tal que 6 = 4.9, estás en lo correcto.

Y ¿qué se puede decir de la división de 43 por 6?______________

En este caso, tu respuesta debió ser que el 43 no es divisible por 6 pues no existe un número natural que multiplicado por el 6 te de 43. Aunque esta respuesta puede ser afirmativa si tratamos con números racionales como lo veremos más adelante.

Subconjuntos del conjunto N

a) Conjunto de múltiplos de k; $k \in N$

Si k **es un elemento de** N, entonces $M = \{k, 2k, 3k, 4k, 5k, \ldots\}$ será el conjunto de los múltiplos de "k"

Ejemplo: El conjunto de múltiplos de 7 será: $\{7,14,21,28,35, \ldots\}$
Se dice que un número es divisible entre otro cuando su cociente es un número entero y el residuo es 0. Siempre que un número es múltiplo de otro, es divisible entre este; así 15 que es múltiplo de 3 y de 5, por lo tanto es divisible entre 3 y entre 5.

b) Conjunto de números primos

$P = \{2,3,5,7,11,13,17, \ldots\}$

Todo número natural mayor que 1 es divisible por 1 y por sí mismo. Por ejemplo el 45 es divisible por el 1 y por sí mismo (claro, hay otros que lo dividen, por ejemplo el 5 y el 9)

Los números que no admiten más que estos dos divisores (el 1 y sí mismo) se denominan números primos. Los que admiten más de dos divisores se llaman números compuestos. En otras palabras, los número primos son aquellos números que son divisibles por **sí mismos** y por **la unidad**; es decir estos números solamente presentan dos divisores.

¿Cuál de los números siguientes es número primo?_______________

1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97...

¡ Eso es, todos son números primos!

c) Conjunto de números compuestos

$C = \{4,6,8,9,10,12,14,15, 16, 18, \ldots\}$

Los números compuestos son múltiplos de aquellos que son sus factores; así, 12 es un múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6, ya que estos números están contenidos exactamente en 12.

Los números enteros compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama descomposición de un número en factores primos.
La descomposición de un número es muy útil pues ayuda a poder calcular el máximo común divisor o mínimo común múltiplo de varios números.

Para descomponer un número en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

1.- Dividir el número por el menor número primo posible.

2.- Si el resultado puede dividirse nuevamente por ese número, realizar la división.

3.- Si el resultado no puede volver a dividirse por ese número, buscar el menor número primo posible para continuar dividiendo.

4.- Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$\mathbf{90} = 2 \times 3^2 \times 5$$

Otros ejemplos:

20196	2
10098	2
5049	3
1683	3
561	3
187	11
17	17
1	

$$20196 = 2^2 \times 3^3 \times 11 \times 17$$

12675	3
4225	5
845	5
169	13
13	13
1	

$$12675 = 3 \times 5^2 \times 13^2$$

Actividades de Aprendizaje

1.- ¿Cuál de los siguientes números es primo? 13, 33, 93

2.- ¿Cuál de los siguientes números no es primo? 53, 63, 73

3.- ¿Cuál de los siguientes números es un número compuesto? 11, 17, 20

4.- ¿Cuál de los siguientes números no es un número compuesto? 41, 57, 65

5.- ¿Cuál de los siguientes números es divisor de 20? 3, 5, 7.

6.- ¿Cuál es la cantidad de números primos menores que 100?

7.- Descompón en producto de factores primos los números siguientes:

6936 =

1200 =

8. ¿En cual de las siguientes opciones se muestra un subconjunto propio de:

{ △ , □ , ○ , ▭ }

a) { ○ , ▭ , △ }

b) { ⬭ , □ , ▭ }

c) { △ , □ , ▭ }

d) { ⬭ , ○ , △ }

9. ¿En que opción se muestra un subconjunto de A = { 5, 4, 3, 2, 1 }

a) { 6, 5, 4 }
b) { 3, 5, 1 }
c) { 1, 2, 3, 6 }
d) {1, 2, 7, 8, 9 }

10. ¿Cuál es un subconjunto propio de { 8, 10, 12, 14 }

a) { 8, 9, 10, 11 }
b) { 8, 10, 12 }
c) { 9, 11, 13 }
d) { 8, 10, 13, 14 }

11. Todos los números primos del conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

a) { 1, 2, 3, 5, 7, 9 }
b) { 1, 2, 3, 4, 5 }
c) { 2, 3, 5, 7 }
d) { 2, 4, 6, 8 }

12. ¿E n que opción se muestra el conjunto de los múltiplos de 10 ?

a) { 2, 5, 10 }
b) { 10, 15, 20 }
c) { 10, 20, 30 ...... }
d) { 1, 2, 3........ 10 }

13. ¿Cuál es la factorización en factores primos de 72 ?

a) 2 x 2 x 2 x 9
b) 2 x 3 x 3 x 4
c) 2 x 2 x 2 x 3 x 3
d) 2 x 2 x 3 x 6

14. ¿Cuál es la factorización en factores primos de 105?

a) 1 x 7 x 15
b) 1 x 105
c) 1 x 5 x 21
d) 1 x 3 x 5 x 7

Módulo 4
Operaciones con conjuntos

OBJETIVO:
Conocerá los términos y representación gráfica de la unión entre dos conjuntos mediante el diagrama de Venn, el conjunto universo, la intersección de dos conjuntos, el complemento de un conjunto arbitrario, la relación e inclusión y operaciones entre conjuntos.

Conjunto Universo

Es el conjunto que contiene a todos los elementos de los que se este tratando. Se le denota por la letra U. Por ejemplo, cuando se habla del conjunto de los animales puede pensarse que sus elementos son peces, aves, conejos, monos, etc. Así el conjunto universal es U = {animales}. Al conjunto universo también se le llama conjunto universal.

Actividades de aprendizaje

Define con tus propias palabras el conjunto universo.

Da tres ejemplos de conjuntos universo.

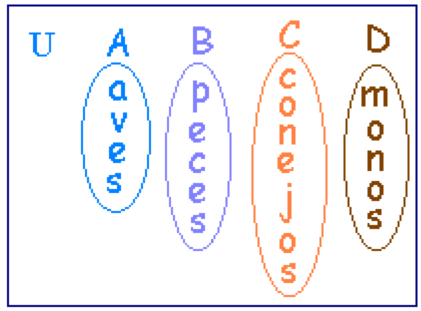
Representación gráfica de un conjunto mediante el diagrama de Venn, considerando el conjunto universo

Un diagrama de Venn (llamado así por su inventor John Venn) es una representación gráfica de los conjuntos. A cada conjunto se le considera encerrado dentro de círculos u otras figuras cerradas. Usualmente se dibujan dentro de un rectángulo el cual denota al conjunto universo. Los diagramas son empleados para representar tanto a los conjuntos como a sus operaciones, y constituyen una poderosa herramienta geométrica, desprovista de validez lógica.

John Venn (Drypool, 4 de agosto de 1834 - Cambridge, 4 de abril de 1923), fue un matemático y lógico británico.

Destacó por sus investigaciones en lógica inductiva. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos. Los diagramas de Venn permiten, además, una comprobación de la verdad o falsedad de un silogismo. Posteriormente fueron utilizados para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la teoría de conjuntos

Por ejemplo, el conjunto universo de los animales se representa gráficamente como se observa a continuación:



Observar que los conjuntos:

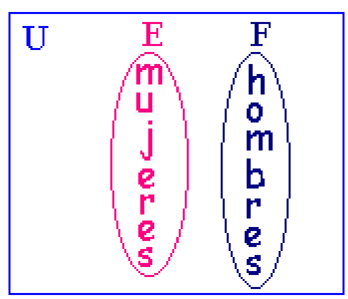
A = { aves } B = { peces } C = { conejos } D = { monos }

Todos son subconjuntos del conjunto universo U.

Otro ejemplo:

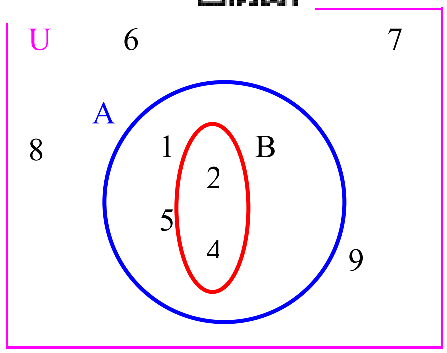
Si el conjunto universo es el conjunto de seres humanos entonces sus elementos pueden ser los hombres y mujeres.

Gráficamente se representa por el diagrama de Venn tal como se observa a continuación.



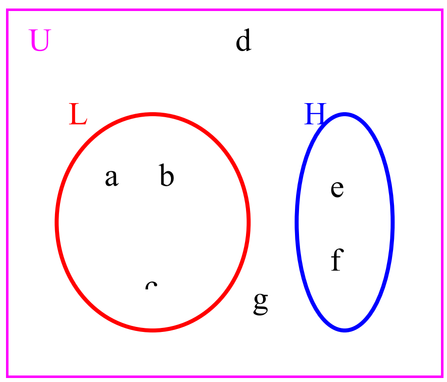
Otros ejemplos:

Si el conjunto universo es U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {2, 4} entonces el diagrama de Venn es:



Observar que el conjunto B es subconjunto de A.

Si el conjunto universo es U = {a, b, c, d, e, f, g},
L = {a, b, c} y   H = {e, f} entonces el diagrama de Venn es



Observar que los conjuntos L y H no tienen elementos en común. En este caso se llaman ***conjuntos ajenos***.

Actividades de aprendizaje

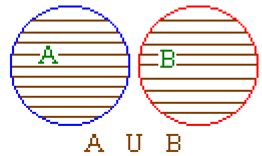
Representa gráficamente los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn considerando al conjunto universo U que se da en cada caso:

a) A = {1, 4, 5}, con conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

b) B = {consonantes}, con conjunto universo U = {alfabeto español}.

c) C = {polígonos}, con conjunto universo U = {figuras geométricas}.

d) D = {1, 2, 3} y   F = {4, 5} con conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.



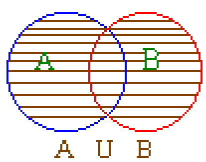
Unión de conjuntos.

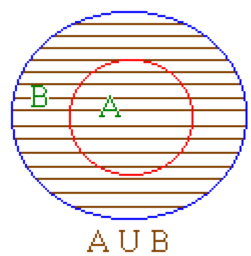
La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.
Se denota: A $\cup$ B. La unión de conjuntos se define como:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Observar que en la definición de la unión de conjuntos utilizamos la letra “o”, más adelante veremos que esta letra juega un papel importante como conectivo lógico.

Mediante diagramas de Venn, las uniones de conjuntos pueden ser como se ilustra:





Cuando no tienen elementos comunes	Cuando tienen algunos elementos comunes	Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto

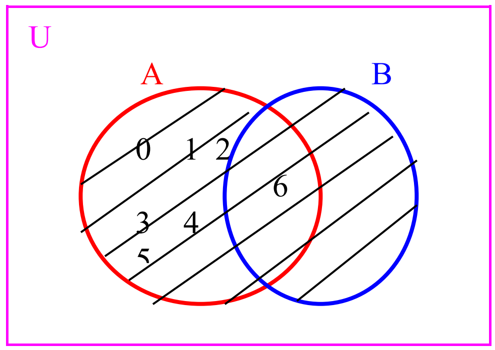
Por ejemplo:

Si A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} y B = {5, 6, 8}

Entonces la unión de A con B es el conjunto A $\cup$ B **=** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}

Observar que la unión de A con B consiste de todos los elementos de A y de B y en caso de que tengan elementos en común, estos deben aparecer una sola vez en la unión. Por ejemplo, el elemento 5 pertenece tanto a A como a B pero en la unión sólo debe aparecer una vez.

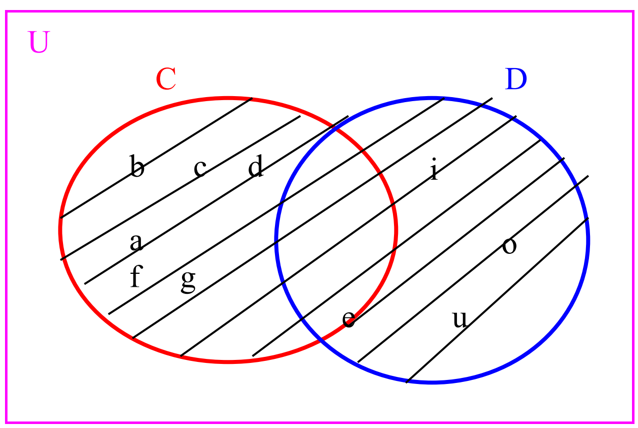
En el diagrama de Venn, lo iluminado representa la unión de A con B:



Veamos otros ejemplos:

1.- Si C = {a, b, c, d, e, f, g, h} y D = {a, e, i, o, u} entonces la unión de C con D es el conjunto

$$C \cup D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}$$

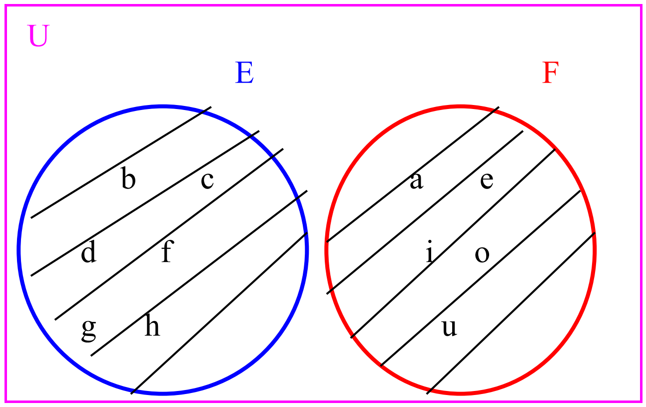


La región sombreada es $C \cup D$

2.- Si E = {b, c, d, f, g, h} y F = {a, e, i, o, u} entonces la unión de E con F es el conjunto

$$E \cup F = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}.$$

En este caso los conjuntos E y F son ajenos y la unión queda representada en el diagrama de Venn como sigue:

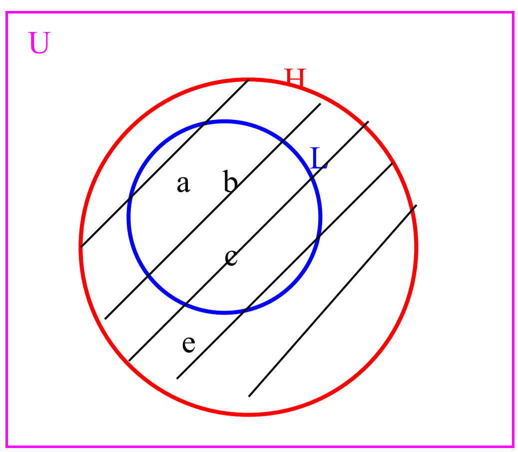


La región sombreada es E ∪ F

3.- Si L = {a, b, c} y H = {a, b, c, d, e} entonces la unión de L con H es el conjunto

L ∪ H = {a, b, c, d, e}

En este caso, el conjunto L es subconjunto de H entonces la unión resulta el mismo conjunto H. El diagrama de Venn queda como sigue:



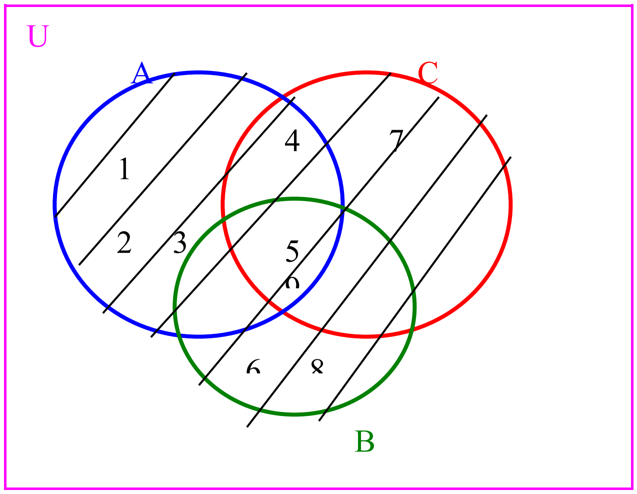
La región sombreada es E ∪ F

4.- También se pueden unir más de dos conjuntos:

Si A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {5, 6, 8} y C = {4, 5, 7, 9}

Entonces la unión de A, B y C es el conjunto

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9\}$$



La región sombreada es $A \cup B \cup C$

5.- Si C = {personas obesas} y D = {personas hipertensas}

Entonces $C \cup D$ = {personas obesas o hipertensas}

Actividades de aprendizaje

1.- Define con tus propias palabras la unión de dos conjuntos.

2.- Representa gráficamente la unión de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn

a) C = {a, b, c, d, e, f, g, h} y D = {a, b, c, e, i, o, u}

b) E = {1, 2, 3, 4} y F = {5, 6, 7}

c) L = {2, 4, 6} y H = {pares}

d) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {5, 6, 8, 7, 2} y C = {2, 4, 5, 7, 9}

Intersección de conjuntos

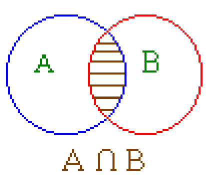
Se define la intersección de dos conjuntos A y B al conjunto de elementos que son comunes a A y B. Se denota por A ∩ B, que se lee: A intersección B.

La intersección de A y B también se puede definir:

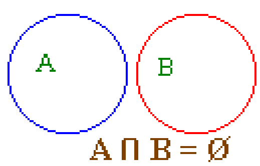
$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Observar que en la definición de la intersección de conjuntos utilizamos la letra "y". Más adelante veremos que esta letra juega un papel importante como conectivo lógico.

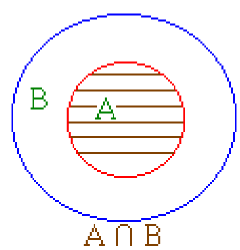
Mediante un diagrama de Venn se tienen los casos siguientes:



Cuando tienen elementos comunes



Cuando no tienen elementos comunes

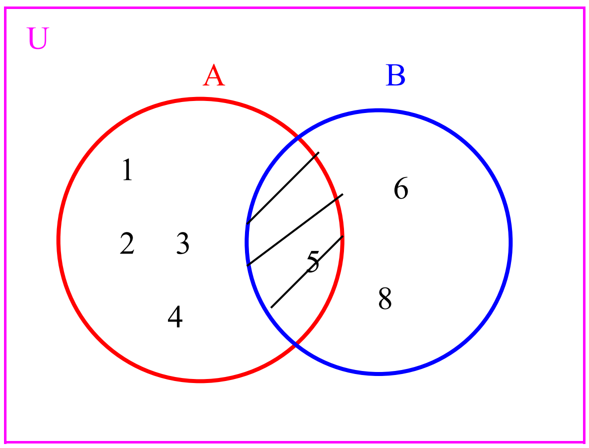


Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto

Por ejemplo:
Si A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} y B = {5, 6, 8} entonces la intersección de A con B es el conjunto

$$A \cap B = \{5\}$$

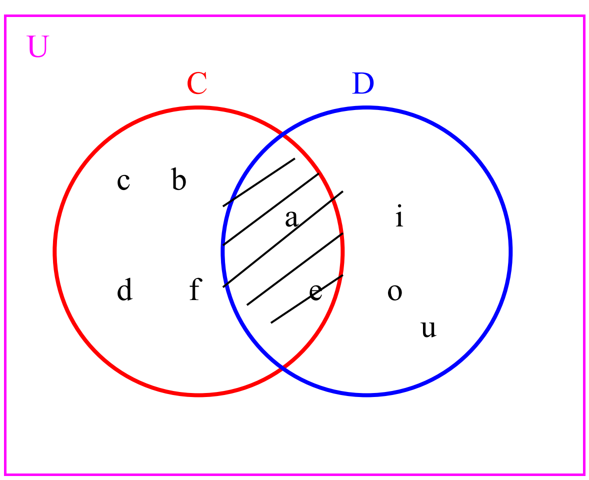
La intersección de A con B consiste de todos los elementos que tienen en común A y B, es decir, de los elementos que se repiten. En este caso, el elemento "5" pertenece tanto a A como a B (es el que se repite) y ningún otro está en ambos. Así que la intersección de A con B consiste sólo del "5". El diagrama de Venn es como sigue. Lo iluminado representa $A \cap B$.



La región sombreada es $A \cap B$

Otros ejemplos:
1.- Si C = {a, b, c, d, e, f, g, h} y D = {a, e, i, o, u} entonces la intersección de C con D es el conjunto

$$C \cap D = \{a, e\}$$

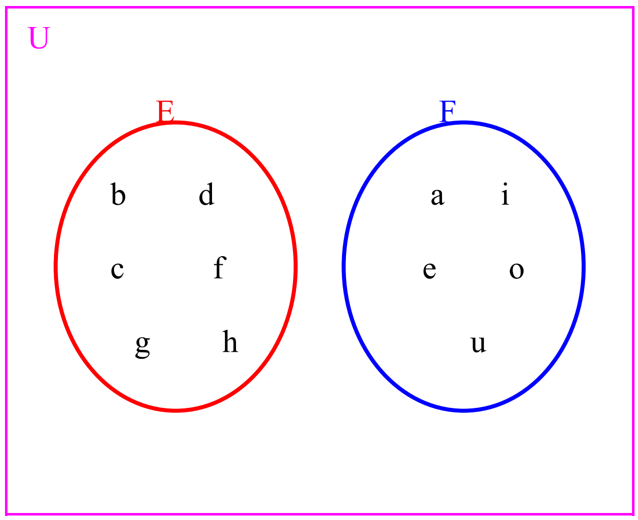


La región sombreada es $C \cap D$

2.- Si E = {b, c, d, f, g, h} y F = {a, e, i, o, u} entonces la intersección de E con F es el conjunto

$$E \cap F = \{ \}$$

En este caso los conjuntos E y F son ajenos y la intersección es el conjunto vacío. Así que en el diagrama de Venn no se ilumina nada

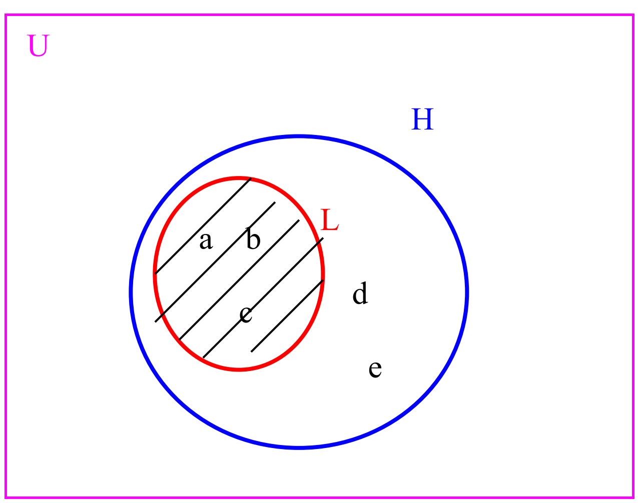


Aquí no se sombrea nada, pues $E \cap F = \phi$

3.- Si L = {a, b, c} y H = {a, b, c, d, e} entonces la intersección de L con H es el conjunto

$$L \cap H = \{a, b, c\}$$

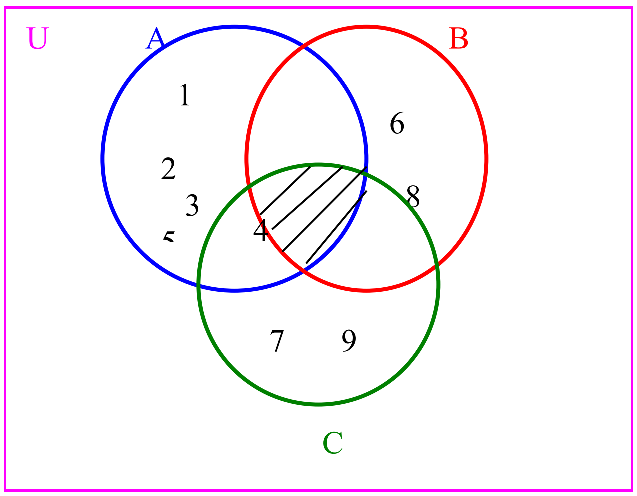
En este caso, el conjunto L es subconjunto de H entonces la intersección resulta ahora el conjunto L, pues los elementos que tienen en común L y H son todos los de L. El diagrama de Venn queda como sigue:



La región sombreada es $L \cap H$, la cual coincide con H

4.- También se pueden intersectar más de dos conjuntos:
Si A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {5, 6, 8} y C = {4, 5, 7, 9} entonces la intersección de A, B y C es el conjunto

$$A \cap B \cap C = \{5\}$$



La región sombreada es $A \cap B \cap C$

Observa que en este caso, el elemento 5 es el único que se encuentra en los tres conjuntos. Es por eso que es el único elemento que forma la intersección de los tres conjuntos.

5.- Si C = {personas obesas} y D = {personas hipertensas} entonces
$C \cap D$ = {personas obesas e hipertensas}

La obesidad es un proceso que afecta tanto a varones como a mujeres. El estilo de vida de la sociedad actual propicia su aparición.

Actividades de aprendizaje

1.- Define con tus propias palabras la intersección de dos conjuntos.

2.- Representa gráficamente la intersección de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn

a) C = {a, b, c, d, e, f, g, h} y D = {a, b, c, e, i, o, u}

b) E = {1, 2, 3, 4} y F = {5, 6, 7}

c) L = {2, 4, 6} y H = {pares}

d) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {5, 6, 8, 7, 2} y C = {2, 4, 5, 7, 9}

Diferencia de Conjuntos

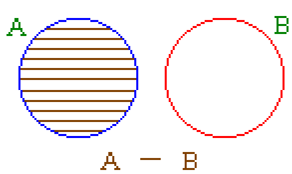
Se denomina diferencia de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos de A pero que no pertenecen a B.

La diferencia se denota por: A - B que se lee: A diferencia B o A menos B.

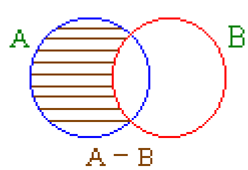
Se define la diferencia de dos conjuntos también como:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

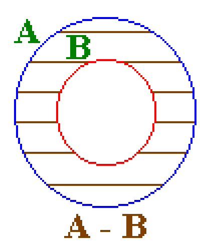
Mediante un diagrama de Venn se tienen los casos siguientes:



Cuando no tienen elementos comunes



Cuando tienen elementos comunes



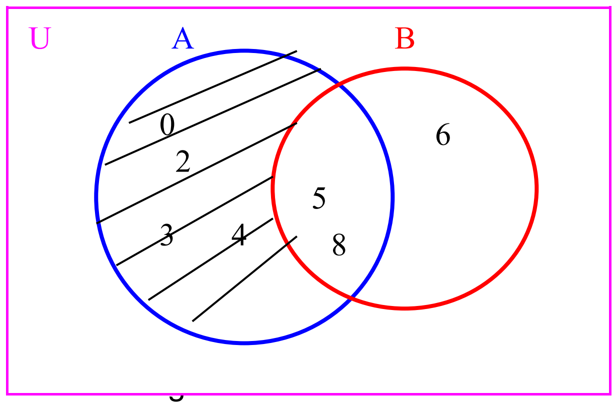
Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto

Por ejemplo:
Si A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} y B = {5, 6, 8} entonces la diferencia de A con B es el conjunto:

$$A - B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Obsérvese que la diferencia de A con B consiste de todos los elementos que pertenecen a A pero que no están en B. En este caso, los elementos 0, 1, 2, 3 y 4 pertenecen a A y no pertenecen a B mientras que el elemento “5” pertenece tanto a A como a B, por lo tanto no se debe poner en la diferencia de A con B

El diagrama de Venn es como sigue. Lo iluminado representa A - B:



Observar que no es lo mismo A-B que B-A:

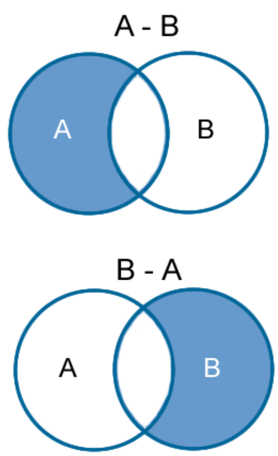
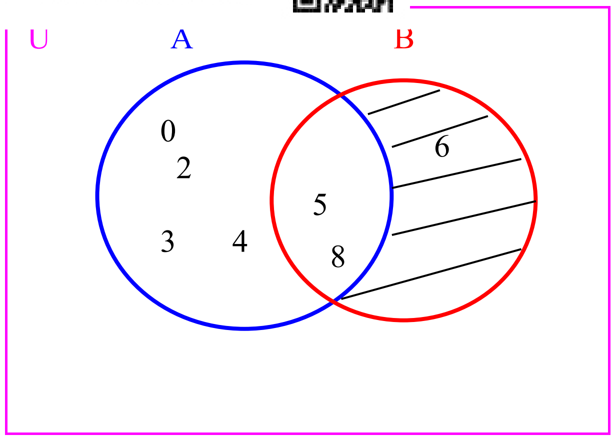


Diagrama de Venn que muestra $A - B$ y $B - A$

En el ejemplo anterior se tiene que B-A = {6, 8}, pues en este caso se escriben todos los elementos que están en B y que no están en A y su diagrama queda así:



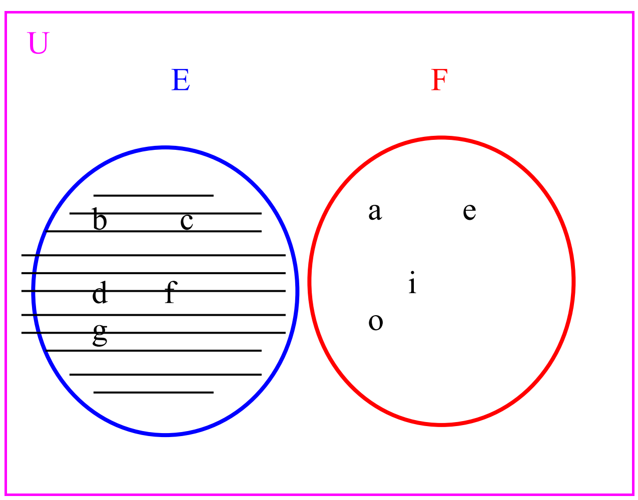
La región sombreada es B – A

Otros ejemplos:

1.- Si E = {b, c, d, f, g, h} y F = {a, e, i, o, u} entonces la diferencia de E con F es el conjunto

E - F = {b, c, d, f, g, h}.

En este caso los conjuntos E y F son ajenos y la diferencia es el mismo conjunto E pues los elementos de E que no están en F son todos los elementos de F.

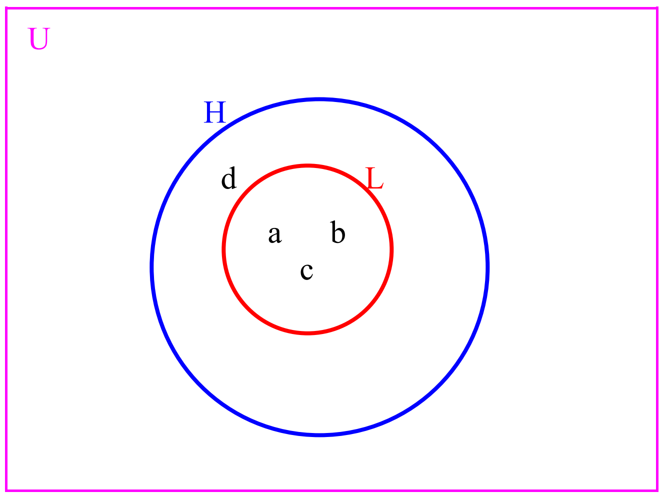


La región sombreada es E – F

2.- Si L = {a, b, c} y H = {a, b, c, d, e} entonces la diferencia de L con H es el conjunto

$$L - H = \{\ \}$$

En este caso, se observa que el conjunto L es subconjunto de H entonces la diferencia resulta ahora el conjunto vacío, pues los elementos que están en L también son elementos de H. Así que en el diagrama de Venn no se ilumina nada pues el vacío no se puede iluminar y queda como sigue:



Aquí no hay región sombreada pues $L - H = \phi$

3.- Si C = {personas obesas} y D = {personas hipertensas} entonces
C - D = {personas obesas que no son hipertensas}

Actividades de aprendizaje

1.- Define con tus propias palabras la diferencia de dos conjuntos.

2.- Representa gráficamente la diferencia de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn

a) C = {a, b, c, d, e, f, g, h} y D = {a, b, c, e, i, o, u}, C - D

b) E = {1, 2, 3, 4} y F = {5, 6, 7}, E - F

c) L = {2, 4, 6} y H = {pares}, L - H

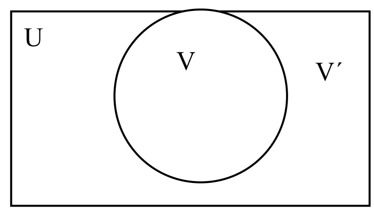
Complemento de un conjunto

Si un conjunto A es subconjunto de otro conjunto universal U, *al conjunto A'* formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A, se le llama ***complemento de*** *A*.
Simbólicamente se expresa:

$$A' = \{x \,/\, x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplo

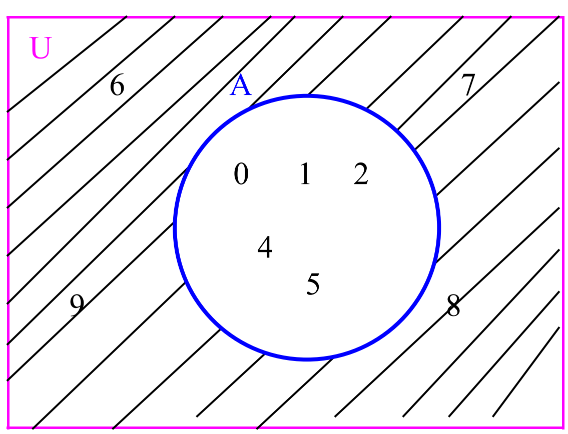
V = {a, e, i, o, u}
El complemento de V es:
V´ = {Consonantes del alfabeto}



Por ejemplo:
Si el conjunto universal es U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y
A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} entonces el complemento de A es el conjunto:

$$A' = \{6, 7, 8, 9\}$$

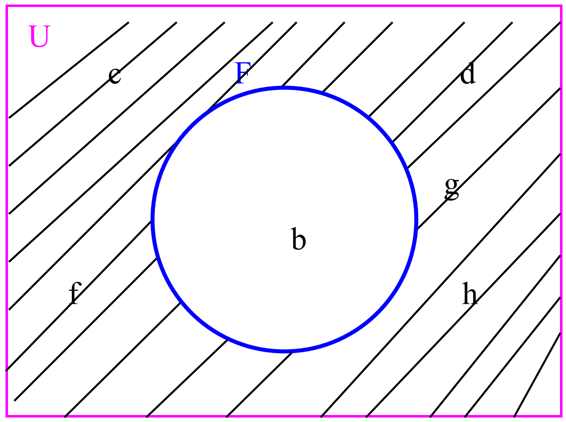
Es decir, el complemento de A está formado por los elementos que le faltan a A para ser el conjunto universal. Observar que siempre un conjunto unión su complemento forman el conjunto universal. Su diagrama de Venn queda como sigue y lo iluminado es el complemento de A:



La región sombreada es A'

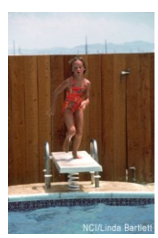
Otros ejemplos:
Si el conjunto universal es U = {b, c, d, f, g, h} y F = {b} entonces el complemento de F es el conjunto

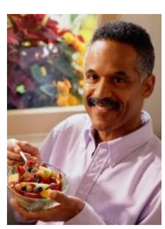
F' = {c, d, f, g, h}.



La región sombreada es F'

Si U = {personas} y C = {personas obesas} entonces
C' = {personas no obesas}.




Actividades de aprendizaje

1.- Define con tus propias palabras el complemento de un conjunto.

2.- Representa gráficamente el complemento de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn, considerando el conjunto universal que se da en cada caso.

a) U = {a, b, c, d, e, f, g, h} y D = {a, b, c, e}, D'

b) U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y F = {5, 6, 7}, F'

La teoría de conjuntos se puede aplicar para resolver problemas de la vida cotidiana tales como el siguiente:

Para los votantes en una pequeña comunidad de 300 personas, se tiene que 110 son mayores de 20 años, 120 son mujeres y 50 son mujeres mayores de 20 años. Determinar el número de votantes que:

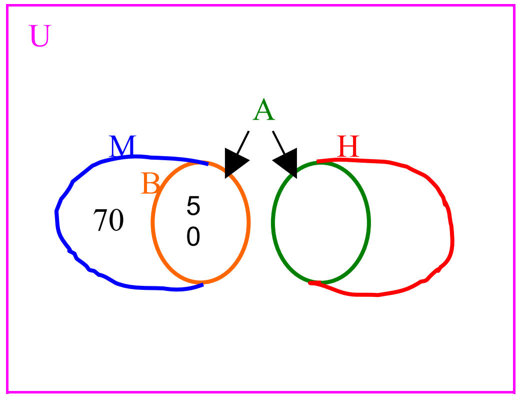
a) Son hombres
b) Son hombres mayores de 20 años
c) Son mujeres con 20 o menos años
d) Son hombres con 20 o menos años
e) Tienen 20 o menos años

La solución de este problema es muy fácil si se utiliza la notación de los conjuntos y su representación gráfica.
Lo primero que se hace es identificar los conjuntos que se tienen. Claramente, la población de votantes se divide en dos conjuntos el de las mujeres y el de los hombres. Hay otros dos conjuntos que se pueden determinar con la información del problema. Uno es el de las personas que son mayores de 20 años y el otro el de las mujeres que son mayores de 20 años.

Se definen estos conjuntos por comprensión:
U = {x / x es una persona de la población}, o sea el conjunto de todas las personas de esa población, el cual es el conjunto universal en este caso;
M = {x∈ U / x es mujer}, o sea el conjunto de todas las mujeres de esa población;
H = {x∈ U / x es hombre}, o sea el conjunto de todos los hombres de esa población;
A = {x∈ U / x es una persona mayor de 20 años}, o sea el conjunto de todas las personas (hombres o mujeres) de esa población que son mayores de 20 años;
B = {x∈ U / x es una mujer mayor de 20 años}, o sea el conjunto de todas las mujeres de esa población que son mayores de 20 años;

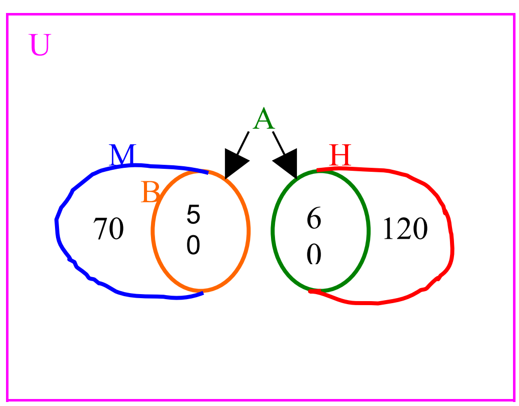
Se tiene además la información siguiente:
Card (U) = 300, la cardinalidad de U es 300 o sea la población tiene 300 habitantes;
Card (M) = 110, la cardinalidad de M es 110 o sea la cantidad de mujeres es de 110;
Card (B) = 50, la cardinalidad de B es 50 o sea la cantidad de mujeres mayores de 20 años es 50;

Ahora, usando un diagrama de Venn, el problema queda representado como sigue:



Obsérvese en el diagrama que la intersección de A con M representa al conjunto de todas las mujeres que son mayores de 20 años, o sea el conjunto B. El número 50 colocado en la intersección representa a todos los elementos de B. El 70 representa las mujeres que no son mayores de 20 años pues en total la cantidad de mujeres es de 120.

Si completamos el diagrama con los demás datos del problema que tenemos queda así:



Luego, ya es muy fácil dar respuesta a lo que se pide. El número de votantes que:

a) Son hombres es 180;
b) Son hombres mayores de 20 años es 60

c) Son mujeres con 20 o menos años es 70
d) Son hombres con 20 o menos años es 120
e) Tienen 20 o menos años es 190.

Por lo tanto, hemos resuelto el problema. Al resolver problemas de este tipo, es muy recomendable hacer un diagrama de Venn para facilitar el proceso de resolución.

Actividades de aprendizaje

Resuelve los siguientes problemas de la vida cotidiana:

1.- En un grupo de 30 alumnos, 16 practican fútbol, 12 atletismo y 15 básquetbol. Si:

3 alumnos practican los 3 deportes,

5 alumnos sólo practican básquetbol y atletismo,

4 alumnos sólo practican fútbol y básquetbol,

2 alumnos sólo practican atletismo y fútbol,

¿Cuántos alumnos sólo practican fútbol?

A) 5 B) 8 C) 7

D) 6 E) No se puede saber

2.- En el problema anterior ¿Cuántos no practican algún deporte?

A) 4 B) 8 C) 6

D) 6 E) No se puede saber

3.- En el último año escolar de un bachillerato, 120 alumnos quedan distribuidos de la siguiente manera en materias optativas:

Computación: 60 alumnos.

Ciencias Sociales 47.

Matemáticas 68.

Si 28 alumnos asisten a las 3 materias, 27 alumnos sólo a matemáticas y computación, 4 alumnos sólo a Matemáticas y a computación y sociales sólo asisten 2 ¿Cuántos alumnos asisten sólo a Ciencias Sociales?

A) 4 B) 8 C) 3

D) 6 E) No se puede saber

4.- En el problema anterior ¿Cuántos asisten a Ciencias Sociales y Matemáticas?

A) 3 B) 8 C) 6

D) 9 E) No se puede saber

Preguntas para la auto evaluación

1.- Tomemos el conjunto U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} como el conjunto universal y si

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} C = {4, 5, 6, 7}

B = {2, 3, 4, 5} D = {7, 8, 9, 10}

Determine los conjuntos que se indican y represente la operación en un diagrama de Venn.

$A \cup C$

$B \cap C$

$A \cap D$

A'

$A \cup B'$

$B \cup \phi$

$C' \cap D$

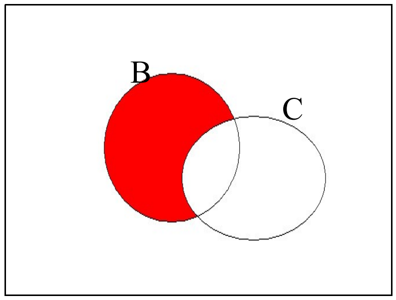
$(A \cap B)'$

A' U B'

A - B

$U \cup A$

2.- Observe el siguiente diagrama.



Escoja la expresión que le corresponda:

a) $B \cap C'$ b) $B' \cap C$ c) $B' \cap C'$ d) $(B \cap C)'$

3.- ¿Cuál de los siguientes conjuntos tiene la misma cardinalidad que el conjunto {5, 7, 9, 11, 13, 15}?

a) {5, 7, 9, 12, 13, 15} b) {5, 11, 13, 15} c) {5, 15} d) {5}

4.- Un conjunto igual al conjunto P = {x∈ N /x es impar mayor que 2 y menor que 6} se observa en la opción:

a) {3} b) {3, 5} c) {2, 3, 4} d) {2, 3, 4, 5, 6}

5.- Dado el conjunto universal U = {x∈ N / x < 10}, el complemento del conjunto

G = {x∈ U / x < 7} es:

a) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14} b) {7, 10} c) {7} d) {8, 9, 7}

6.- Identifique un subconjunto de {x∈ N /x es divisor de 24}

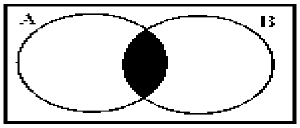
a) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} b) {2, 12} c) {7, 24} d) {4, 6, 8, 10}

7.- ¿Cuál es el conjunto que resulta de la intersección de los conjuntos:
A = { 1, 2, 3, 5, 6, 7 } Y B = { 1, 5, 9 }

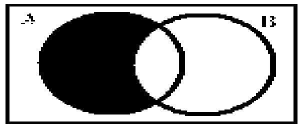
a) {1, 5 }
b) { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 }
c) { 2, 6 }
d) { 1, 3, 5, 7, 9 }

8.- ¿En cual de los siguientes diagramas la parte sombreada representa $A \cap B$?

a)



b)



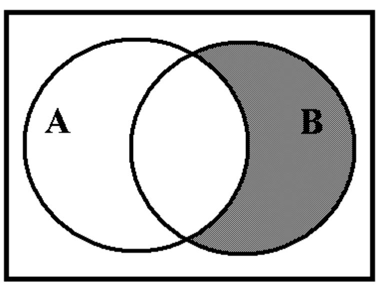
c)

d)

9.- Determinar la intersección de A y B dados A = { $x \in N$ / x es un número digito par} y B = { $x \in N$ / $x < 5$ }

a) { 6, 8 }
b) { 2, 4, 6, 8 }
c) { 2, 4 }
d) { 1, 2, 3, 4, 5 }

10.- Diga qué operación se lleva a acabo en el siguiente esquema



a) $A' \cap B$
b) $(A \cup B)'$
c) $(A \cap B)'$
d) $A \cup B'$

11.- Determinar la unión de A = { las letras “paralela” } y B = { las letras “plana” }

a) { p, a, l }
b) { n, r, e }
c) { p, a, r, l, e, n }
d) { p, l, n, r }

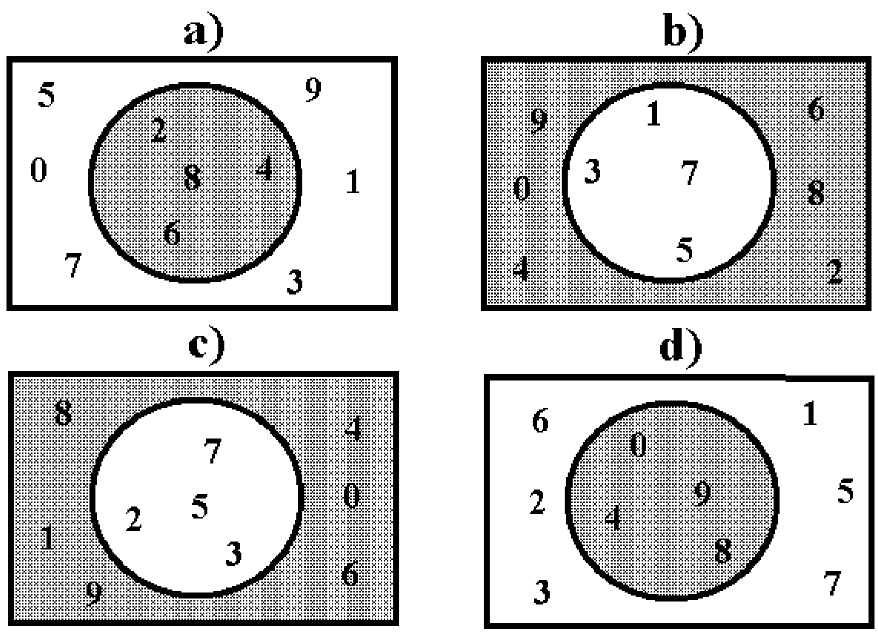
12.- ¿Cuál es el complemento del conjunto S = { El conjunto de los números pares }?

a) { 2, 4, 6, 8, 10,.........}
b) { 1, 3, 5, 7, 9,.........}
c) { 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13,.........}
d) { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,.........}

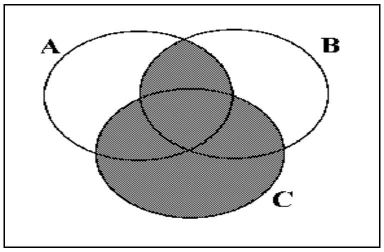
13.- ¿Cuál es el complemento de {1, 3, 5 } si el universo U = { x / x es número impar menor que 15 }

a) { 7, 11, 13 }
b) { 2, 4, 6 }
c) { 3, 5, 15 }
d) { 7, 9, 11, 13 }

15.- La representación gráfica del complemento de
$A = \{x \in U \mid x \text{ es un numero primo}\}$; si $U = \{x \mid x \text{ es un digito}\}$



16.- Diga que operación se lleva a acabo en el siguiente esquema.



a) (A ∩ B) ∪ C
b) (A ∪ B) ∩ C
c) (A ∪ B) ∪ C
d) (A ∩ B) ∩ C

Módulo 5
Inducción y Deducción

OBJETIVO:
Distinguirá razonamientos en que se empleen los métodos inductivo y deductivo; la definición, construcción y forma de graficar en Diagrama de Venn las proposiciones simples y abiertas identificando su valor de verdad.

Lógica
Es la ciencia que tiene por objeto llegar a la verdad, utilizando el método racional.

Razonamiento inductivo
Es el proceso de encontrar un principio general, basándose en la presentación de hechos o casos particulares.
Ejemplo:

- Hecho numero uno: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).
- Hecho numero dos: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).
- Hecho numero tres: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).
- Principio General: Al meter la mano en agua a 350 grados sufrirías quemaduras de primer grado.

Usemos el razonamiento inductivo para establecer un principio general:

Un borrego fue alimentado con alfalfa durante nueve días consecutivos.

¿qué induces que pasó en el décimo día?

Conclusión: ____

Razonamiento deductivo
Es el proceso de utilizar un principio general aceptado como verdadero para obtener una conclusión en un caso o hecho en particular.
Ejemplo:

- Principio general aceptado como verdadero: Al meter la mano en agua a 350 grados sufrirías quemaduras de primer grado.
- Hecho numero uno: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).

Usemos el razonamiento deductivo para establecer un principio particular:

Todos los estudiantes de prepa aprueban matemáticas. Si Juan es un estudiante de prepa entonces:

Conclusión: ____

Proposición
Es una oración de la que se puede decir si es verdadera o falsa.
Por ejemplo:
El perro es un animal mamífero (verdadera)
México está en el continente europeo (falsa)

Dos ejemplos de oraciones que no son proposiciones abiertas son las siguientes:

Karla tiene 10 años (no es verdadera ni falsa puesto que no se sabe de que Karla se está hablando).

Juan Gabriel es el mejor cantante de México. (no es verdadera ni falsa puesto que no se sabe de que Juan Gabriel se está hablando).

Proposiciones simples
Son las oraciones o proposiciones que inmediatamente se puede decir si son verdaderas o son falsas.
Valor de verdad: Es la clasificación de la proposición simple de acuerdo a si es verdadera o es falsa.
Ejemplos:
Proposición simple: Los números pares son impares.
Valor de verdad: Falso.

Proposición simple: Monterrey es la capital de Nuevo león.
Valor de verdad: Verdadero.

Proposiciones abiertas
Es una oración en la que interviene alguna variable (letra) y se debe tener un conjunto de reemplazamiento para decidir si es verdadera o falsa.

Conjunto de verdad: Es el conjunto de elementos que hacen que la proposición sea verdadera.

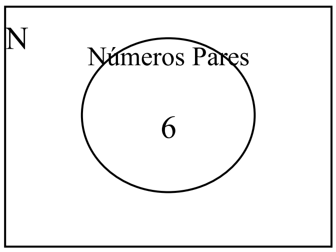
Ejemplos:

Oración abierta:	X es un número impar
Conjunto de reemplazamiento:	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
Conjunto de verdad:	{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}

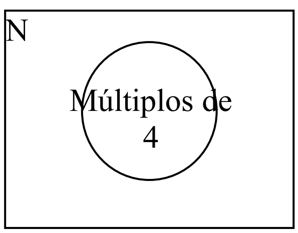
Oración abierta:	X es un número primo
Conjunto de reemplazamiento:	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}
Conjunto de verdad:	{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

Gráfica de proposiciones

Los diagramas de Venn son una forma de graficar proposiciones de tal manera que nos puedan ayudar a identificar más fácilmente los conjuntos.
Ejemplos:
Proposición simple: El numero 6 es un numero par.
Diagrama de Venn

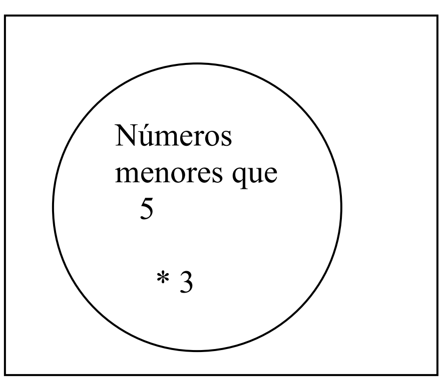


Proposición abierta: X es un múltiplo de 4.
Diagrama de Venn



Proposición: 3< 5

Esta proposición dice que el 3 es un elemento del conjunto de números menores que 5 y su gráfica es:



Actividades de aprendizaje

Use el razonamiento inductivo para establecer un principio general:

1.- Un estudiante de prepa observó durante cuatro días consecutivos que su novia sólo le daba un beso diario.

¿Qué induces que pasó en el quinto día?

Conclusión: ____

2.- Use el razonamiento deductivo para establecer un principio particular:

Todos los entrenadores de la selección mexicana pierden en penales. Si Hugo Sánchez es un entrenador de la selección mexicana entonces:

Conclusión: ____

En los siguientes ejercicios clasifique las oraciones diciendo si son o no, proposiciones y en caso afirmativo, si éstas son simples o abiertas dando su valor de verdad o su conjunto de verdad según sea el caso.

3.- "4 es un número primo"

4.- "3 y + 4 = 8"

5.- " 7 + 4 = 5 x ; $x \in N$ "

6.- "y es un número impar; $y \in N$ "

Utilice el lenguaje de conjuntos para modificar las siguientes proposiciones y así poder modificarlas.

7.- "Todos los múltiplos de 4 son pares"

8.- " 4 > 7 "

9.- ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición?

a) $5x - 3 = 2x + 8$
b) 5 es un factor de 45
c) Andrés Méndez es mayor.
d) Un rombo es menor que un cuadrado.

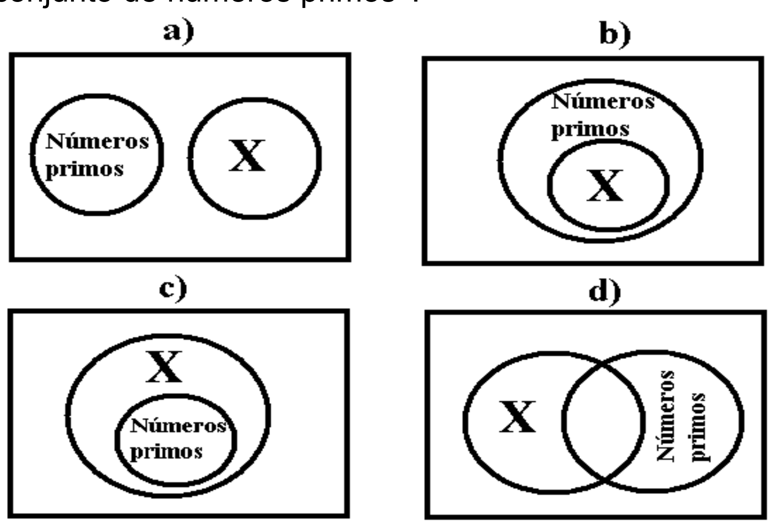
10.- El conjunto de verdad de la proposición $2x - 5 = 3 - 2x; x \in \aleph$, es:

a) $\{1\}$
b) $\{2\}$
c) $\{4\}$
d) $\{7\}$

11.- ¿Cuál de las siguientes proposiciones es <u>falsa</u>?

a) $\frac{20}{x - 2} = 4;\ x \in \aleph$
b) Esta proposición es falsa.
c) Maribel tiene un bonito auto rojo.
d) Un triangulo equilátero es isósceles.

12.- ¿En que grafica se localiza la proposición siguiente, “x es un elemento del conjunto de números primos”?



Módulo 6
Proposiciones compuestas

OBJETIVO:
Conocerá las proposiciones simples y compuestas, la conjunción de proposiciones, la disyunción de proposiciones, la disyunción inclusiva y la exclusiva

PROPOSICIONES COMPUESTAS: Es la unión de dos proposiciones simples mediante un conectivo lógico: “y”, “o”, “si…entonces”.

CONJUNCIÓN: Es la unión de dos proposiciones simples unidas por el conectivo lógico “y”.

Ejemplo: Laura es una mujer **y** trabaja
El número cinco es número dígito **y** es impar

Para que una conjunción sea verdadera, las dos proposiciones deberán ser verdaderas.

Por ejemplo, la proposición: El perro tiene cuatro patas y es mamífero es verdadera pues las dos proposiciones simples que la forman son verdaderas.

Para que una conjunción sea falsa, una de las proposiciones deberá ser falsa.

La proposición: El perro tiene cuatro patas y vuela es falsa pues aunque la primer proposición simple es verdadera, la segunda es falsa.

La CONJUNCION, se representará como una INTERSECCION de conjuntos.

Ejemplo: x es número dígito y es número par.

Primero determinamos, los elementos de la primer proposición

{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Después los elementos de la segunda proposición

{2,4,6,8,10,12…}

y vemos cuales son los números que cumplen con la condición de ser números dígitos y a la vez pares. En este caso el resultado sería:

{ 2,4,6,8}

El conjunto solución de esta CONJUNCION es la INTERSECCIÓN entre el primero y segundo conjuntos, es decir:
{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ∩ {2,4,6,8,10,12…} = {2,4,6,8}.

DISYUNCION: Son dos proposiciones simples unidas mediante el conectivo lógico " o".

4 es par ó 5 es impar

7 es dígito ó 9 es natural

Para que una disyunción sea verdadera, cualquiera de las proposiciones será verdadera.

Una disyunción será falsa, únicamente cuando las dos proposiciones sean falsas.

Para encontrar el conjunto solución de una disyunción primero determinamos que elementos componen a cada una de las proposiciones y después las unimos como si se tratara de una UNION de conjuntos.

X es menor que 9 ó es divisor de 6

Conjunto de reemplazamiento de la primer proposición:

{1,2,3,4,5,6,7,8}

Conjunto de reemplazamiento de la segunda proposición:

{1,2,3,6}

Conjunto de verdad

{1,2,3,4,5,6,7,8} U {1,2,3,6} = {1,2,3,4,5,6,7,8}

El conjunto solución será la unión entre los dos conjuntos anteriores, esto es, {1,2,3,4,5,6,7,8}

Actividades de aprendizaje

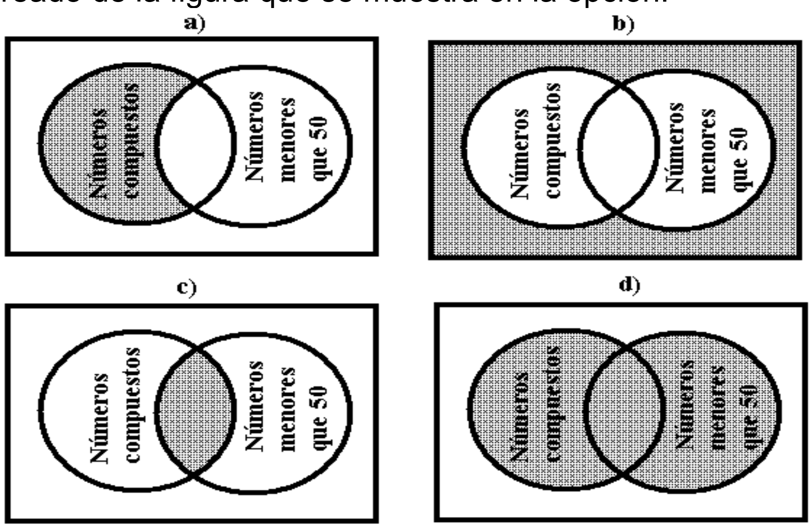
1. El conjunto solución de la proposición “x es un numero par y x $\leq$ 12”; $x \in \aleph$ es:

$\{1,2,5,7,11\}$
$\{2,4,7,9,12\}$
$\{2,4,6,8,10,12\}$
$\{3,4,5,7,8,9,11\}$

2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones compuestas es falsa?

a) “- 8 es menor que -1 y -1 es mayor que -8”
b) “3 es un numero primo y 19 un numero compuesto”
c) “ 4 es un numero compuesto y 21 un numero impar”
d) “2 es un numero natural y 7 es un numero divisor de 21”

3. El conjunto solución de la proposición compuesta “x es un numero compuesto o x es menor que 50”; $x \in \aleph$, esta representado por el sombreado de la figura que se muestra en la opción:



4. El conjunto solución de la proposición “x es un numero primo y x < 15”; $x \in \aleph$, es:

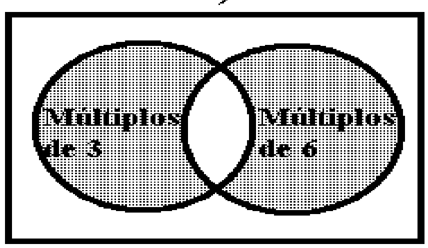
a) $\{2,3,5,7,11,13\}$
b) $\{2,4,6,8,10,12\}$
c) $\{1,3,5,7,11,13,15\}$
d) $\{1,2,3,5,8,9,11,13\}$

5. El conjunto solución de la proposición compuesta “x es un numero primo menor que 10 ó x es impar menor que 13”, es:

a) $\{2,3,5,7\}$
b) $\{3,5,7,9,11\}$
c) $\{2,3,5,7,9,11\}$
d) $\{2,4,6,8,10,13\}$

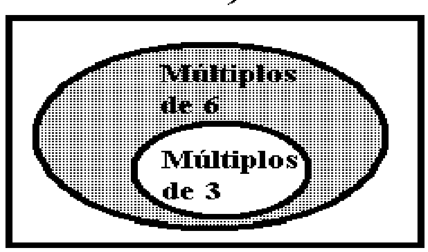
6. El conjunto solución de la proposición compuesta “x es múltiplo de 6 y x es múltiplo de 3”; $x \in \aleph$, esta representado por el sombreado de la figura que se muestra en la opción:

a)

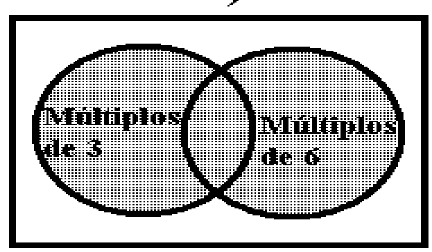


b)

c)



d)



Módulo 7
Negación

OBJETIVO:

Expresará la negación de una proposición dada, graficara el conjunto de verdad de la negación de una proposición, negará conjunciones y disyunciones. Construirá proposiciones con cuantificadores y las negará.

Negación: Es la contradicción a la proposición afirmativa utilizando el conectivo lógico “no”

Ejemplo:
Afirmativa: El día es agradable
Negación: El día no es agradable

Afirmativa: Todos los números negativos son naturales
Negación: Todos los números negativos no son naturales

Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por ~ p (se lee "no p") que le asigna el valor de verdad opuesto al de p. Por ejemplo:

p: Diego estudia matemática

~ p: Diego no estudia matemática

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	~ p
V F	F V

Observamos aquí que al valor V de p, la negación le hace corresponder el valor F, y viceversa.

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplo: La negación de " p: todos los alumnos estudian matemática" es

~ p: no todos los alumnos estudian matemática

o bien:

~ p: no es cierto que todos los alumnos estudian matemática

~ p: hay alumnos que no estudian matemática

Negación de proposiciones compuestas:

Negación de una Implicación

Las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $\sim (p \wedge \sim q)$ son equivalentes, como vemos realizando la tabla de valores correspondientes:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Con esto, comprobamos que la negación de la primera equivale a la negación de la segunda, es decir

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim\{ \sim(p \wedge \sim q)\}$, y podemos concluir entonces que:

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Es decir, la negación de una implicación no es una implicación sino la conjunción del antecedente con la negación del consecuente.

Ejemplo: Sea la implicación p: hoy es viernes **entonces** mañana es domingo

Su negación es ~ p: hoy es viernes **y** mañana **no** es domingo.

Es la contradicción a una o todas las proposiciones simples mediante el conectivo lógico “no”

Ejemplo:

A={X∈N| X< 5 y X no es numero par}
A={1, 3}

Luego, la negación de A es { X∈N / X $\not<$ 5 o X no es par}

Cuantificadores: Sirven para dar un valor cuantitativo a las proposiciones
Ejemplos: Todos, ninguno, algunos, etc.

Ejemplo:

Todos los múltiplos de 6 son números pares

Cuantificadores universales: Son los cuantificadores que incluyen a la totalidad de los elementos

Ejemplo:
Todos los hombres son mortales

Cuantificadores particulares: Son los cuantificadores que no incluyen la totalidad de los elementos de un universo

Ejemplo:
Por lo menos un hombre no es mortal

Función Proposicional

Supongamos los enunciados abiertos:

" *x* es la capital de Francia"

" $y + 4 = 11$"

Estos no tienen un valor de verdad. Pero si en el primero de ellos hacemos x = París , tenemos:

"París es la capital de Francia" (V)

Asimismo, si en el segundo hacemos $x = 9$, resulta: $9 + 4 = 11$ (F)

Podemos, entonces, dar la siguiente definición: "Una función proposicional es un enunciado abierto de la forma $P_{(x)}$ que se convierte en una proposición cuando se le asigna un valor específico a la variable".

Ejemplos:

$p_{(x)}$: $2x + 5 > 11$, si $x = 4$ entonces $13 > 11$ (Verdadero)

$q_{(x)}$: $3x + 7 = 11$, si $x = 5$ entonces $22 = 16$ (Falso)

$r_{(x)}$: $2x + 1 = 5$, si $x = 2$ entonces $5 = 5$ (Verdadero)

$s_{(x)}$: x es un animal, si *x* = mesa se tendrá: mesa es un animal (Falso)

$t_{(x)}$: x es un ave, si *x* = flamenco se tiene: el flamenco es un ave (Verdadero)

Más sobre Cuantificadores

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la indeterminada x, introducimos los símbolos $\forall$ **x** y $\exists$ **x**, llamados **cuantificador universal** y **cuantificador existencial** respectivamente. Las expresiones

Para todo *x*, se verifica $p_{(x)}$ se denota por □ x : $p_{(x)}$

Existe *x*, tal que se verifica $p_{(x)}$ se denota por □ x / $p_{(x)}$

Corresponden a una función proposicional $p_{(x)}$ cuantificada universalmente en el primer caso, y existencialmente en el segundo.

Ejemplo: Una función proposicional cuantificada universalmente es V si y sólo si son V todas las proposiciones particulares asociadas a aquella. Para asegurar la verdad de una proposición cuantificada universalmente es suficiente que sea verdadera alguna de las proposiciones asociadas a la función proposicional.

Un problema de interés es la negación de funciones proposicionales cuantificadas. Por ejemplo, La negación de "Todos los enteros son impares" es "Existen enteros que no son impares" y en símbolos: □ x / ~ $p_{(x)}$

Entonces, para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial, y se niega la función proposicional.

Ejemplo: Supongamos la proposición: Todos los alumnos de mi colegio son aplicados

La vamos a escribir en lenguaje simbólico, negarla y retraducir la negación al lenguaje ordinario.

Nos damos cuenta pronto que se trata de la implicación de dos funciones proposicionales:

$p_{(x)}$: es alumno de mi colegio

$q_{(x)}$: es aplicado

Tenemos: □ x : $p_{(x)} \Rightarrow q_{(x)}$

Teniendo en cuenta la forma de negar una función proposicional cuantificada universalmente y una implicación resulta:

□ x / $p_{(x)} \wedge \sim q_{(x)}$

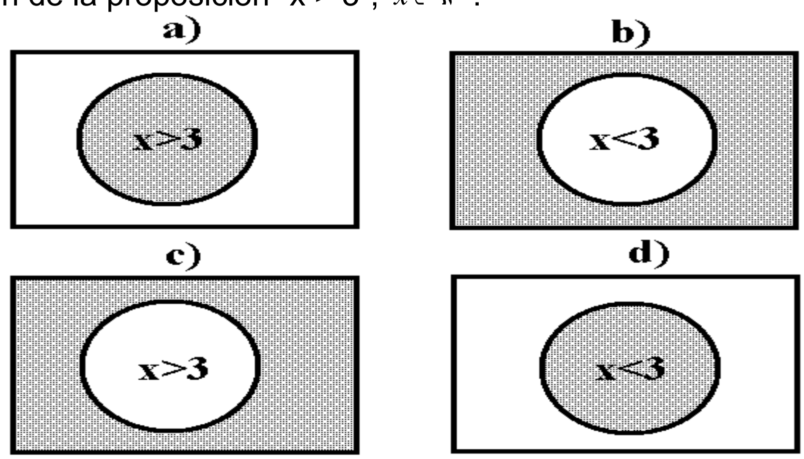
Y traduciendo al lenguaje ordinario resulta: Existen alumnos de mi colegio que no son aplicados.

Actividades de aprendizaje

1. La <u>negación</u> de la proposición "x < 9"; $x \in \aleph$, es

a) "x > 9"
b) "x = 9"
c) "$x \nless 9$"
d) "$x \ngtr 9$"

2. ¿En cual de los siguientes diagramas la parte sombreada representa la negación de la proposición "x > 3"; $x \in \aleph$?



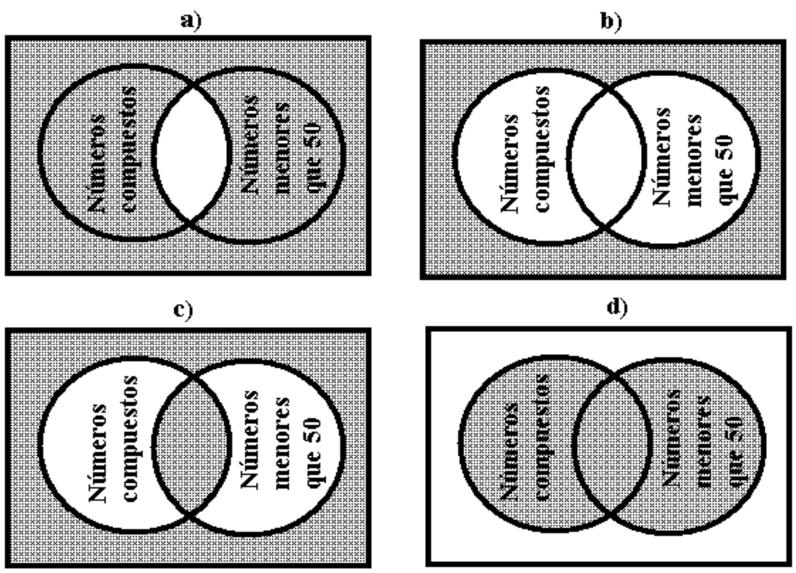
3. La <u>negación</u> de la proposición "x es un numero primo y x < 15"; $x \in \aleph$, es:

a) "x no es un numero primo o $x \nless$ 15"
b) "x no es un numero primo y x > 15"
c) "x es un numero par o x < 15"
d) "x es un numero par y $x \ngtr$ 15"

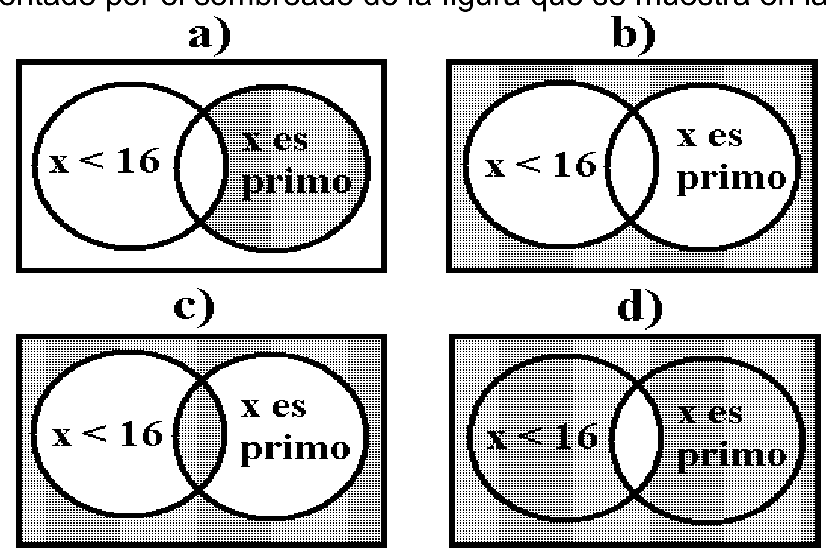
4. La <u>negación</u> de la proposición “x no es primo menor que 10 ó x $\geq$ 13”; $x \in \aleph$, es:

a) “x es menor que 10 y x $\leq$ 13”
b) “x es primo mayor que 10 ó x $\ngeq$ 13”
c) “x es primo menor que 10 y x $\ngeq$ 13”
d) “x es compuesto mayor que 10 ó x $\leq$ 13”

5. La <u>negación</u> de la proposición “x es un numero compuesto o x es menor que 50”; $x \in \aleph$, esta representado por el sombreado de la figura que se muestra en la opción:



6. La <u>negación</u> de la proposición “x < 16 y x es primo”; $x \in \aleph$, esta representado por el sombreado de la figura que se muestra en la opción:



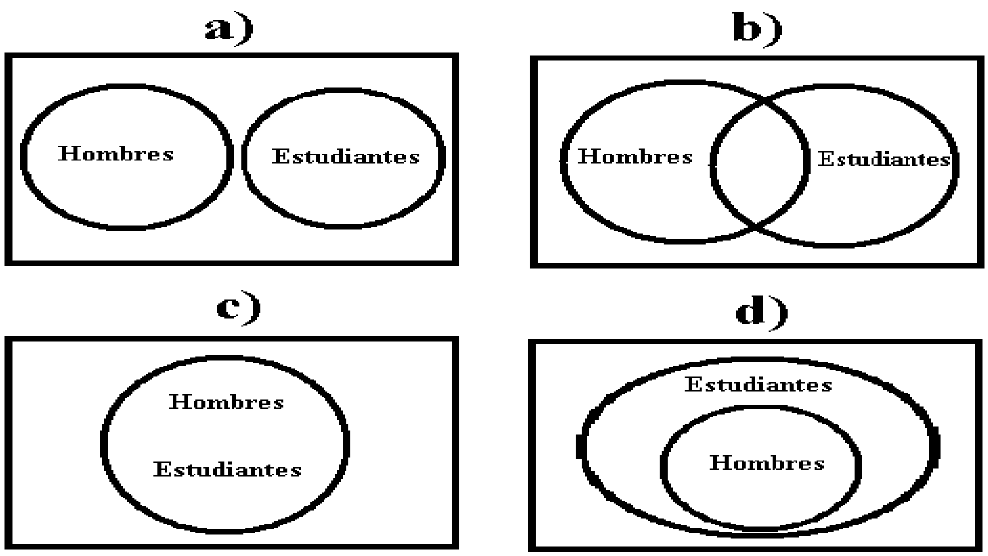
7. La <u>negación</u> de la proposición: "Todos los metales son buenos conductores del calor", es

a) "Ningún metal no conduce el calor"
b) "Al menos un metal conduce el calor"
c) "Todos los metales no conduce el calor"
d) "Al menos un metal no conduce el calor"

8. ¿Cuál es la <u>negación</u> de: "Algunos números primos no son impares"?

a) "Algún numero par el primo"
b) "Todos los números primos y impares"
c) "Todos los números primos son impares"
d) "Por lo menos un números primos es impar"

9. La <u>negación</u> de la proposición " Todos los hombres son estudiantes" se representa gráficamente en la opción:



Módulo 8
Implicación. Equivalencia Lógica

OBJETIVO:
Identificará la suposición o hipótesis de la implicación y su conclusión, expresará en diferentes formas una implicación; e identificará las proposiciones equivalentes.

Implicación: Es una proposición compuesta que utiliza el conectivo lógico si...... entonces.

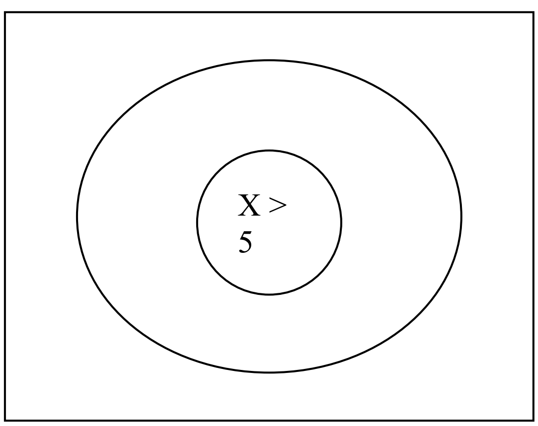
Se considera un tipo de razonamiento donde hay una hipótesis y una posible conclusión.

Ejemplo:
Hipótesis: X > 5

Conclusión: X > 4

Si X es mayor a 5 implica que X tiene que ser forzosamente mayor a 4
Ejemplo**: Si** un animal vuela, **entonces** es un ave.
En este ejemplo la hipótesis es la oración: Un animal vuela y la conclusión es la oración: es un ave.

En el diagrama de Venn la implicación se representa como un subconjunto, en donde la conclusión es el conjunto mayor y la hipótesis el subconjunto:



En otras palabras: La implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \Rightarrow q$ (si p entonces q) cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p se llama antecedente, y la proposición q se llama consecuente de la implicación o condicional. La tabla nos muestra que la implicación sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Por ejemplo, analicemos la siguiente implicación y su valor de verdad:

$$x > 4 \Rightarrow x > 6$$

Observe que si al antecedente “x > 4” lo tomamos como verdadero entonces el consecuente “x > 6” es falso y así la implicación es falsa porque no todos los números que son mayores que 4 son mayores que 6. Por ejemplo, el 5 es mayor que 4 pero no mayor que 6.

Veamos más ejemplos:

Ejemplo: Supongamos la implicación:

$$\underbrace{\text{Si apruebo}}_{p}\text{, } \overset{\textit{entonces}}{\Rightarrow} \underbrace{\text{te presto el libro}}_{q}$$

La implicación está compuesta de las proposiciones

p: apruebo

q: te presto el libro

Nos interesa conocer la verdad o falsedad de la implicación anterior, en relación a la verdad o falsedad de las proposiciones p y q. El enunciado puede pensarse como un compromiso, condicionado por p, y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es evidente que si p es F, es decir si no apruebo el examen, quedo liberado del compromiso y preste o no el libro la implicación es verdadera.

Si p es verdadera, es decir si apruebo el examen, y no presto el libro, el compromiso no se cumple y la proposición i) es falsa. Si p y q son verdaderas, entonces la proposición i) es verdadera pues el compromiso se cumple.

Ejemplo: $1 = -1 \Rightarrow 1^2 = (-1)^2$ (F)

La proposición resulta ser falsa por ser el antecedente ($1 = -1$) es falso.

Proposiciones equivalentes: Son las proposiciones que tienen el mismo valor de verdad o el mismo conjunto de verdad

Ejemplo:
Todos los ángulos rectos son de la misma medida
Si los ángulos son rectos entonces tienen la misma medida
El conjunto de ángulos rectos es un subconjunto del conjunto de ángulos con la misma medida.

VARIANTES DE LA IMPLICACION

Conversa: Es una variante de la implicación en la cual cambiamos el orden de los proposiciones dejando en su lugar al conectivo

Ejemplo:

Si tiene alas, entonces vuela
Su conversa es: Si vuela, entonces tiene alas

Si un número entero es múltiplo de 8, entonces es número par
Su conversa es: Si un número entero es par, entonces es múltiplo de 8

Inversa: Se niega cada una de las proposiciones que componen la implicación.
Si es un animal, entonces es un ser vivo.
Su inversa es: Si no es un animal, entonces no es un ser vivo

Contrapositiva: Es utilizar la proposición conversa pero negando ambas proposiciones

Ejemplo:

Si x es mayor que 7, entonces x es mayor que 4

Su contra positiva es: Si x no es mayor que 4, entonces x no es mayor que 7

Si una figura geométrica es un rectángulo, entonces es un paralelogramo
Su contra positiva es: Si una figura geométrica no es un paralelogramo, entonces no es un rectángulo

Silogismos: Es una unidad básica en las demostraciones y se forma con tres preposiciones, premisa mayor, premisa menor y conclusión.
La premisa mayor siempre es una implicación mientras que la premisa menor es solo una proposición simple.

Ejemplo:
Premisa Mayor: Si un animal es un oso entonces le gusta la miel
Premisa Menor: mi animal preferido es un oso
Conclusión: Mi animal preferido le gusta la miel.

Observe que la conclusión se obtiene utilizando ambas premisas con el fin de llegar a algo lógico. De hecho, para llegar a la conclusión se debe ver como se relacionan ambas premisas, se puede decir que la conclusión parte de la premisa menor para relacionarla con el consecuente de la premisa mayor.

Premisa mayor: Si un número es múltiplo de 4 entonces es divisible entre dos
Premisa menor: El numero 16 es múltiplo de 4
Conclusión: El numero 16 es divisible entre dos.

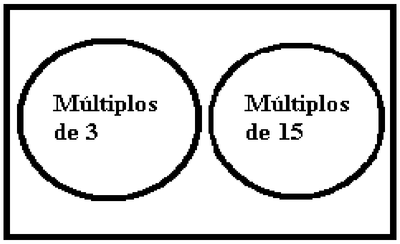
Actividades de aprendizaje

1. ¿Cuál de las siguientes implicaciones es verdadera?

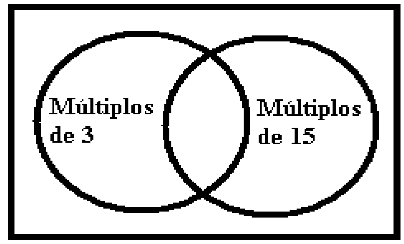
a) “$x < 0 \Rightarrow x > 1$”
b) “$x > 10 \Rightarrow x = 25$”
c) “$x \leq 20 \Rightarrow x \geq -2$”
d) “$x \geq -1 \Rightarrow x \leq -4$”

2. ¿Cuál de las siguientes graficas representa la implicación “Si x es múltiplo de 15, entonces es múltiplo de 3; $x \in \aleph$,?

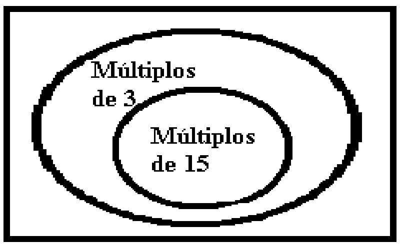
a)



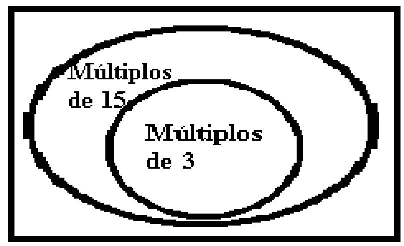
b)



c)



d)



3. ¿Cuál es la conversa de la implicación “Si una figura es un cuadrado, entonces es un rectángulo”?

a) “Si una figura es un triangulo, entonces es un cuadrado”
b) “Si una figura es un triangulo, entonces es un rectángulo”
c) “Si una figura es un rectángulo, entonces es un triangulo”
d) “Si una figura es un rectángulo, entonces es un cuadrado”

4. La contra positiva de “Si x es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2”, es:

a) “Si x no es múltiplo de 4, entonces no es múltiplo de 2”
b) “Si x no es múltiplo de 2, entonces no es múltiplo de 4”
c) “Si x es múltiplo de 2, entonces no es múltiplo de 4”
d) “Si x es múltiplo de 4, entonces no es múltiplo de 2”

5. Al aplicar la regla de la cadena a las implicaciones “$x < 9 \Rightarrow x < 12$” y “$x < 12 \Rightarrow x < 15$”; se concluye que.

a) “Si $x < 12 \Rightarrow x < 9$”
b) “Si $x < 9 \Rightarrow x < 15$”
c) “Si $x < 15 \Rightarrow x < 9$”
d) “Si $x < 12 \Rightarrow x < 15$”

Módulo 9
Sistema matemático y operaciones binarias

OBJETIVO:
Identificar los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales; resolver una operación binaria, representar un número racional en forma decimal

Números Naturales

Son un sistema estudiado en aritmética, en el cual el conjunto de objetos es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$; tienen como relaciones de orden "menor o igual que", "mayor o igual que", simbolizado como $\leq$, $\geq$ respectivamente y como operaciones fundamentales la suma y el producto $\{+, x\}$.

El conjunto de los números naturales se identifica con la letra N, es decir:
N = $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

La cantidad de números naturales es infinita, porque siempre es posible agregar un número más. No existe un número que sea el mayor de todos.
http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-111.html

Puesto que la ecuación b + x = 0, con b perteneciente a los naturales, no tiene solución dentro de éste conjunto N, se debe ampliar el conjunto numérico de los naturales, de tal manera que toda ecuación de este tipo tenga solución.

Existen muchos números que no son Naturales. Uno de ellos es el cero (0) y otro son los números negativos, Por ejemplo, (-5) es un número negativo que se lee "5 negativo" o "menos cinco".

Observe que (-3) y (3) son opuestos en el sentido de que (-3) + 3 = 0

Se dice que (-3) y (3), cada uno es el *Inverso Aditivo* del otro. Esto es:

3 es el inverso aditivo de (-3)
Y
(-3) es el inverso aditivo de 3

Si al conjunto N le agregamos el elemento 0 entonces definimos al conjunto de números no negativos:

C = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Números Enteros
Un número Entero es cualquiera de los números

{…-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,…}

Un número Natural es a su vez un número Entero. Dicho de otra manera, los números enteros se componen de los números naturales, sus inversos aditivos y el cero. Visto así, el inverso aditivo de todo número natural es un número Entero.

Si todo número Natural es a su vez un número Entero ¿Todo número Entero es a su vez un número Natural? Es claro que no: por ejemplo, (-5) es un número Entero, pero no es un número Natural. Así mismo, el cero es un entero, pero no es un natural.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
El número (-8) es:

a) Un número Entero
b) Un número Natural
c) Es un Entero y a su vez un Natural

Si eligió la letra a, acertó.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) 5 es un número Entero.
b) 5 es un número Natural
c) 5 es un número Entero y un número Natural

¡Todas son verdaderas!

El conjunto de los números enteros lo notamos por E, es decir nombrado por extensión queda:

E = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,....}

En la literatura matemática también se denota a los números enteros con la letra Z.

Ahora, el sistema de los números enteros es el conjunto E y las relaciones “mayor o igual que” y “menor o igual que”, y las operaciones definidas son la suma, resta, multiplicación y división.

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-121.html

Al estudiar el comportamiento de las ecuaciones en los números enteros se encuentra que las ecuaciones del tipo, (b) (x) = 1 con $b \neq 0$, no tiene solución en el campo de lo números enteros (E). Por ejemplo, no hay un número entero que multiplicado por 4 de uno.

Al ampliar el sistema numérico se pueden construir las soluciones a dichas ecuaciones.

Números Racionales
El sistema de los números racionales, se define como una ampliación de los números enteros, como un sistema en el cual se cumplan las siguientes condiciones:

El conjunto de objetos, expresado por comprensión, es $\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ y } q \in E, q \neq 0 \}$.

El conjunto de relaciones es $\{<, >, <, \geq\}$.
El conjunto de las operaciones es $\{+, -, x, \div\}$.

La solución a la ecuación (b) (x) = 1, x es el número racional $\frac{1}{b}$ llamado el inverso multiplicativo de b, tal que: (b) $(\frac{1}{b})$ = 1

Si se denota por D, al conjunto de los números Racionales, entonces queda determinado el conjunto, por comprensión, así:

$$D = \{ p / q \mid p \text{ y } q \in E, \ q \neq 0 \}$$

En la literatura matemática también se denota a los números racionales con la letra Q.

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-131.html

Son racionales por ejemplo los números 3 / 5, 7 / 9, 8 / 3, 0, - 9, 13,..., etc.

Un número racional es aquel que se puede expresar como el cociente de dos números, es decir, el número que se obtiene al dividir uno de los números por el otro. La división puede, de hecho, haberse desarrollado o simplemente indicarse, siempre y cuando el denominador no sea cero.

Por ejemplo, el cociente de 6 entre 3 se puede indicar como 2 o como 6/3. Del mismo modo, el cociente de 5 entre 2 se puede indicar como 5/2 o como 2½.

Cualquier número que se pueda expresar como un cociente de enteros, es un número Racional. Así, 2/5 es un número Racional porque está expresado como el cociente de los números enteros 2 y 5.

El número 7 es un número racional porque se puede expresar como 14/2, 21/3, 28/4, -35/-5 o simplemente como 7/1. Del mismo modo 1½ es un número racional puesto que se puede expresar como 3/2 que es, sin duda, el cociente de los enteros 3 y 2.

El número 1 es Racional porque se puede expresar como un cociente de cualquier número entre si mismo: 5/5, 7/7, -3/-3 o simplemente 1/1.

¡El cero también es un número Racional! Porque se puede expresar como el cociente del mismo cero, que es un número entero, entre cualquier otro número entero que no sea cero. Es decir 0/5, 0/9, 0/-13, etc.

Es claro que al dividir un número entero por 1, el número entero no cambia. Esto es, si n es un número entero, entonces:

$$\frac{n}{1} = n$$

Esto significa que cualquier entero se puede expresar como un cociente de enteros y, por lo tanto, será un número Racional.
Cuando se expresa un número Racional como cociente de Enteros, se puede escribir como una fracción común, pero también se pueden escribir como fracciones decimales.

En realidad, todo número Racional tiene una forma decimal; por ejemplo, la forma decimal de ½ es 0.5 o bien, la forma decimal de ¾ es 0.75 y de ¼ es 0.25.

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-134.html

Un número racional se definió como un decimal que termina o un decimal que se repite indefinidamente. Si un decimal ni se repite indefinidamente ni termina, no es un número Racional.

Números Irracionales
Al conjunto formado por todas las expresiones decimales infinitas y no periódicas se le llama el conjunto de los números irracionales y se denota por D'. Es decir, un número Irracional es aquel cuya forma decimal ni termina ni se repite indefinidamente.

En la literatura matemática también se denota a los números irracionales con la letra I.

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-141.html

Las expresiones decimales siguientes:
1, 41421356...
3, 14159256...
2, 645751311...
2, 718281887...

Que son infinitas y no periódicas, no pueden representar un número racional, puesto que resulta imposible escribirlas como razón o cociente de dos enteros (p/q). Los ejemplos anteriores son la expresión decimal de los números irracionales $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{7}$ y el número e.

Conunto de los Números Reales

El conjunto de los números reales tiene como conjunto de objetos a la reunión de todos los números que pertenecen a los sistemas anteriormente estudiados, es decir, si denotamos al conjunto de los números reales por R, se puede escribir que R = D U D'.

De esta forma podemos decir que un número real es un decimal finito, infinito, nulo, positivo o negativo. En pocas palabras, todos los números que hasta ahora conocemos.

Por lo tanto el conjunto de los reales esta formado así:

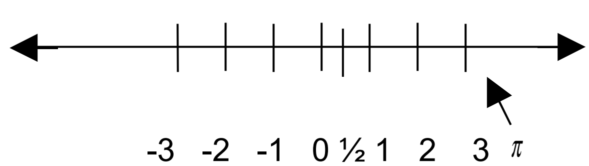
R = (Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales)
-
R = {..., -3,-2, - 1/2, -1, O, 1, $\sqrt{2}$, 1.5, 2, π ...}

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-141.html

Representación de los Reales en la recta.

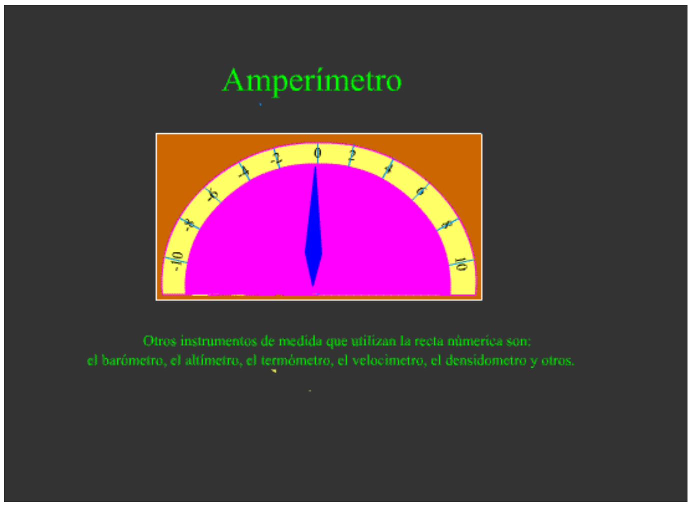
La famosa recta numérica ahora ya le podemos cambiar de nombre y le llamaremos recta de los reales o recta real. Así, la recta real es la recta donde a cada punto de ella le asociamos un único número real y viceversa.

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-143.html



Hay ejemplos donde se usan los reales en una gráfica donde no necesariamente son rectas:

Ejemplo 1

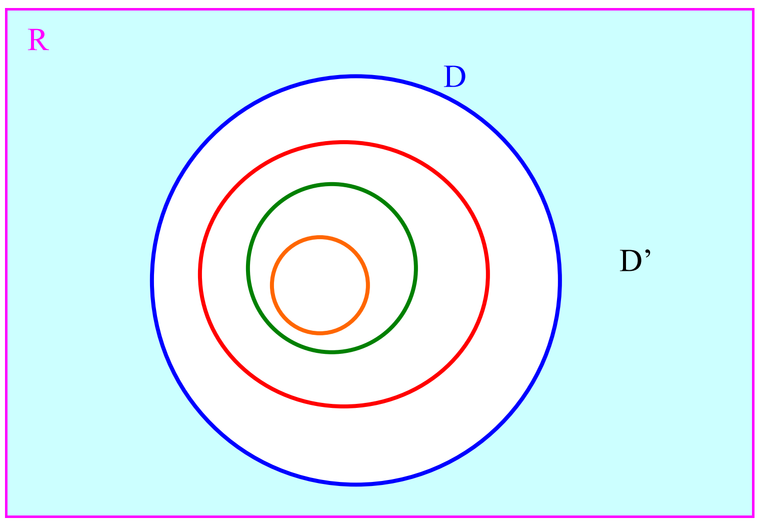


Ejemplo 2

REPRESENTACIÓN DE LOS REALES EN UN DIAGRAMA.

Anteriormente estudiamos colecciones de números como los Naturales, los Enteros, los Racionales, los Irracionales y, considerándolos a todos juntos, a los números Reales.

En lo general, un número natural es a su vez un número Entero y todo número Entero es al mismo tiempo un número Racional. Por supuesto, todo número Natural es a su vez un número Racional. Esta generalidad se puede representar como sigue:



Si analizamos las relaciones que hay entre estos conjuntos usando las operaciones de conjuntos tenemos las siguientes:

1.- $N \subset E \subset D \subset R$, es decir, los Naturales están contenidos en los Enteros, los Enteros están contenidos en los Racionales y éstos en los Reales.

2.- $D' \subset R$, es decir, los Irracionales están contenidos en los Reales.

3.- $D \cup D' = R$, es decir, la unión de los Racionales con los Irracionales es el conjunto de los Reales.

4.- D$\cap$ D’ = ϕ , es decir, los Racionales y los Irracionales no se intersectan. En otras palabras son ajenos.

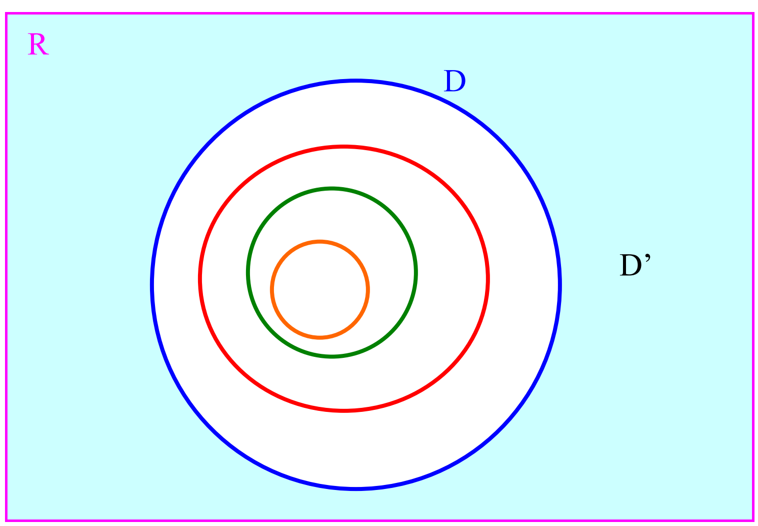
Para saber más sobre los reales consulta la página:

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-144.html

Actividades de aprendizaje

1.- De acuerdo con el diagrama, señale cuál de las siguientes afirmaciones es falsa y cuál es verdadera:

a) Todo número racional es entero.___________
b) Todo número natural es entero ____________
c) Todo número entero es natural ____________
d) Todo número natural es un racional_________
e) Todo número racional es natural ___________
f) Algunos números racionales son naturales._________
g) Algunos números naturales son enteros __________
h) Algunos números enteros son racionales_____________



2:- Todos los números 3, -9, 7 y $\frac{5}{6}$ son Enteros. Si___ No___

3.- ¿Es posible representar el número $\frac{2}{3}$ como un decimal que termina? Si____ No____

4.- El número π es racional. Falso____ Verdadero _____

5.- Cualquier número entero puede representarse en forma de una fracción $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros. Falso_____ Verdadero_______

6.- En la recta de los reales ¿cómo ubicas el conjunto de los números reales que están entre 2 y 4, incluyendo estos números?

7.- En la recta de los reales ¿Dónde ubicas el número 0.333…?

8.- En la recta de los reales ¿dónde ubicas al número 1.0444…?

9.- De los siguientes números ¿Cuáles son Reales?: -3, 0.3, 0, ½, 3/5, $\sqrt{2}$, 1.73, 5/28.

10.- En las siguientes afirmaciones ¿cuáles son verdaderas y cuáles falsas?

a) El conjunto de los múltiplos de 5 que están entre 15 y 100 es un subconjunto de **N**
b) El conjunto $\{5,10,15,20,25,...\}$ es finito
c) El conjunto $\{-1,0,1,2,3,4,5\} \subset Z$
d) El conjunto $\left\{1,\frac{1}{2},4,\frac{1}{5}\right\} \subset Q$
e) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$
f) Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{3,4,\pi\}$, entonces $B \subset A$

Operaciones binarias

Revisemos los conceptos de operación binaria y unaria:

Operación Binaria: Es una regla que nos asocia a cada par de elementos de un conjunto con otro elemento único de otro conjunto

Ejemplo:
El numero 3 y el numero 4 la suma los asocia con el 7
Operación binaria: Suma

Operación unaria: Es una regla que nos asocia a un elemento de un conjunto con otro único elemento

Ejemplo:
Al duplicar el numero 4 lo asociamos con el numero 8.

Propiedades de la igualdad

La Propiedad Reflexiva

Si escribimos una afirmación verdadera como

$$4+5=9$$

lo que deseamos decir es que *(4+5)* y *9* son dos nombres para el mismo número. Como todo número es igual a sí mismo, se puede afirmar que:

$$\forall x \in \mathbf{R}; \quad x = x.$$

Por ejemplo, *7=7; 3=3 y 0*= 0. Cuando se afirma que *x* = *x*, se genera una afirmación verdadera para todas las sustituciones de la variable *x*, lo cual significa que, todo número es igual a sí mismo.

El hecho de que todo número sea igual a sí mismo, se conoce como la ***propiedad reflexiva*** de las igualdades. Así, *7=7* por la por la propiedad reflexiva de la igualdad.

La Propiedad Simétrica

Debido a propiedad reflexiva de la igualdad, se puede invertir cualquier afirmación de igualdad, como se desee. Por ejemplo, como *5+2 = 7* entonces *7 = 5+2*. El hecho de poder invertir cualquier afirmación de igualdad verdadera, conduce a otra propiedad de la igualdad: ***la propiedad simétrica***, en la que, si *a=b*, entonces *b=a*. De este modo, se habla de la propiedad simétrica de la igualdad, como el hecho de poder invertir cualquier afirmación verídica de igualdad. Esto es, si *x=y* entonces *y=x*.

De esta propiedad se puede afirmar que, si *x+y=m+n* entonces, *m+n=x+y*. También, si m=x y entonces x y = *m*, evidentemente.

Ya aprendimos que en la propiedad asociativa de la adición se afirma que:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}, (x+y)+z = x+(y+z)$$

Por la propiedad simétrica de las igualdades, esta afirmación puede escribirse:

$\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}, x+(y+z) = (x+y)+z$.

Por ejemplo: 2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4

Veamos ahora otra útil propiedad.

La Propiedad Transitiva

De la propiedad reflexiva, el hecho de que *3+4=7* se interpretó como que *(3+4)* y *7* representan el mismo número. Si el siete también se puede escribir como *(5+2)*, entonces es posible afirmar que *3+4=5+2* porque son dos maneras distintas de escribir el mismo número *7*. Del mismo modo, si *9+2=11* y *6+5=11*, se puede afirmar que *9+2 = 9+2 = 6+5*.

Con esto, se esta utilizando otra importante propiedad de las igualdades, que muy frecuentemente se identifica como una propiedad en cadena: si un número es igual a un segundo número, y éste es a su vez igual a un tercero, entonces el primero será igual al tercero. Esta conducta numérica, se expresa simbólicamente como:

Si *a* = *b* y *b* = *c* entonces *a* = *c*.

Esta conducta se identifica en matemáticas como la ***propiedad transitiva*** de la igualdad. De esta manera, si $r=s$ y $s=t$ entonces $r = t$. Esta es, desde luego, otra manera de expresar la propiedad transitiva, por supuesto. Por esta propiedad de las igualdades, si $x=a+b$ y $a+b=y$, entonces $x = y$.

En resumen, se puede decir que: *números que son iguales al mismo número, son iguales entre sí*.

La Propiedad Aditiva.

Una propiedad más de la igualdad puede representarse como sigue:

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{Si}}\quad & a = b \\ \textbf{\textit{y}}\quad & c = d \\ \textbf{\textit{entonces}}\quad & a + c = b + d \end{aligned}$$

La expresión en español de esta propiedad, es: "*Si números iguales se suman a números iguales, las sumas son iguales*". Otra forma de escribir esto es que, si $x = y$ y $r = s$, entonces $x + r = y + s$.

Por ejemplo: como 4 = 4 y a = b entonces 4 + a = 4 + b.

Ahora, si $x\ y = z$ y $m\ n = p$, entonces $x\ y + m\ n = z + p$. Esto se obtiene sumando miembro a miembro de cada igualdad.

La Propiedad Multiplicativa

La propiedad multiplicativa de la igualdad dice que:

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{Si}}\quad & a = b \\ \textbf{\textit{y}}\quad & c = d \\ \textbf{\textit{entonces}}\quad & ac = bd \end{aligned}$$

También se puede decir, usando otras literales, que *si* $x = y$ *y* $s = t$, entonces $x\ s = y\ t$. Esta propiedad de la igualdad, se conoce como la propiedad multiplicativa de la igualdad. En español dice que si tenemos dos igualdades y las multiplicamos miembro a miembro entonces los productos son iguales.

Por ejemplo: como 4 = 4 y a = b entonces 4 a = 4 b.

Actividades de aprendizaje

1) En los espacios escribe lo que hace verdadera cada proposición:

   a) $\forall x \in \mathbf{R}; x + 0 =$ _____
   b) $\forall x \in \mathbf{R}; x \cdot 0 =$ ______
   c) $\forall x \in \mathbf{R}; x \cdot 1 =$ ______

2) Al hecho de que cada número sea igual a sí mismo se le da el nombre de ___________ __________ de la _____________.
3) Por la propiedad simétrica de la igualdad, si *s* = *t* entonces _________.
4) Por la propiedad reflexiva de la igualdad, *m* =_____
5) Por las propiedades asociativa de la adición y la simétrica de la igualdad, *(a+b)+(c+d)= {(a+b)+c}+d*. Las mismas propiedades permiten afirmar que *(x+y)+h+k)=*
6) Por las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad, si *r=x+y* y *s=x+y* entonces ________.
7) Por la propiedad simétrica de la igualdad si 3(x+y)=m entonces m=________.
8) Si *u+v=w y x+y=w*, entonces, por las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad, *u+v*=__________.
9) Anota en los espacios el nombre de la propiedad que identificas:

   a) $x = x$ __________________________________
   b) **Si** $x = y$, **luego** $y = x$ ______________________
   c) **Si** $x = y$ **y** $y = t$, **luego** $x = t$ _________________

10) Si *x=y* entonces *x+t=y+t* resulta de las propiedades _______________ y _____________ de las igualdades. Si *x t* = *y t*, entonces se tiene la propiedad ___________________________

11) ¿Cuál de los siguientes números es irracional?

a) $\frac{10}{\sqrt{25}}$
b) $\frac{\sqrt{16}}{4}$
c) $\frac{5}{\sqrt{5}}$
d) $\frac{\sqrt{4}}{1}$

12) ¿En cuál de las siguientes operaciones se aplica una operación binaria?

a) $\frac{m}{n}$
b) m^n
c) $\sqrt[n]{m}$
d) n_m

13) ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta?

a) $\aleph \not\subset \Re$
b) $5 \subset \aleph$
c) $E \subset \Re$
d) $\aleph \not\subset D$

Módulo 10
Postulados de campo

OBJETIVO:
Conocerá los postulados de campo y su aplicación; utilizara postulados de campo en proposiciones de números reales

Ahora, estamos interesados en ver el comportamiento de los números reales en diversas afirmaciones y formular alguna descripción de sus propiedades o postulados. El interés principal se centra en la manera en que el número se comporta en diferentes operaciones: por ejemplo, ¿es *4+7=7+4* una afirmación verdadera? Analicemos estas situaciones.

Todo conjunto cuyos elementos cumplan con los siguientes postulados para las operaciones de la suma y la multiplicación se llama un campo, los números reales cumplen con los postulados y por ello se le refiere el campo de los números reales.

Postulado 1. Cerradura:

Para la suma:
Este postulado o propiedad dice que si pensamos en dos números reales y los sumamos, el resultado vuelve a ser un número real. Es decir:

$a, b \in R \Rightarrow (a + b) \in R$

Ejemplo:

$1, 3 \in R \Rightarrow (1 + 3) \in R \Rightarrow 4 \in R$

Aunque parezca obvio, esta propiedad tiene su chiste, pues resulta que no en todo conjunto de números se satisface esta propiedad. Por ejemplo si tenemos el conjunto P = {1, 2, 3, 4, 5} y tomamos dos elementos de este conjunto, por ejemplo el 2 y el 4 y los sumamos 2+4, el resultado es 6 y este elemento no está en el conjunto P. Así, decimos que el conjunto P no cumple con el postulado de la Cerradura para la suma.

Para la multiplicación:

Análogamente, este postulado o propiedad dice que si pensamos en dos números reales y los multiplicamos, el resultado vuelve a ser un número real. Es decir,

$a, b \in R \Rightarrow (a + b) \in R$

Ejemplo:

$3, 2 \in R \Rightarrow (3 \cdot 2) \in R \Rightarrow 6 \in R$

Otra vez, aunque parezca obvio, esta propiedad tiene su chiste, pues resulta que no en todo conjunto de números se satisface esta propiedad. Por ejemplo si consideramos el mismo conjunto P = {1, 2, 3, 4, 5} y tomamos dos elementos de este conjunto, por ejemplo el 2 y el 4 y los sumamos (2) (4), el resultado es 8 y este elemento no está en el conjunto P. Así, decimos que el conjunto P no cumple con el postulado de la Cerradura para la multiplicación.

Postulado 2. Conmutativo

Retomando la pregunta ¿es *4+7=7+4* una afirmación verdadera?, todos contestamos que si es verdadera pues 4 + 7 = 11 y 7 + 4 = 11, es decir en ambos miembros se tiene la misma cantidad. Esto siempre es así, pues cuando queremos sumar dos números da lo mismo si pensamos por ejemplo en el 4 y luego le sumamos el 7 o pensamos en el 7 y luego le sumamos el 4. Esto siempre pasa no importando cuales sean los números. De hecho, cuando vamos de compras y queremos sumar 3 + 17, algunas personas lo que hacen es pensar en el 17 y luego le suman el 8 y otras se les facilita pensar en el 3 y luego le suman el 17. Esto se puede resumir así:

Si a y b son números reales entonces a + b = b + a

La anterior afirmación se conoce como el ***Postulado o la Propiedad conmutativa para la suma o de la adición.***

Existe también la propiedad ***Conmutativa para la multiplicación o del producto:***

Si a y b son números reales entonces a · b = b · a

Esta afirmación dice que si queremos multiplicar por ejemplo 9 x 8, da lo mismo hacer 9 x 8 = 72 ó 8 x 9 = 72. Esta propiedad la usamos comúnmente y sin darnos cuenta de que la estamos usando. Por ejemplo, si tenemos que multiplicar 8 x 7 y

no nos acordamos de la tabla del 8 pero si la del 7 entonces pensamos y decimos 7 x 8 = 56 y hacemos esto para facilitarnos la operación.
Al fin decimos "*el orden de los factores no afecta al producto*".

Postulado 3. Asociativo

Veamos otra propiedad de la adición. Supongamos que queremos sumar *4+2+7*. Podemos seguir dos caminos:

a. (4+2)+7
b. 4+(2+7)

El resultado no depende del modo en que se elija sumar. Pues si hacemos la operación en a) implica que *(4+2)+7=6+7=13* y, la opción b) implica *4+(2+7)=4+9=13*, lo cual lleva al mismo resultado.
Esto siempre lo podemos hacer para cualesquiera números reales, es decir,

Si a, b y c son números reales entonces (a + b) + c = a + (b + c)

A esta propiedad se le llama ***Postulado o Propiedad asociativa para la suma o de la adición.*** Y en español dice que si queremos sumar tres números, la suma la podemos hacer empezando con la suma de los dos primeros (a + b) y a lo que salga le sumamos el tercero c, pero también podemos hacerla sumando los dos últimos (b+c) y a lo que salga le sumamos el primero a, después de todo el resultado es el mismo.
Esta propiedad también la usamos cotidianamente, por ejemplo cuando compramos naranjas, guayabas y manzanas y si cuestan por kilo, $18, $7 y $10, respectivamente, entonces la suma la podemos hacer así:

18 + 7 = 25 y 25 +10 = 35

Pero también la podemos hacer así:

7 + 10 = 17 y 17 +18 = 35

O también así:

18 + 10 = 28 y 28 +7 = 35

Es decir que nosotros decidimos que números sumamos primero, es decir, asociamos y por eso la propiedad se llama asociativa.
También existe la misma propiedad para el producto y dice así:

Si a, b y c son números reales entonces (a · b) · c = a · (b · c)

A esta propiedad se le llama ***Propiedad asociativa para la multiplicación o del producto.***

Postulado 4. Distributivo

Las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación, son de fundamental importancia, a pesar su aparente sencillez. Hasta aquí, hemos usado estas propiedades en expresiones que incluyen sólo una operación. Veamos ahora, algunas expresiones en que ambas operaciones, suma y multiplicación, se combinan para formar otra propiedad.
La expresión *5(3+4)*=$5 \cdot 7$=*35*, se ejecuta sumando primero *(3+4)* y luego multiplicando el resultado de esta suma por *5*. Tomemos otra ruta para realizar esta operación: Multipliquemos *(5x3)* y luego *(5x4)*. Ahora sumemos ambos productos, el resultado es el mismo que en la primera operación. Con este criterio es cierto que:

$$3 \cdot (2+9) = (3 \cdot 2) + (3 \cdot 9)$$

Pues, en la expresión $3 \cdot (8+2) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2$ la suma *(8+2)* está multiplicada por el factor *3*. En esta afirmación, $3 \cdot (8+2) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2$, podemos notar que el factor 3 multiplica a cada término de la suma. Esto es, el *3* está “distribuido” en la suma. En la operación $2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$, el multiplicador es el multiplicador es *2* y está distribuido en la suma *(3+5)*.
Por lo tanto estamos en presencia del ***Postulado o Propiedad distributiva*** que en resumen dice:

Si a, b y c son números reales entonces a (b + c) = a · b + a · c.

Esta propiedad la usaremos con frecuencia en la resolución de ecuaciones.

Postulado 5. Identidad

Identidad para la suma (el número cero) e identidad para la multiplicación (el número uno).

Los números reales cero y uno, a pesar de su aparente ingenuidad, se comportan de un modo muy peculiar en las operaciones de suma y multiplicación. Este comportamiento se destaca en Matemáticas como propiedades de los números reales 0 y 1.

Históricamente, al número uno se le ha dado el rol de la representación de la unidad. Pensar en el uno es pensar en los demás números ya que la acumulación de “unos” fabrica los demás números y, al partir al uno, se fabrican las primeras fracciones. Pero con la aparición de álgebra, el uno cobra una relevancia difícil de describir, por su presencia en toda la estructura matemática y por las diferentes maneras en que aparece. El uno puede estar presente y no notarse: por ejemplo, una variable x, contiene números uno que no se ven, ya que no se acostumbra ponerlos. De este modo la x se puede imaginar como:

$$x = \frac{1x^1}{1}$$

Esta forma de escribir el número uno en álgebra, permite suponer que, si el coeficiente no se escribe se supondrá que éste es uno. Lo mismo sucederá cuando no se escriba el exponente ni el divisor.

El cero es cosa aparte. Baste decir que el cero tardó en aparecer cerca de 3000 años en la estructura matemática. Sin el cero, la matemática actual es inimaginable, así que no detendremos más su estudio y empezaremos de una buena vez.

El número cero tiene dos propiedades muy especiales:

a) $\forall x \in \mathbf{R}; x + 0 = x$*, que significa que si sumamos cero a cualquier número real, la suma es igual a este número. El símbolo* $\forall$ *significa "para todo".*

b) $\forall x \in \mathbf{R}; x \cdot 0 = 0$*, que significa que al multiplicar cualquier número real por cero el producto siempre es cero.*

A la propiedad a) que tiene el cero se le llama ***Identidad para la suma o también Propiedad del neutro aditivo.***

El número uno es la ***identidad para la multiplicación*** o también se dice que tiene la ***Propiedad del neutro multiplicativo*** y dice:

$$\forall x \in \mathbf{R}; x \cdot 1 = x$$

Que significa que cualquier número real multiplicado por uno da el mismo número. Estas propiedades también son muy importantes para comprender el estudio futuro.

Postulado 6. Inversos

El inverso para la suma

Si preguntamos ¿que número real sumado con 4 nos da 0? Al principio dudaríamos que hubiera un número que sumado a 4 nos de cero, pues estamos acostumbrados a pensar inmediatamente en los enteros y además positivos, pero haciendo memoria recordamos que un real no tiene por que ser sólo positivo, de hecho los hay negativos. Así, decimos. ah, si hay uno que sumado a 4 nos da cero, es el -4 pues 4 + (-4) = 0. Efectivamente, y además es el único que responde afirmativamente a la pregunta. Ojo, esta respuesta no la pueden responder los niños de primaria pues ellos aún no conocen los negativos. Ahora si preguntamos ¿Qué número sumado a -4 nos da cero? Pues la respuesta ahora es fácil: es el 4 pues -4 + 4 = 0. Esta propiedad que no solo la tiene el 4 o el -4, se llama la propiedad del ***inverso para la suma o inverso aditivo*** y en general dice:

Si x es un número real entonces existe un número –x que sumado con x nos da cero, es decir

$$x + (-x) = 0,$$

y se dice que el inverso aditivo de x es –x. De hecho uno es inverso aditivo del otro.

Así el inverso aditivo del 8 es el -8 (o el inverso aditivo del -8 es el 8) y el inverso aditivo del -34 es el 34(o el inverso aditivo del 34 es el -34).

El inverso para la multiplicación

Si preguntamos ahora, ¿qué número real multiplicado con 4 nos da 1? Al principio decimos sin duda que no existe o que no se puede. Pero resulta que si hay es el $\frac{1}{4}$ pues $4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. Y ahora, si preguntamos ¿qué número multiplicado por $\frac{1}{8}$ nos da 1? Pues es el 8 ya que $(8)\left(\frac{1}{8}\right) = 1$. En ambos ejemplos encontramos el número. En el primer caso, el $\frac{1}{4}$ es ***el inverso para la multiplicación*** del 4 o también se dice que es *el* ***inverso multiplicativo*** del 4 y en el segundo caso, el 8 es el inverso multiplicativo del $\frac{1}{8}$. En resumen, decimos que el inverso multiplicativo de un número x es el $\frac{1}{x}$ pues $(x)\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Claro está que si el número x es por ejemplo el $\frac{3}{5}$ entonces el inverso multiplicativo es el $\frac{5}{3}$ pues

$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = 1$. Así ya es fácil encontrar el inverso multiplicativo de un número pues basta cambiar de lugar el numerador y el denominador.

Para saber más sobre las propiedades de los reales consulta la página siguiente:
http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-145.html

Algunos teoremas importantes

Ley de cancelación para la suma

Esta ley dice que si tenemos una igualdad entre sumas de números reales. Por ejemplo: $x + z = y + z$, pero donde en cada suma aparezca el mismo número sumado, (en este caso, es el numero z el que aparece en ambas sumas) entonces podemos quitarlo (o cancelarlo) y los números que quedan siguen siendo iguales. (en nuestro caso, queda $x = y$). Es decir:

$$x, y, z \in R \Rightarrow x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

Ejemplos:

a) $3, 3, 5 \in R, \Rightarrow 3 + 5 = 3 + 5 \Rightarrow 3 = 3$
b) $a, 2, b \in R \Rightarrow a + 2 = b + 2 \Rightarrow a = b$

En otras palabras, el símbolo de igualdad no se ve altera si sumamos en ambos lados de la igualdad un mismo número.

Ley de cancelación para la multiplicación

Similarmente, esta ley dice que si tenemos una igualdad entre multiplicaciones de números reales. Por ejemplo $x \cdot z = y \cdot z$, pero donde en cada multiplicación aparezca el mismo número multiplicado, (en este caso, es el numero z el que aparece en ambas multiplicaciones) entonces podemos quitarlo (o cancelarlo) y los números que quedan siguen siendo iguales. (en nuestro caso, queda $x = y$). Es decir:

$$x, y, z \in R \Rightarrow x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y$$

Ejemplos:

a) $3, 3, 5 \in R \Rightarrow 3 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \Rightarrow 3 = 3$
b) $a, 2, b \in R \Rightarrow 2 \cdot a = 2 \cdot b \Rightarrow a = b$

En otras palabras, el símbolo de igualdad no se ve afectado si multiplicamos en ambos lados de la igualdad por un mismo numero.

Otros teoremas

Teorema. $x = y \Rightarrow -x = -y$
Si multiplicamos toda la ecuación por un numero cualquiera el símbolo de igualdad sigue constante.

Ejemplos:
$3 = 3 \Rightarrow$ si multiplicamos toda la ecuación por – 1 $\Rightarrow -3 = -3$
$5+3 = 3+5 \Rightarrow$ si multiplicamos toda la ecuación por – 8 $\Rightarrow -64 = -64$

Teorema. $x = y \Leftrightarrow {}^1/_X = {}^1/_Y$, $x, y \neq 0$
Si se utiliza el inverso para la multiplicación en ambos lados de la ecuación el símbolo de igualdad sigue constante. En otras palabras, este teorema dice que dos números son iguales si y sólo si sus recíprocos (o sea sus inversos para la multiplicación) son iguales.

Ejemplos:

$2 = 2 \Rightarrow {}^1/_2 = {}^1/_2$
$a = 3 \Rightarrow {}^1/_a = {}^1/_3$

Despejes:
Utilizando todas las reglas anteriores podemos despejar una variable para encontrar su valor.

Así para resolver x+7=10, usamos la propiedad aditiva. Sumamos en ambos miembros -7, es decir el inverso aditivo de 7:

$$x+7=10$$
$$x+7+(-7)=10+(-7)$$
$$x=3$$

Veamos otro ejemplo: resolver $x - 5 = -3$. Entonces sumamos +5 (que es el inverso aditivo de -5) en ambos miembros de la ecuación:

$$x-5=-3$$
$$x-5+5=-3+5$$
$$x=2$$

Analicemos con más cuidado lo que estamos haciendo para ver si descubrimos una forma eficiente de proceder. Para esto, resolvamos la ecuación $x+4=7$. Un primer paso sería sumar (-4) a ambos miembros de la ecuación ya que:

$$4+(-4)=0$$

Es decir el inverso aditivo de 4 y así cuando se suma (-4) a cada miembro de $x+4=7$, el lado izquierdo se vuelve x, mientras que el de la derecha se hace $7+(-4)=3$. Luego, {3} es el conjunto solución de $x+4=7$, porque $x=3$ es el único valor que la hace verdadera.

Otros ejemplo más: Resolver la ecuación: $8 = -4 + x$.

La solución se encuentra del siguiente modo:

$8 = -4 + x$

$4 + 8 = -4 + x + 4$ (propiedad aditiva y el inverso aditivo)

$12 = x$

o bien, $x=12$

Resolver la ecuación: $-2 + x = -5$. La solución se encuentra del siguiente modo, sumando el inverso aditivo de -2:

$$-2 + x = -5$$

$$-2 + 2 + x = -5 + 2$$

$$x = -3$$

Otro Ejemplo:

$3x + 5x = 15$

$(3 + 5)x = 15$ Asociamos

$8x = 15$

$({}^{1}/{}_{8})\cdot 8x = 15\cdot({}^{1}/{}_{8})$ Multiplicamos por su inverso en ambos lados de la ecuación

$x = {}^{15}/{}_{8}$ Obtenemos el valor de x

Actividades de aprendizaje

¿Qué propiedad representan las siguientes afirmaciones?

1.- 2 + 4 = 4 + 2

2.- 3 (5 +3) = 3 (5) + 3(3)

3.- 4 + (5 – 9) = (4 + 5) – 9

4.- 3 ·6 = 6 · 3

5.- - 2 (3 + 7) = (-2) (3) + (-2) (3)

6.- ¿Por qué el número cero no es una identidad para la multiplicación?

7.- ¿Por qué el número cero es una identidad para la suma?

8.- ¿Por qué el número uno no es una identidad para la suma?

9.- ¿Por qué el número uno es una identidad para la multiplicación?

10.- ¿Cuál es la identidad para la suma?

11.- ¿Cuál es la identidad para la multiplicación?

12.- ¿Cuál es el inverso para la suma del - 8?

13.- ¿Cuál es el inverso para la suma del $-\frac{1}{3}$?

14.- ¿Cuál es el inverso para la multiplicación del - 8?

15.- ¿Cuál es el inverso para la multiplicación del $-\frac{1}{3}$?

16.- Resolver las ecuaciones siguientes indicando los postulado que se emplean para su solución.

a) x + 8 = 6

b) x - 3 = - 5

c) 2 = - 3 +x

d) – 4 + x = 0

17. Observe el siguiente método para resolver la ecuación $4y - 2 = 10$

I. 4y – 2 = 10
II. 4y – 2 + (-2) = 7 + (-2)
III. 4y + (2 – 2) = 7 – 2
IV. 4y = 5
V. $\left(\frac{1}{4}\right)4y = 5\left(\frac{1}{4}\right)$
VI. $\left(\frac{4}{4}\right)y = \frac{5}{4}$
VII. $y = \frac{5}{4}$

¿Qué propiedad de la igualdad se utilizó de IV a V?

a) Aditiva
b) Reflexiva.
c) Transitiva
d) Multiplicativa.

18. A continuación se presenta un método para demostrar que " $a, b \in \Re \Rightarrow (5+a)-(9+b) = -4+(a-b)$ " :

I. $a, b \in \Re$ Dado
II. $(5+a)-(9+b) = 5+(a-9)-b$
III. $= 5+(-9+a)-b$
IV. $= [5+(-9)]+[a+(-b)]$
V. $= -4+(a-b)$

Para pasar de III a IV, ¿qué postulado se utilizó?
a) Asociativo.
b) Distributivo.
c) Conmutativo.
d) De Identidad.

Módulo 11
Teoremas sobre los inversos

OBJETIVO:
Conocerá los postulados de las operaciones binarias suma, multiplicación y resta en expresiones algebraicas enteras; proposiciones en que se utilicen propiedades inversas.

Hemos definido ya el inverso aditivo de cualquier número real. Veamos ahora un resumen de algunos resultados que serán muy útiles para manejar las relaciones entre los números reales.

Teorema 1. El inverso aditivo del número cero es el mismo cero, es decir, $-0 = 0$.

Teorema 2. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
Este resultado dice que un número negativo por un positivo da como resultado un negativo.

Ejemplos

$(-2) \cdot 3 = -(2 \cdot 3) = -6$

$(-4) \cdot y = -(4 \cdot y) = -4y$

Teorema 3. $(-a)(-b) = a\,b$
Este resultado dice que un número negativo por otro negativo da como resultado un positivo.

Ejemplos

$(-2)(-3) = 2 \cdot 3 = 6$

$(-4)(-y) = 4 \cdot y = 4y$

En particular, tenemos las siguientes reglas o leyes de los signos:

Para la multiplicación:
+ · + = +
+ · - = -
- · + = -
- · - = +

Ejemplos

9 · 9 = 81 Signos positivos
9 · -9 = -81 Signo positivo y negativo
-9 · 9 = -81 Signo negativo y positivo
-9 · -9 = 81 Signos negativos

Cuando se combinan signos con paréntesis tenemos lo siguiente, utilizando las reglas de los signos para la multiplicación:
+(3) = 3
+(-3) = 3
-(+3) = 3
– (–3) = 3
– (– 4 + x) = + 4 – x ò 4 – x

Teorema 4. – (a + b) = (– a) + (– b)

Este resultado dice que la suma de dos números negativos es negativa (recordar el postulado de cerradura).

Comúnmente nos piden efectuar: (– 4) + (– 5), entonces, lo que tenemos que hacer es: (– 4) + (– 5) = – (4 + 5) = – 9. Es decir, estamos usando el teorema 4.

Teorema 5. La operación de restar un número es equivalente a sumar el inverso de ese número:

a – b = a + (– b)

Por ejemplo:

4 – 5 = 4 + (– 5) = – 1 (el signo del resultado es negativo porque el 5 es mayor que el 4)

7 – 5 = 7 + (– 5) = 2 (el signo del resultado es positivo porque el 7 es mayor que el 5)

En resumen:

Para la suma:
- Signos iguales se suman los números y se recorre el signo.
- Signos diferentes se restan los números y se deja el signo del número mayor.

Ejemplos
9 + 9 = 18 Signos iguales (el primer numero aunque no nos indica signo sabemos que es positivo)
9 - 9 = 0 Signos diferentes
-9 – 9 = -18 Signos iguales
-9 +(– 9) = -18 Signos iguales (vea el teorema 5)

-9 + 9 = 0 Signos diferentes

Otro teorema sobre la resta:

Teorema 6. a (b – c) = a b – a c

Este teorema nos muestra la forma de distribuir un factor sobre la resta.

Ejemplos:

2 (b – c) = 2 b – 2 c

3 (4 – x) = 3 · 4 – 3 x = 12 – 3 x

Actividades de aprendizaje

En las siguientes afirmaciones diga que teorema o teoremas justifican cada igualdad.

a) 0 – 0 = 0

b) (– 9) – (– 9) = 0

c) (– 4) + (– 7) = – 11

d) – 6 = (– 4) + (– 2)

e) a (– 3 b) = – [a(3 b)]

f) (– 9) x = 21 ⇒ 9 x = – 21

g) – a = (–1) a

h) (– 9) (– 2) = 18

i) (– 4) (5) = – 20

j) – 10 = (– 9) + (– 1)

Utilizando los teoremas y postulados hasta aquí vistos, resuelva para “x” las ecuaciones siguientes, es decir, despeje la x::

1. 1 - 3x = 2x – 9
2. 4 x + 5 = 2 x – 1
3. 2 x + 2 = – 20

4. $-5x = 45$
5. $-4x = -44$

Módulo 12
La División

OBJETIVO:
Expresará algunas propiedades de la división usando propiedades de la división y los inversos; expresara un numero racional de la forma decimal a fracción común y viceversa.

La división es una operación binaria que asocia a dos números reales x, y, con un número real único llamado el cociente "R"

De modo que si

$$y \neq 0, x \div y = \frac{x}{y} = c \Leftrightarrow x = c \cdot y$$

Teorema de la división:

La operación de dividir dos números reales es equivalente a multiplicar el numerador por el reciproco del denominador:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = c; b \neq 0$$

Por ejemplo: $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = .75$

El teorema se define sólo si el denominador es diferente de cero.

Teoremas sobre fracciones

Los siguientes teoremas básicos sobre fracciones son muy importantes en el manejo de éstas.

Teorema 1. $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}; (y, w \neq 0)$

Este resultado dice que para multiplicar dos fracciones, se tiene que multiplicar el numerador por el numerador y el denominador por el denominador. Siempre y cuando los denominadores sean distintos de cero.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$

Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores igualmente como se ilustra a continuación;

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{e} = \frac{a \times c}{b \times e}$$

Por ejemplo:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{z}{w} = \frac{2z}{3w}$ b) $\frac{5}{y} \cdot \frac{3}{w} = \frac{15}{yw}$ c) $\frac{-4}{5} \cdot \frac{x}{2} = \frac{-4x}{10}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{18}{24}$ e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ f) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{w} = \frac{1}{xw}$

g) $\frac{1}{3} \cdot \frac{z}{w} = \frac{z}{3w}$ h) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

Teorema 2. $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}; (y, z \neq 0)$

Este resultado dice que una fracción $\frac{x}{y}$ puede ser multiplicada por otra fracción $\frac{z}{z}$ (disfrazada de 1, pues $\frac{z}{z}$ =1) y su valor no se altera. Por ejemplo:

$\frac{x}{y} = \frac{2x}{2y}$ (aquí estamos multiplicando por $\frac{2}{2} = 1$).

Otros ejemplos:

$\frac{x}{3} = \frac{5x}{15}$ (aquí estamos multiplicando por $\frac{5}{5} = 1$).

$\frac{2}{b} = \frac{14}{7b}$ (aquí estamos multiplicando por $\frac{7}{7} = 1$).

Teorema 3. $\frac{x}{y}=\frac{z}{w} \Leftrightarrow xw=yz; (y,w\neq 0)$

Este resultado dice que una fracción $\frac{x}{y}$ es igual a otra $\frac{z}{w}$ si y solamente si el numerador de la primera "x" multiplicado por el denominador de la segunda "w" es igual al numerador de la segunda "z" multiplicado por el denominador de la primera "y"; es decir, $xw=yz$.

Este resultado es muy importante para usos prácticos en cuanto a operar con fracciones pues con él podemos saber si dos fracciones son iguales, ya que basta hacer las multiplicaciones indicadas y si ambos resultados son iguales entonces las fracciones también son iguales. Por ejemplo:

$\frac{2}{3}=\frac{10}{15} \Leftrightarrow (2)(15)=(10)(3)$ y como $(2)(15)=30=(10)(3)$ entonces las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$ son iguales.

Teorema 4. $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}\,(a,b\neq 0)$

Este resultado dice que para dividir la unidad "1" por una fracción "$\frac{a}{b}$" basta considerar el recíproco de la fracción: $\frac{b}{a}$. Por ejemplo:

a) $\frac{1}{\frac{a}{3}}=\frac{3}{a}$

b) $\frac{1}{\frac{2}{x}}=\frac{x}{2}$

c) $\frac{1}{\frac{5}{7}}=\frac{7}{5}$

Este resultado también sirve para encontrar el recíproco de un número. Por ejemplo, el recíproco del $\frac{7}{3}$ es: $\frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$.

El recíproco del – 2 es $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

El recíproco del $\frac{a}{b}$ es $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

En caso que se tenga que dividir una fracción entre otra se proce de la manera siguiente:

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{bc}{ad}$$

Ejemplos:

a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{21}{20}$

b) $\frac{9}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{9}{1}}{\frac{3}{5}} = \frac{45}{3} = 15$

c) $\frac{\frac{2}{5}}{6} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{6}{1}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

A manera de repaso, en lo que sigue ilustramos como se suman y se restan los números racionales:

Para estas operaciones se deben tener en cuenta dos casos fundamentales:

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-133.html

CASO 1: Cuando los racionales tienen el mismo denominador:

En éste caso se deben sumar o restar los numeradores, de acuerdo con la ley de los signos de los números enteros, y el denominador es el mismo que tienen los racionales a operar, es decir:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Ejemplos:

$$a)\quad \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{2+3}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$b)\quad \frac{3}{7}+\frac{-9}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3-9+5}{7}=\frac{-1}{7}$$

CASO 2: Cuando los racionales tienen distinto denominador:

En este caso, hay tres formas de sumarlos o restarlos.

Primera forma: se deben convertir los racionales en fracciones con el mismo denominador y posteriormente se suman sus numeradores y el denominador es el común entre los racionales.

Por ejemplo:

$$a)\quad \frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$b)\quad \frac{-3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{-6}{10}+\frac{5}{10}=\frac{-6+5}{10}=\frac{-1}{10}$$

En el ejemplo del inciso a, el racional $\frac{1}{2}$ se convierte al racional $\frac{2}{4}$ (basta multiplicar al numerador y al denominador por 2) y ya lo podemos sumar al racional $\frac{3}{4}$ como en la primera forma, pues ya tienen el mismo denominador.

En el ejemplo del inciso b, el racional $\frac{-3}{5}$ se convierte al racional $\frac{-6}{10}$ (basta multiplicar al numerador y al denominador por 2) y al racional $\frac{1}{2}$ lo convertimos al racional $\frac{5}{10}$ (basta multiplicar al numerador y al denominador por 5). Una vez que ya los dos racionales tienen el mismo denominador ya los podemos sumar como en la primera forma.

Segunda forma: Primero se encuentra el mínimo común múltiplo[1] de los denominadores, después este se divide entre cada denominador y el resultado se multiplica por cada numerador. Los resultados se suman o restan y se divide entre el mínimo común múltiplo. Observemos los ejemplos que siguen:

Para resolver la operación siguiente:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$$

Primero encontramos el mínimo común múltiplo de 2 y 4, el cual en este caso es el mismo 4. Y este será el nuevo denominador. Luego, lo dividimos entre el denominador 2 y el resultado lo multiplicamos por el numerador 1. Hacemos lo mismo con el denominador 4 y el numerador 3 del otro racional. Finalmente, sumamos los resultados:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

Veamos el otro ejemplo:

$$\frac{-3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{-6+5}{10}=\frac{-1}{10}$$

En este caso, el mínimo común múltiplo del 5 y el 2 es el 10, el cual al dividirlo entre 5 y multiplicarlo por -3 nos da -6 y al dividirlo entre 2 y multiplicarlo por el 1 nos da 5. Finalmente sumamos -6 y 5 y ya.

Tercera forma: para sumar o restar dos racionales primero se multiplican los denominadores y el resultado será el nuevo denominador. Después, se multiplica el numerador del primer racional por el denominador del segundo racional y también se multiplica el denominador del primer racional con el numerador del segundo racional. Finalmente se suman estos resultados. La fórmula que sigue ilustra lo anterior.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Veamos unos ejemplos:

Resolvamos la operación siguiendo la fórmula.

$$\frac{-1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{(-1)(5)+(3)(4)}{(3)(5)}=\frac{-5+12}{15}=\frac{7}{15}$$

mínimo común múltiplo[1:] El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

- Ejemplo: el m.c.m. de 20 y 10:

Múltiplos de 20:	**20**, 40, 60, 80...
Múltiplos de 10:	10, **20**, 30...

20 es el múltiplo menor que es común a ambos números.

Forma decimal

Todo número fraccionario tiene una forma decimal; por ejemplo, la forma decimal de ½ es 0.5 o bien, la forma decimal de ¾ es 0.75 y de ¼ es 0.25. http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-134.html

Por ejemplo, las formas decimales de 1/3, 2/3, 3/8, 1/2, 1/5 y 1/8 son: 0.333…, 0.666…, 0.375, 0.5, 0.2, y 0.125 respectivamente. Estas expresiones decimales se obtienen con el sólo hecho de efectuar la división. Pero esta división puede o no llegar a terminar, como se vio en las anteriores formas decimales, así que vale la pena considerar este hecho.

Al buscar la forma decimal de 1/3, encontramos que el proceso de división no termina. Lo mismo sucede al intentar encontrar la forma decimal de 2/3. Sin embargo al buscar la forma decimal de ½, el proceso de dividir si termina. Al decimal 0.5 que resulta de ½ se le llama *terminante* y al decimal 0.333… que resulta de dividir 1/3 se le llama *no terminante o periódico*. Si es necesario emplear puntos suspensivos para representar la forma decimal de un número Racional, se dice que el número Racional tiene una forma decimal no terminante.

En la siguiente lista de decimales, las opciones a, b, d y f son expresiones decimales terminantes, no así las opciones c y e.

a) ¾ b) 7/8 c) 5/9 d) 3/5 e) 4/9 f) 1/4

Las fracciones decimales no terminantes pueden o no representar una secuencia de cifras repetidas. Cuando presentan una secuencia de cifras repetidas, le llamaremos *decimales repitientes o periódicos*. Así, 0.333… y 0.777… son expresiones decimales periódicos, lo mismo que las expresiones decimales 0.232323… y 0.353535… El proceso de dividir 2/11 no termina pues la expresión decimal es 0.181818…

Para convertir un número mixto a decimal, una forma practica de hacerlo es la siguiente:

Por ejemplo, para convertir $2\frac{3}{5}$ a decimal basta hacer la división 3 entre 5 lo cual da .6. Este valor se pone enseguida del entero. Así $2\frac{3}{5}$ = 2.6.

Ahora, analicemos el caso en que tenemos un decimal y queremos expresarlo como fracción:

Por ejemplo, para expresar el decimal .3000 en fracción lo que tenemos que hacer es contar cuantos números hay después del punto decimal (sin contar los ceros que pudiera tener el decimal después de él). En este caso, en el decimal .3000 solo se cuenta el 3 pues después de él hay una infinidad de ceros y esos no se cuentan. Así sólo hay un número. Luego, consideramos al 10 como divisor del 3 para formar la fracción:

$.3000 = \frac{3}{10}$.

En caso de que haya dos números después del punto decimal, pondremos al 100 como divisor. Si hay tres números después del punto decimal, pondremos al 1000 como divisor. Y así sucesivamente.

Ejemplos:

$.3500 = \frac{35}{100}$

$.35400 = \frac{354}{1000}$

Recordar que los ceros posteriores no se cuentan, a menos de que en el decimal intermedio haya un cero:

$.305400 = \frac{3054}{10000}$

Si el número es mixto basta con convertir la parte decimal a fraccionaria y anteponer el entero a la fracción:

$13.305 = 13\frac{305}{1000}$

Hasta ahora nos hemos referido a los números racionales, sin embargo, existe otro conjunto de números también muy importante. En seguida nos referimos a este conjunto:

Un número racional se definió como un decimal que termina o un decimal que se repite indefinidamente. Si un decimal ni se repite indefinidamente ni termina, no es un número Racional. Luego, Al conjunto formado por todas las expresiones decimales infinitas y no periódicas lo llamamos el conjunto de los números irracionales y lo denotamos por I. Es decir, un número Irracional es aquel cuya forma decimal ni termina ni se repite indefinidamente.

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-141.html

Las expresiones decimales siguientes:
1, 41421356...
3, 14159256...
2, 645751311...
2, 718281887...

Que son infinitas y no periódicas, no pueden representar un número racional, puesto que resulta imposible escribirlas como razón o cociente de dos enteros (p/q). Los ejemplos anteriores son la expresión decimal de los números irracionales $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{7}$ y el número e.

Actividades de aprendizaje

1.- Escriba el recíproco de cada uno de los números que se dan a continuación:

a) 23 b) – 6 c) x d) $\frac{x}{b}$ e) $\frac{2}{x}$

2.- Exprese en forma decimal las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{13}{1000}$ d) $4\frac{5}{6}$ e) $7\frac{1}{5}$

3.- Exprese en forma fraccionaria los siguientes decimales:

a) .23 b) .345 c) 2.65 d) 3.700

4. La representación en forma fraccionaria de 0.75 es

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{10}{2}$
c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{5}$

5. Es el reciproco de $\frac{2x}{y}$

a) $\frac{x}{2y}$
b) $2xy$
c) $\frac{y}{2x}$
d) $-2xy$

6.- Resuelva las operaciones siguientes:

$a)\quad \frac{-1}{2} + \frac{3}{6} =$

$b)\quad \frac{-3}{8} + \frac{7}{2} =$

$c)\quad \frac{-5}{5} - \frac{2}{9} =$

$d)\quad \frac{-7}{9} + \frac{3}{-5} =$

Módulo 13
Terminología

OBJETIVO:
Reconocerá términos y expresiones algebraicas; identificará al coeficiente numérico y literal respecto a algún factor o factores de ella.

El Álgebra es la parte de las matemáticas que trata del cálculo de cantidades que son representadas por letras. El uso de símbolos (letras, números y signos) ayuda a simplificar los problemas que se presentan en la vida cotidiana, traduciéndolos al lenguaje algebraico.

(http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-211.html)

Por ejemplo;

Para calcular el área de un terreno rectangular se utiliza la fórmula:

$$A = l \times a$$

donde “A” representa el área, “l” el largo y “a” el ancho del rectángulo. Como A, l y a varían según las dimensiones del terreno rectangular, entonces se les llama *Variables*. Ahora, si se quiere calcular su perímetro entonces se usa la formula p = 2 l + 2 a. Aquí lo que no variará será el “2” mientras que p, l y a serán las variables. A los valores que no cambian se les conoce como *constantes.*

En álgebra, es muy común traducir de nuestro idioma al lenguaje algebraico.

Por ejemplo, para designar:

Un número cualquiera usamos: x

La suma de dos números usamos: $x + y$

El producto de tres números usamos: $(x)(y)(z)$ ó $x{\cdot}y{\cdot}z$

El cociente de dos números usamos: $\frac{x}{y}$

El cuadrado de un número usamos: x^2

El doble del cuadrado de un número usamos: $2x^2$

La suma de los cuadrados de dos números usamos: $x^2 + y^2$

La mitad del cubo de un número usamos: $\frac{x^3}{2}$

La diferencia de dos números usamos: $x - y$.

Observa que en todos los casos la traducción al álgebra queda representada por una combinación de letras, números y signos. A esta combinación se le llama ***Expresión Algebraica***.

Otros ejemplos de expresiones algebraicas son los siguientes:

a) $x^2 + 3xy$

b) $2a + 3b - 3c$

c) $4x^5$

d) $5x^2 + 6xy + 7x - 8y$

Un número o una letra, o varios números y letras combinados entre sí mediante las operaciones de multiplicación o de división, o de ambas recibe el nombre de ***Término.***

Algunos ejemplos de términos son: -8, $4x$, $5xy$, $-7x^5$, $8x^4zy$.

Si se tiene un grupo de letras y números separados por signos mas (+) o menos (-) entonces se puede descomponer en términos. Por ejemplo: la expresión $35a^2b - 2^a + 4c^2$ se puede descomponer en los términos:

$35a^2b$, -2^a y $4c^2$.

Si un término está compuesto de un número y uno o más letras, el número recibe el nombre de ***coeficiente.***

Por ejemplo: en $3a^2b$, 3 es el coeficiente de a^2b.

Términos semejantes

Dos *términos son semejantes* cuando tienen las mismas literales elevadas a los mismos exponentes.

Por ejemplo, los términos 5 x^2 y 2 x^2 son semejantes pues ambos tienen la misma literal y ésta está elevada al mismo exponente. Los términos ($2x^2y^3$) y ($-3x^2y^3$) también son semejantes pero los términos ($4x^2y^3z^5$) y ($-5x^3y^2z^5$) no son semejantes pues a pesar de que tienen las mismas literales, algunas tienen distintos exponentes; por ejemplo, en el primer término la x está elevada al cuadrado mientras que en el segundo término, la x está elevada al cubo. Una vez que detectamos términos semejantes (http://html.rincondelvago.com/expresiones-algebraicas.html) en una expresión, lo que procede es reducirlos sumándolos o restándolos como sigue:

Observar las siguientes operaciones:

Ejemplos

$5ax^4y^3 - 2ax^4y^3 = 3ax^4y^3$

$4ax^4y^3 + x^2y$

En el primer caso la resta se puede realizar mientras que en el segundo caso la suma no. En el primer caso se trata de términos semejantes y en el segundo no. Por tanto:

Para sumar o restar dos términos tienen que ser semejantes. La suma o resta es otro término semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Es decir, que para sumar términos semejantes usamos la propiedad distributiva:

$$\forall\, a,b,c \in \mathbf{R};\, a(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Por ejemplo apoyándonos en esta propiedad, ¿ $5x^2 + 2x^2 = (\_\_\_ + \_\_\_)\cdot \_\_\_ =$?

Tenemos que $5x^2 + 2x^2 = (5+2)\cdot x^2 = 7x^2$. Si se tiene la suma: $5x^3 + 2x^2$ no podemos aplicar la distributiva, luego no se pueden sumar y así se queda.

Cuando los términos no son semejantes la suma queda indicada y el resultado es un polinomio.

La suma de términos semejantes se basa en tres de las ya estudiada leyes:

1) La propiedad conmutativa: a+b=b+a
2) La propiedad asociativa: (a+b)+c=a+(b+c)

La propiedad distributiva: a·b+a·c=a·(b+c) Para sumar los polinomios $(5x^2 + 3x) + (3x^2 + 2x)$, como la suma es asociativa, se pueden quitar los paréntesis; luego, como la suma es conmutativa, se pueden acomodar convenientemente los términos. Así, se puede escribir:

$$(5x^2 + 3x) + (3x^2 + 2x) = 5x^2 + 3x^2 + 3x + 2x = 8x^2 + 5x$$

A veces es cómodo organizar esta suma acomodando los términos semejantes, unos encima de otros y sumarlos:

$$\begin{array}{c} (5x^2 + 3x) \\ \underline{(3x^2 + 2x)} \\ 8x^2 + 5x \end{array}$$

En realidad, cuando se trabaja de esta forma, los paréntesis no son necesarios. También es importante mencionar que esta forma de arreglo para la suma, se elige sólo cuando las sumas son muy grandes. Por ejemplo, sumar:

$$(7x^3 - 5x^2 + 3x + 4) + (2x^3 + 8x - 1)$$

$$\begin{array}{l} 7x^3 - 5x^2 + 3x + 4 \\ \underline{2x^3 \qquad\quad + 8x - 1} \\ 9x^3 - 5x^2 + 11x + 3 \end{array}$$

No olvidemos que el grado de un término de una sola variable se determina con el exponente de la variable. Así, por ejemplo:

$7x^3$ es un término de tercer grado
$5x^2$ es un término de segundo grado
$3x$ es un término de primer grado

Ahora veamos el caso de la resta de términos semejantes. Para esto usaremos la ya estudiada definición de resta con números reales. Esto es:

$$\forall\ a,b \in R; a - b = a + (-b)$$

La resta de dos términos semejantes es una suma "disfrazada", es decir para restar la expresión $\left(5x^3 - 3x\right)$ de la expresión $\left(7x^3 - 5x\right)$, lo que tenemos que hacer es sumar la expresión $\left(5x^3 - 3x\right)$ con el inverso aditivo de la expresión $\left(7x^3 - 5x\right)$ (el cual se obtiene de los inversos aditivos de los coeficientes de esta expresión): Es decir;

$$\left(7x^3 - 5x\right) - \left(5x^3 - 3x\right) = \left(7x^3 - 5x\right) + \left(-5x^3 + 3x\right) = 2x^3 - 2x$$

Otro ejemplo, para efectuar la operación $\left(4x^2 + 7x + 3\right) - \left(2x + 2\right)$, hacemos lo que sigue:

$$\left(4x^2 + 7x + 3\right) - \left(2x + 2\right) = \left(4x^2 + 7x + 3\right) + \left(-2x - 2\right) = 4x^2 + 5x + 1$$

Este tipo de operaciones, también se puede realizar así:

$$\begin{array}{l} 4x^2 + 7x + 3 \\ \underline{0x^2 - 2x - 2} \\ 4x^2 + 5x + 1 \end{array}$$

En realidad, el cero que acompaña a la x^2 no es necesario; sólo se escribió para indicar que en la expresión *(2x+2)* no existen términos de segundo grado. Escribir el cero, ayuda mucho a la organización de términos semejantes, cuando se usa este tipo de arreglo en las operaciones de suma y resta de expresiones. Notemos que en este tipo de arreglos operacionales, se va escribiendo la inversa aditiva del sustraendo de modo que la operación a realizar sea una suma. Por ejemplo, para efectuar la resta:

$$\left(4x^2 - 5x + 3\right) - \left(2x^2 + 8x + 4\right)$$

se puede agilizar el proceso, si al escribir una expresión arriba de la otra, se van escribiendo simultáneamente las inversas aditivas de cada uno de los términos del sustraendo y luego se efectúa la suma:

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 5x - 3 \\ \underline{-2x^2 - 8x - 4} \\ 2x^2 - 13x - 1 \end{array}$$

Veamos otro ejemplo. Restemos $\left(3x^4 + 7x^2 + 8\right) - \left(x^4 + 2x^2 + 3x - 5\right)$:

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 7x^2 + 0x + 8 \\ \underline{-x^4 - 2x^2 - 3x + 5} \\ 2x^4 + 5x^2 - 3x + 13 \end{array}$$

En resumen, una resta de expresiones se reduce a una suma, con el simple hecho de tomar la inversa aditiva del sustraendo, por eso con frecuencia se dice que la resta algebraica es una forma de suma.

Más ejemplos, consultar http://usuarios.lycos.es/calculo21/id47.htm

Actividades de aprendizaje

1) ¿Es aceptable afirmar que $-5x^2$ es un término?
2) ¿Cuántos términos hay en la expresión $7x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 6$?
3) La expresión de la pregunta 2 ¿cuántos términos tiene? ¿Por qué?

4) ¿Cuál es la suma de $(5x^5+2x^3-3x^2+7)+(4x^4-x^3+x-2)$?

5) Realice la suma de las expresiones $(2x^3+3x)+(5x^3-2x^2-8x+10)$ poniendo una encima de otra.

6) Efectúe la suma $(2x^4+5x^2-3x+13)+(x^4+2x^2+3x-5)$ poniendo una expresión encima de la otra.

7) Use las expresiones del problema 6 y reste la segunda de la primera.

8) Efectúe la resta (3a+2b+7)-(4a+3b-12)

9) Reduce los términos semejantes:

a) $2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4$

b) $2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x$

10) El resultado de $(-y^2-4y+2)+(7y^2+5y+4)$ es

a) $6y^2+y+6$
b) $8y^2+9y+6$
c) $6y^4+y^2+6$
d) $8y^4+9y^2+6$

11) El resultado de $(4x^3+6x-6y^2+6)-(4x-2y^2-4)$ es

a) $4x^3+2x-8y^2+2$
b) $4x^3+2x-4y^2+10$
c) $4x^3+10x-8y^2+2$
d) $4x^3-2x-4y^2+10$

Módulo 14
Multiplicación de expresiones algebraicas. Exponentes

OBJETIVO:
Identificar potencia, base y exponente de una expresión algebraica. Multiplicar y dividir polinomios.

Recordemos algunas definiciones básicas.

- Un número o una letra, o varios números y letras combinados entre sí mediante las operaciones de multiplicación o de división, o de ambas recibe el nombre de *Término.*

  Algunos ejemplos de términos son: -8, 4x, 5xy, $-7\ x^5$, $8\ x^4$ zy.

- Si se tiene un grupo de letras y números separados por signos mas (+) o menos (-) entonces se puede descomponer en términos. Por ejemplo: la expresión $35\ a^2\ b\ -2^a + 4c^2$ se puede descomponer en los términos:
  $35\ a^2b$, -2^a y $4c^2$.

- Si un término está compuesto de un número y uno o más letras, el número recibe el nombre de *coeficiente.*

  Por ejemplo: en $3a^2\ b$, 3 es el coeficiente de $a^2\ b$.

Una expresión algebraica que contiene solamente un término se llama ***monomio*.** Una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos se llama ***binomio.*** Una expresión algebraica que contiene exactamente tres términos se llama ***trinomio*.** En general, las expresiones que contienen más de tres términos se llaman ***polinomios.***

Potencia: Es la representación de un producto de factores iguales
Ejemplo
$6^4 = 6·6·6·6$
$x^3 = x · x · x$
$(x – 1)^2 = (x – 1) · (x – 1)$

Si *n* es un entero positivo, la notación exponencial a^2 que se define en la tabla, representa el producto del número real *a* multiplicado *n* veces por si mismo. La expresión a^2 se lee *a* a la enésima potencia o simplemente a a la *n*. El entero positivo se llama **exponente** y el numero real *a*, **base**.

Notación exponencial

El producto de un número real que se multiplica por sí mismo se denota por a x a ó a · a ó (a) (a).

Ejemplo:

Exponente

$$a^n$$

Base

El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor. Y el número a^n se llama la enésima potencia de a. Por ejemplo, a^4 es la cuarta potencia de a o también se lee “a a la cuarta”.

Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación abreviada, tal que:

$$a \times a = a^2$$

$$a \times a \times a = a^3$$

$$a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

Donde a es llamada base y el número escrito arriba y a la derecha del mismo, es llamado exponente.

Otras formas de expresar a^3 son las siguientes:

$$a \times a \times a = a^3$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$(a)(a)(a)= a^3$$

De esta forma se puede llegar a las leyes de exponentes que muestran a continuación:

LEYES DE LOS EXPONENTES

1) Producto de dos potencias de la misma base.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^4 \times a^5 = a^{4+5} = a^9$

2) El cociente de dos potencias de la misma base.
Elévese la base a una potencia igual al exponente del numerador menos el exponente del denominador.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $\frac{a^{16}}{a^6} = a^{16-6} = a^{10}$

3) La potencia de una potencia.
Elévese la base a una potencia igual al producto de dos exponentes.

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ $\qquad$ $\left(a^5\right)^2 = a^{10}$

4) La potencia del producto de dos factores.
Encuéntrese el producto de cada factor elevado a la enésima potencia

$(ab)^n = a^n \cdot a^n$ $\qquad$ $(ab)^3 = a^3 \cdot a^3$

5) La potencia de cociente de dos factores.
Encuéntrese el cociente de cada factor elevado a la enésima potencia.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{a^n}$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{a^5}$

Ejemplos:

a) $b^3 \quad b^4 = b^7$

f) $\dfrac{(1 + i)^5}{(1 + i)^3} = (1 + i)^2$

b) $\dfrac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

g) $(2a^3)^4 = 16\,a^{12}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^2 = \dfrac{x^6}{y^4}$

d) $\dfrac{y^{15}}{y^{10}} = y^{15-10} = y^5$

h) $(x^4)^5 = x^{20}$

e) $\dfrac{8x^3y^2}{x^2y} = 8xy$

i) $\dfrac{(2xy)^3}{(xy)^2} = \dfrac{2^3x^7y^3}{x^2y^2} = 8x^5y$

6) Exponente cero, uno y fraccionario

EXPONENTE CERO. Si a es un número real diferente de cero, a elevado a la cero es igual a 1. $a^o = 1$.

Esta aseveración puede demostrarse aplicando la regla del cociente de dos potencias de la misma base. Considérese el siguiente cociente:

$$1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

$5^o = 1$

Resumimos las leyes en el cuadro siguiente: Exponentes Enteros

Ley:	Ejemplo:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^3)^4 = a^{3\cdot 4} = a^{12}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(ab)^2 = a^2 b^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$
$(a^n b^m)^p = a^{np} b^{mp}$	$(a^2 b^3)^5 = a^{2\cdot 5} b^{3\cdot 5} = a^{10} b^{15}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$	$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
$a^0 = 1$	

http://ponce.inter.edu/cremc/exponentes.html

Las leyes de los exponentes pueden generalizarse:

$x^4 x^2 x^3 = x^{4+2+3} = x^9$

$(3ij)^4 = 3^4 i^4 j^4 = 81 i^4 j^4$

Actividades de aprendizaje

Simplifica y escribe utilizando exponentes positivos.

1. $\frac{x^6}{x^{-10}}$

2. $\dfrac{6x^4y^7}{12x^5y^{-8}} =$

3. $(6x^{10})\,(3x^4)^2 =$

4. $\dfrac{4\,(10^{-12})}{6\,(10^{4})} =$

5. El resultado de $\left(4x^3y^2\right)^4$ es

a) $16x^7y^6$
b) $16x^{12}y^8$
c) $256x^7y^6$
d) $256x^{12}y^8$

6. El resultado de $\dfrac{8x^5y^2}{2x^2y^2}$ es

a) $4x^7$
b) $4x^3y$
c) $4x^3$
d) $4x^7y^4$

Simplificar una expresión donde hay potencias de números reales, significa cambiarla a otra en que cada número real aparece solo una vez y todos los exponentes son positivos. *Teniendo presente que los denominadores representan números reales diferentes de cero.*

Simplificar:

a)

$$\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right)$$

b)

$$\left(\frac{2t^2}{p}\right)^3\left(\frac{p}{t^5}\right)^2$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right) &= (3)(4)x^3xy^2y^8\\ &= 12x^4y^{10}\end{aligned}$$

b)

$$\left(\frac{2t^5}{p}\right)^3\left(\frac{p}{t^5}\right)^4 = \frac{(2t^5)^3}{p^3}\cdot\frac{p^4}{(t^5)^4}$$

$$= \frac{2^3(t^5)^3}{p^3}\cdot\frac{p^4}{(t^5)^4}$$

$$= \frac{8t^{15}}{p^3}\cdot\frac{p^4}{t^{20}}$$

$$= 8\cdot\frac{t^{15}}{t^{20}}\cdot\frac{p^4}{p^3}$$

$$= \frac{8p}{t^5}$$

Multiplicación de expresiones algebraicas

Recordando la propiedad distributiva podemos hacer multiplicaciones de un monomio por un polinomio. Por ejemplo:

La expresión $2(1 - x^2)$ indica el producto del monomio 2 por el binomio $(1 - x^2)$, y para efectuar esta operación usamos la propiedad distributiva:

$$2(1 - x^2) = 2\,(1) - 2\,(x^2) = 2 - 2x^2.$$

Es decir multiplicamos el monomio por cada término del binomio.

Otro ejemplo:

$$-5\,(x + y) = (-5)\,(x) + (-5)\,(y) = -5x - 5y$$

Observemos que en este ejemplo usamos paréntesis en el -5 para no tener complicaciones en cuanto a los signos. Recomendamos hacer esto cuando trabajamos con coeficientes negativos.

Más ejemplos:

1. $- x\,(a+b) = (-x)\,(a) + (-x)\,(b) = - x\,a - x\,b$
2. $x\,(x -1) = (x)\,(x) + (x)\,(-1) = x^2 - x$
3. $2x\,(x+y) = 2x\,(x) + 2x\,(y) = 2x^2 + 2xy$

En los ejemplos 2 y 3 ya usamos la ley 1) de los exponentes vista anteriormente. Así como podemos multiplicar un monomio por un binomio, también podemos multiplicar un monomio por un trinomio:

$$5x\,(3x^2 - x + 4) = 5x\,(3x^2) + 5x\,(x) + 5x\,(4) = 15\,x^3 + 5\,x^2 + 20\,x.$$

Para más ejemplos consultar http://usuarios.lycos.es/calculo21/id61.htm

Para la multiplicación de polinomios, usaremos una generalización de la propiedad distributiva.

Para esto, trabajaremos con el binomio *(a+b)* y con el binomio, *(c+d)*. El producto de estos binomios lo expresamos así:

$$(a+b)\,(c+d)$$

Y procedemos a multiplicar de la siguiente manera:

$$(a + b)\,(c + d)= a\,(c + d)+ b\,(c + d)$$

Es decir, el primer término del binomio (a+b), que es “a”, se multiplica por el otro binomio (c+d). Y de la misma forma, el segundo término de (a+b), que es “b”, se multiplica por (c+d).

Si nuevamente aplicamos la propiedad distributiva, a cada término del miembro derecho de la igualdad, se tiene que:

$$(a+b)\,(c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Este resultado muestra el hecho de que el producto de dos polinomios, se puede efectuar multiplicando cada término de uno de los polinomios, por cada término del otro. Por ejemplo, al multiplicar *(a+b)* (x+y+z), se tiene:

$$(a+b)\,(x+y+z) = a\,(x+y+z) + b\,(x+y+z)=$$
$$a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z + b \cdot x + b \cdot y + b \cdot z$$

Siguiendo el anterior proceso el producto de (2t+3) *(a+b)* es:

$$(2t+3)\,(a+b)= 2t\,(a+b) + 3\,(a+b) = 2ta+2tb+3a+3b$$

Del mismo modo, el producto

$$(4x+y)\cdot(a+1) = 4x\,(a+1) + y\,(a+1) = 4xa + 4x + ya + y$$

A veces, el producto de polinomios puede simplificarse combinando los términos. Por ejemplo, al multiplicar:

$$\left(2x+3\right)\left(2x-3\right)$$

Hacemos lo mismo que antes pero ahora podemos identificar y reducir los términos semejantes:

$$(2x+3)\left(2x-3\right) = 2x\left(2x-3\right) + 3\left(2x-3\right) = 4x^2 - 6x + 6x - 9 = 4x^2 - 9$$

A veces, cuando se tienen polinomios con muchos términos, conviene arreglarlos uno encima de otro, ordenándolos de mayor a menor de acuerdo al grado de cada polinomio. Por ejemplo, para multiplicar:

$$(2x^2+3x-5)\ \ (3x+4)$$

Escribamos uno encima del otro, para tener un arreglo como el siguiente:

$$\begin{array}{l} 2x^2 + 3x - 5 \\ \underline{3x + 4\qquad\qquad} \end{array}$$

Ahora, tomemos el primer término del de abajo del arreglo, 3x, y multipliquémoslo por cada uno de los términos del de arriba:

$$\begin{array}{l} \boxed{2x^2 + 3x - 5} \\ \underline{\boxed{3x+4}\qquad\qquad\quad} \\ 6x^3 + 9x^2 - 15x \end{array}$$

Enseguida, tomemos el segundo término, 4, y repitamos el proceso anterior, acomodando los productos de acuerdo al grado.

$$\begin{array}{l} \boxed{2x^2 + 3x - 5} \\ \underline{\boxed{3x+4}\qquad\qquad\qquad} \\ \boxed{6x^3 + 9x^2 - 15x} \\ \qquad 8x^2 + 12x - 20 \end{array}$$

Por último, sumemos los productos, término a término:

$$
\begin{array}{r}
\boxed{2x^2+3x-5} \\
\boxed{3x+4} \\
\hline
\boxed{6x^3+9x^2-15x} \\
\boxed{8x^2+12x-20} \\
\hline
6x^3+17x^2-3x-20
\end{array}
$$

La verdad es que no necesitamos ordenar de mayor a menor grado. Podemos hacerlo al revés; es decir de menor a mayor grado. Lo importante es que ordenemos de algún modo, si lo que deseamos es agilizar el proceso de multiplicación.

Multipliquemos $(3x^3-2x^2-x+6)$ $(7x^2+2x-1)$.

Veamos el proceso:

$$
\begin{array}{l}
3x^3-2x^2-x+6 \\
7x^2+12x-1 \\
\hline
21x^5-14x^4-7x^3+42x^2 \\
\qquad\quad 6x^4-4x^3-2x^2+12x \\
\qquad\qquad\quad -3x^3+2x^2+x-6 \\
\hline
21x^5-8x^4-14x^3+42x^2+14x-6
\end{array}
$$

Para más ejemplos consultar http://usuarios.lycos.es/calculo21/id65.htm

Y http://usuarios.lycos.es/calculo21/id67.htm

Actividades de aprendizaje

1. multiplica los siguientes polinomios:

a) $9ab \bullet 6ab =$

b) $2x \bullet (6x^2 - 9x + 1) =$

c) $2a^3b \bullet 4ab^2 =$

d) $3mn \bullet (5n - 4mn + m) =$

e) $(2x - y)(2x + y)$

f) $(a + b)(a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2) =$

g) $(a + b)(a+ b) =$

h) $(2 + r)(2 + r) =$

i) $(y + 2)\cdot(y^3 + y^2 + y + 1)=$

2. Determina el factor desconocido

a) $2a^3b \bullet$ .... = $30a^4b^5$

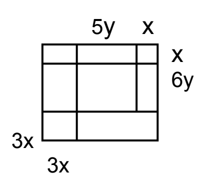
b) $-3x^3y^4z \bullet$ .... = $6y^4z^3$

c) .... $\bullet\ 4ab^2 = -20a^4b^3c$

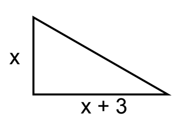
e) $3m\bullet$ (2m + ...) = ... + $3m$

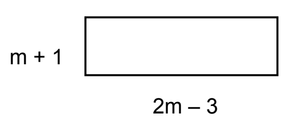
f) (a + ...) (a + 4) = ... + $7a + 12$

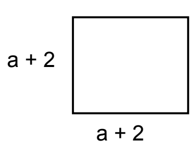
3. Calcula el área de la figura siguiente:



4. ¿Cuál es el área de cada una de las figuras?







División de Polinomios

Las operaciones que se han revisado hasta el momento, serán necesarias para dividir dos polinomios. Los polinomios son cerrados bajo estas operaciones; es decir, la suma, resta y multiplicación de polinomios da como resultado un polinomio, pero esto no sucede con la división de polinomios. Esto significa que si se dividen dos polinomios, el resultado no es necesariamente un polinomio. Ejemplo: el 3, es un polinomio y x ² es también un polinomio. De hecho, ambos son monomios. Si se dividen ambos polinomios de manera que $\frac{3}{x^2}$ el resultado no es un polinomio, debido a que no responde a la definición que se dió de polinomio.

La división de monomios.
Por ejemplo, para dividir $15x^3$ entre $5x^2$ lo que se debe hacer es dividir los coeficientes de ambos monomios y aplicar la ley de los exponentes para la división:

$$\frac{15x^3}{5x^2} = 3x^{3-2} = 3x^1 = 3x$$

Del mismo modo, al dividir $8x^6$ entre $4x^2$ se tiene que:

$$\frac{8x^6}{4x^2} = 2x^{6-2} = 2x^4$$

De esta forma, es posible dividir un polinomio entre un monomio, separando en cocientes de monomios. Por ejemplo:

$$\frac{6x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 12x}{3x} = \frac{6x^4}{3x} - \frac{9x^3}{3x} + \frac{3x^2}{3x} - \frac{12x}{3x} = 6x^3 - 3x^2 + 3x - 4$$

Otro ejemplo de división: $\frac{5x^3 + 4x + 2}{x}$

$$\frac{5x^3}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{2}{x} = 5x^2 + 4 + \frac{2}{x}$$

Como se ve, la expresión resultante no es un polinomio. Observese que la división es distributiva sobre la suma; es decir

$$\frac{5x^3 + 4x + 2}{x} = \frac{5x^3}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{x}\left(5x^3 + 4x + 2\right) = \frac{1}{x}5x^3 + \frac{1}{x}4x + \frac{1}{x}2 = 5x^2 + 4 + \frac{2}{x}$$

En general, si se tiene $\frac{x + y}{z}$, entonces:

$$\frac{x+y}{z}=\frac{1}{z}(x+y)$$
$$\frac{1}{z}(x+y)=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$
$$\frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$

lo cual muestra la validez de la propiedad distributiva sobre la suma. Esto permite que, al dividir un polinomio entre un monomio, sea posible dividir cada término del polinomio entre el monomio. Por ejemplo: si se desea dividir $\frac{12x^3-9x^2+6x}{3x}$, entonces:

$$\boxed{\frac{12x^3-9x^2+6x}{3x}}=\frac{12x^3}{3x}-\frac{9x^2}{3x}+\frac{6x}{3x}=4x^2-3x+2$$

Como dividir polinomios entre polinomios. Recuérdese que, como en el caso de las operaciones con polinomios anteriores, conviene ordenar los términos de todos los polinomios que intervienen en la operación, del más grande al más pequeño, de acuerdo al grado. Recuérdese también que, por definición de división, el producto del divisor y el cociente es igual al dividendo. En particular, buscamos que el producto del primer término del divisor y el primer término del cociente sea igual al primer término del dividendo. Con estas ideas puede empezarse la división $\frac{2x^3+19x^2+31x-28}{x+7}$.

Obsérvese que, como ahora se tiene un polinomio entre un binomio, usar la propiedad distributiva no es buena idea, así que se recurre al siguiente arreglo:

$$x+7\;\overline{\big)\,2x^3+19x^2+31x-28}$$

El primer término del cociente es $2x^2$ porque $2x^3$ entre x es igual a $2x^2$. De este modo, el arreglo queda como:

$$\begin{array}{ll} & 2x^2 \\ \boxed{x+7} & \overline{\big)\,\boxed{2x^3+19x^2+31x-28}} \end{array}$$

Multiplíquese $2x^2$ por (x+7) y escríbase el producto abajo del dividendo:

$$\begin{array}{ll} & 2x^2 \\ \boxed{x+7} & \overline{\big)\,\boxed{2x^3+19x^2+31x-28}} \\ & \underline{2x^3+14x^2} \end{array}$$

Enseguida se debe restar. El resultado de la resta es $5x^2$, (ya que $2x^3 - 2x^3 = 0$ y $19x^2 - 14x^2 = 5x^2$), así que colóquese:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \\
\hline
\boxed{x+7} & \boxed{2x^3+19x^2+31x-28} \\
 & \underline{2x^3+14x^2} \\
 & \quad\; 5x^2
\end{array}
$$

En seguida bájese el siguiente término del dividendo, 31x, junto a $5x^2$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \\
\hline
\boxed{x+7} & \boxed{2x^3+19x^2+31x-28} \\
 & 2x^3+14x^2 \\
 & \quad\; 5x^2 \;\; +31x
\end{array}
$$

Ahora obsérvese que la expresión $5x^2 \;\; +31x$ es un nuevo dividendo, así que se toma su primer término $5x^2$ y se divide entre el primer término del divisor, x. Esta división es 5x, porque $5x^2$ entre x es 5x. Colóquese este nuevo término del cociente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x \\
\hline
\boxed{x+7} & \boxed{2x^3+19x^2+31x-28} \\
 & 2x^3+14x^2 \\
 & \quad\; 5x^2 \;\; +31x
\end{array}
$$

Ahora multiplíquese este nuevo término del cociente por todo el dividendo, y se escribe el producto como un nuevo dividendo.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \;\; +5x \\
\hline
\boxed{x+7} & \boxed{2x^3+19x^2+31x-28} \\
 & 2x^3+14x^2 \\
 & \quad\; 5x^2 \;\; +31x \\
 & \quad\; 5x^2 +35x
\end{array}
$$

Lo que sigue es restar los dividendos en el residuo. Es decir:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x^2 \ +5x \\
\hline
x+7 & \boxed{2x^3+19x^2+31x-28} \\
 & 2x^3+14x^2 \\
 & \qquad 5x^2 \ +31x \\
 & \qquad \underline{5x^2 +35x} \\
 & \qquad\qquad -4x
\end{array}
$$

Y para concluir la división se pone:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x^2 \ + 5x \ - \ 4 \\
\hline
x+7 & \boxed{2x^3+19x^2+31x-28} \\
 & 2x^3+14x^2 \\
 & \qquad 5x^2 \ +31x \\
 & \qquad 5x^2 +35x \\
 & \qquad\qquad -4x- 28 \\
 & \qquad\qquad \underline{-4x -28} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Para saber si es correcta la división se multiplica el cociente que se obtuvo por el divisor y puede comprobarse que este producto es igual al dividendo.

En el caso de la división anterior, el residuo es cero. Esto significa que la división es exacta o, que el divisor "es un divisor exacto del dividendo", sin embargo esto no siempre sucede. Hay divisiones cuyo residuo no es cero.

Otro ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad 5x - 1 \\
\hline
3x+2 & 15x^2 + 7x - 2 \\
 & 15x^2 +10x \\
 & \qquad -3x -2 \\
 & \qquad -3x -2 \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Para saber si la solución es correcta, se multiplica el cociente por el divisor y se verifica que sea igual al dividendo:

$$(5x – 1)\cdot (3x+2)= 15x^2 + 7x – 2$$

Al ordenar los términos de un polinomio de mayor a menor grado, se facilita el proceso de división, porque los residuos sucesivos se van organizando de modo que la resta es casi inmediata. Por ejemplo, el polinomio:

$$5x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x - 8$$

está ordenado a partir del término de mayor grado, 4, al de menor grado. Cada término, a partir del de cuarto grado, va bajando de uno en uno: así, después del

cuarto grado, sigue el de tercer grado, luego el de segundo y así sucesivamente. Cuando esto sucede, se dice que es un polinomio completo de cuarto grado.
El polinomio $7x^3-15x^2 + 7x – 2$ es completo de tercer grado. Mientras que el polinomio $2x^4 - 3x - 5$ es un polinomio incompleto de cuarto grado. Cuando se desee dividir polinomios incompletos, conviene escribir ceros en los lugares donde falten los términos del grado correspondiente, para facilitar el proceso de división. De este modo el polinomio $\boxed{2x^4-3x-5}$, se escribiría como:

$$2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x - 5$$

Recuérdese que esta forma de rescribir el polinomio es sólo si se desea dividir entre otro polinomio. Por ejemplo, dividir $(x^2 - 9)$ entre $(x - 3)$. Para facilitar el proceso de división pueden organizarse los polinomios de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x-3 & x^2 + 0x - 9 \\ & x^2 - 3x \\ & \quad\; 3x - 9 \\ & \quad\; 3x - 9 \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Como las divisiones entre polinomios no siempre son exactas. En Aritmética hay un proceso para cambiar las fracciones impropias por un número mixto; Por ejemplo $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ o bien $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, en el que, en el primer caso $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ y, en el segundo caso, $3\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$. En álgebra, la expresión $x\frac{3}{2}$, significa “x que multiplica a tres medios” o bien “x veces tres medios”.

Si en una división entre polinomios queda un residuo, se puede expresar de un modo similar, luego el cociente comprende una fracción que consiste de un residuo dividido por el divisor: Por ejemplo, en la división:

$$\begin{array}{r|l} & \qquad 2 \\ \hline 4x+2 & 8x + 3 \\ & 8x + 4 \\ & \quad\; - 1 \end{array}$$

el residuo muestra que la división no es exacta, luego el cociente se puede escribir como $\frac{8x + 3}{4x + 2} = 2 + \frac{-1}{4x + 2}$. Otra consecuencia de que la división no sea exacta es que la comprobación ya no se concreta a la multiplicación del cociente por el divisor. Ahora a esta multiplicación hay que sumarle el residuo para obtener el dividendo:

$$2(4x+2)+ (-1)= 8x +4-1= 8x+3$$

Por ejemplo, al efectuar la división siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7x\ \ +3 \\
\hline
2x-5 & 14x^2-29x-10 \\
 & 14x^2-35x \\
 & \qquad\quad 6x-10 \\
 & \qquad\quad 6x-15 \\
 & \qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

ésta no es exacta porque el residuo es distinto de cero; esta es la razón por la que el dividendo no se puede expresar como un producto, sino como la suma: $14x^2 - 29x - 10 = (7x + 3) \cdot (2x - 5) + 5$. Una expresión distinta de este proceso es: $\frac{14x^2 - 29x - 10}{2x - 5} = 7x + 3 + \frac{5}{2x - 5}$

Actividades de aprendizaje

1. Efectúe los siguientes cocientes:

   $a)\ \frac{-6x^5}{-3x^2} =$

   $b)\ \frac{18x^8}{6x^3} =$

   $c)\ \frac{-35x}{35x} =$

   $d)\ \frac{10x}{10} =$

2. ¿Cuál es el cociente de $\frac{0}{x^2 + 3} =$?

3. ¿Cuál es el resultado de dividir $\frac{x + 1}{0} =$?

4. Escribe el cociente $\frac{15x^3 - 10x^2 + 20x}{5x}$ de acuerdo a la propiedad distributiva y efectúa el cociente.

5. ¿Cuál es el componente de la división que permite afirmar si la división de polinomios es exacta o no y qué condición debe cumplir para que lo sea?

6. Llene los espacios que resuelven el cociente:

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad x \quad \square \\ \hline x^2+0x+1 & x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ & \square \quad \square \quad \square \\ & \quad\ \square \quad \square \quad \square \\ & \quad\ \square \quad \square \quad \square \\ & \quad\quad\quad\quad \square \end{array}$$

7. Efectúe la división $z+2\overline{)z^4+3z^3+3z^2+3z+2}$ y escriba una expresión para el dividendo.

8. Efectúe la división $2y+1\overline{)2y^3-y^2-3y+1}$ y escriba una expresión para el dividendo.

9. El resultado de $\dfrac{12w^3z - 18w^2z - 24wz^4}{6wz}$ es:

a) $2w^2 - 3w - 4z^3$
b) $12w^2 - 18w - 24z^3$
c) $2w^3z + 3w^2z - 4wz^4$
d) $2w^4z^2 - 3w^3z^2 - 4w^2z^5$

10. El resultado de $(12a^2 - 9a - 3) \div (3a - 3)$ es:

a) $-4a + 7$
b) $4a + 1$
c) $4a - 7$
d) $-4a - 1$

Módulo 15
Productos notables

OBJETIVO:
Manejará algunos productos de binomios con coeficientes racionales llamados productos notables, como, cuadrado de un binomio, cubo de un binomio, binomios conjugados; factorizar expresiones algebraicas sencillas..

Binomio al cuadrado
Existe una regla simple para multiplicar un binomio por sí mismo, esto es la operación del binomio al cuadrado.

Ejemplo:

$(x^3 + 5)^2 = (x^3 + 5)(x^3 + 5)$

Es decir:

$(x^3 + 5)(x^3 + 5) = x^3(x^3 + 5) + 5(x^3 + 5)$
$x^3(x^3 + 5) + 5(x^3 + 5) = x^6 + 5x^3 + 5x^3 + 25$
$x^6 + 5x^3 + 5x^3 + 25 = x^6 + 10x^3 + 25$

De lo que se deduce que, para multiplicar un binomio por si mismo, del ejemplo:
El primer elemento se eleva al cuadrado $(x^3)^2 = x^6$;
Se multiplica el doble del primer elemento, por el segundo $2(x^3)(5) = 10x^3$;
Se eleva el segundo elemento del binomio al cuadrado $5^2 = 25$

Y así se obtiene el resultado: $x^6 + 10x^3 + 25$ Al que se le conoce como el *trinomio cuadrado perfecto.*

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/tcuadra1.htm

El cuadro siguiente muestra la forma de elevar un binomio al cuadrado:

Binomio al cuadrado	$(a + b)^2$, $(a – b)^2$
$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b)(a + b) = \overset{1}{a^2} + \overset{2}{ab} + \overset{3}{ab} + \overset{4}{b^2}$ $= \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$	
$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2}$	

<u>Ejemplos</u>:

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 2(3x) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 2(3x) + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

c) $(2a + b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$

d) $(3a - 5b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(5b) + (-5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$

Una forma interesante de elevar un binomio al cuadrado es usando áreas:

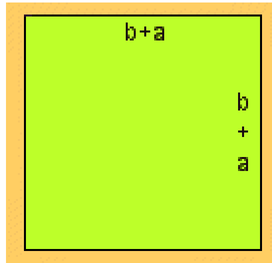
El Famoso "cuadrado de un binomio"

1. CUANDO SE SUMAN LOS TÉRMINOS DEL BINOMIO

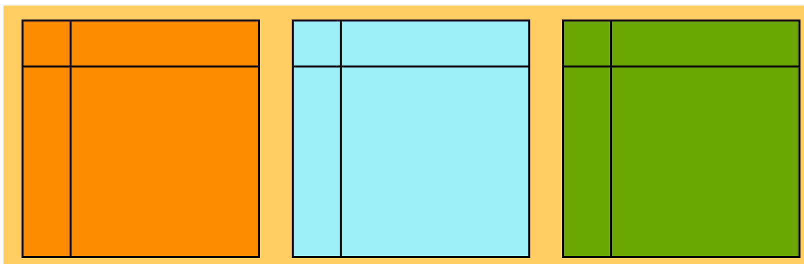
A través de esta experiencia queda claro que el resultado del cuadrado de un binomio es un trinomio.

Vamos a trabajar

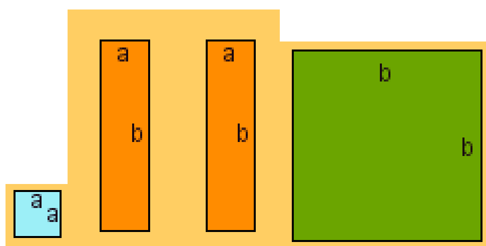
$$(b + a)^2 = b^2 + 2ab + a^2$$



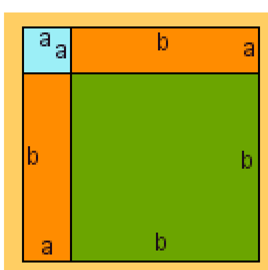
Tomamos un cuadrado de papel fomi y marcamos sus lados como **b+a**
Luego trazamos dos líneas en tres cuadrados de colores diferentes (a elección), como se indica en el siguiente esquema:

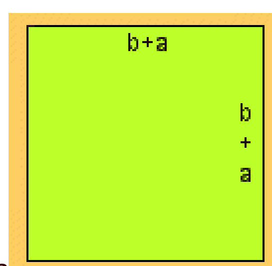


Recortamos estos tres cuadrados por las líneas y separamos las siguientes figuras, etiquetando sus lados como se indica:



Con estas cuatro figuras armamos un cuadrado mayor, según este esquema:



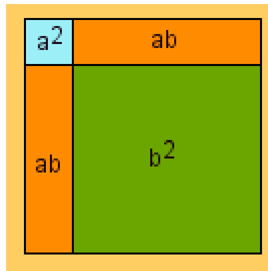
que resulta ser igual a


Recapitulemos los pasos. Para construir una figura de lado **b+a** utilizamos:

1. un cuadrado de lado **b** *(b^2)*

2. un cuadrado de lado **a** *(a^2)*
3. un rectángulo de lado **a** y de lado **b** *(ab)*
4. un rectángulo de lado **a** y de lado **b** *(ab)*

<u>Nota:</u> los pasos 3º y 4º se podrían resumir en 2 rectángulos de lado **a** y de lado **b**, o sea **2ab**.

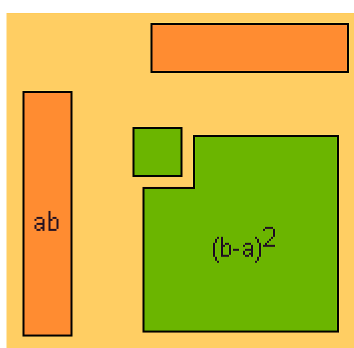


Por lo tanto: $$(b+a)^2 = b^2 + 2ab + a^2$$

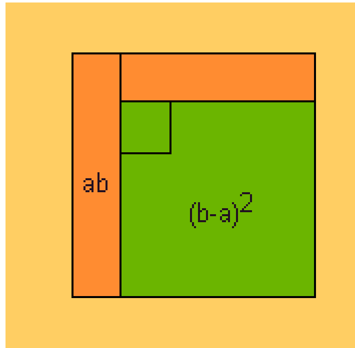
2. CUANDO SE RESTAN LOS TÉRMINOS DEL BINOMIO

Vamos a trabajar $$(b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

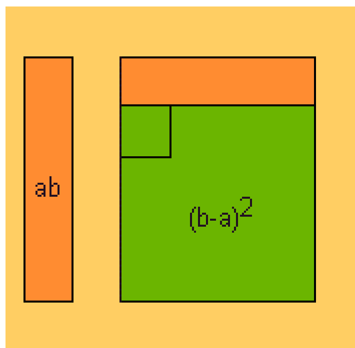
Tomamos dos pliegos de papel fomi de distintos colores, todos de lado **b.** Marcamos **a** sobre cada lado, trazamos las líneas necesarias y recortamos hasta obtener las figuras que se muestran abajo; nuestro objetivo es a partir de estas figuras lograr el área de un cuadrado de lado **(b – a).**



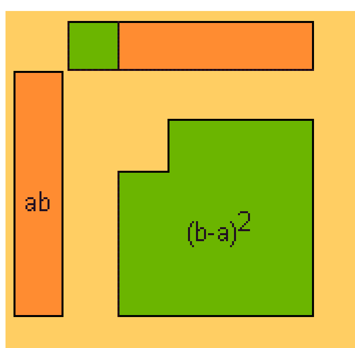
Con las piezas así dispuestas armamos un cuadrado de lado = b



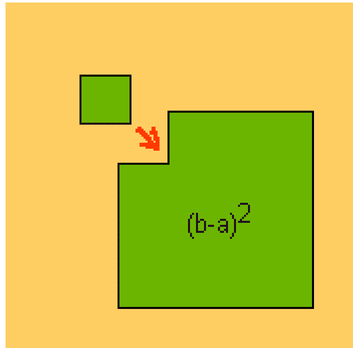
Vamos a proceder a efectuar el cálculo $b^2 - 2ab + a^2$ para comprender el porqué de cada elemento. A ese fin, primero restamos ab de b^2



Ahora deberíamos restar nuevamente ab, sin embargo, para obtener un área semejante no nos alcanza con el rectángulo naranja, al cual le falta un área representada por el pequeño cuadrado verde dentro de $(b-a)^2$. Por eso, restaremos ambos, el rectángulo naranja y el pequeño cuadrado verde, que juntos equivalen a ab.



Es evidente que para que la figura marcada como $(b-a)^2$ represente exactamente esa área, es imperativo volver a **SUMARLE** el cuadrado de lado a.



Repasemos los pasos, de un cuadrado de lado b, restamos:

1º un rectángulo ab

2º un rectángulo ab

3º agregamos a^2

<u>Nota</u>: *los pasos 1º y 2º se podrían resumir en dos rectángulos de lado b y de lado a.*

Por lo tanto: $(b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$

Diferencia de cuadrados

Cuando se multiplica:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2$$

$$x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Resultado que representa la diferencia de dos elementos al cuadrado

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

A los binomios (x +y) y (x - y) se les conoce como ***binomios conjugados*** y su producto es una ***diferencia de cuadrados***.

Producto de binomios conjugados	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)(a - b) = \overset{1}{a^2} + \overset{2}{ab} - \overset{3}{ab} + \overset{4}{b^2}$ $= a^2 - b^2$	

Ejemplos:

a) $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

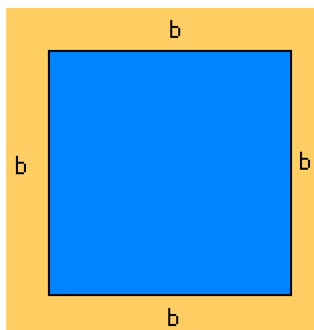
b) $(2a - 1)(2a + 1) = (2a)^2 - (1)^2 = 4a^2 - 1$

c) $(3x - 2y)(3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$

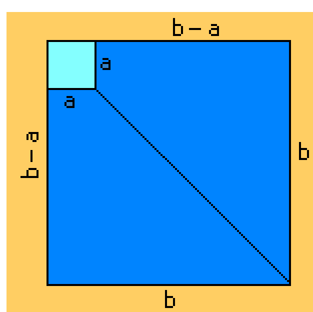
Una forma interesante de observar el resultado del producto de binomios conjugados como una diferencia de cuadrados es usando **áreas:**

Diferencia de cuadrados

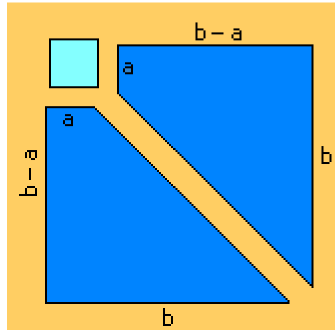
Construir un cuadrado de lado b



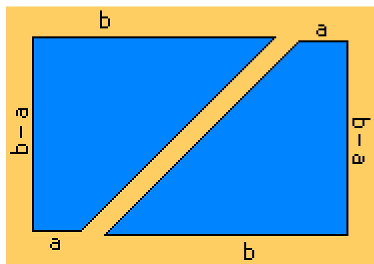
Marcar un segmento de lado **a** como indica la figura, y trazar una diagonal, obteniendo los siguientes segmentos:



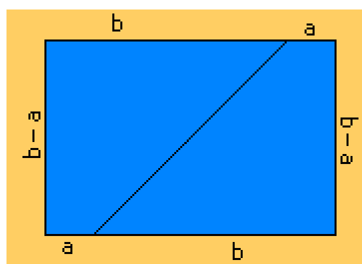
Recortar la figura según se indica:



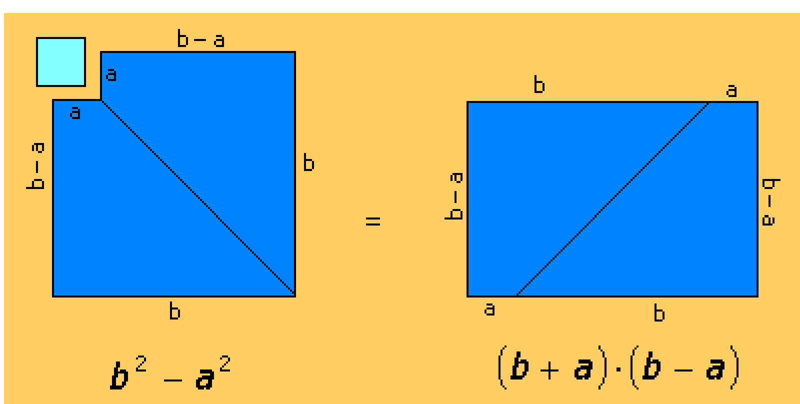
Con las piezas azules armar un rectángulo (será necesario "dar vuelta" una de ellas):



Obsérvese que quedó formado un rectángulo de lado **(a + b)** y de lado **(a – b)**:



Al comparar las áreas de las dos figuras, nótese que son iguales:



Se ha "demostrado" geométricamente la identidad algebraica:

$$b^2 - a^2 = (b + a) \cdot (b - a)$$

Para más ejemplos de productos de binomios conjugados consultar las páginas:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id136.htm
Para más ejemplos de productos notables consultar las páginas:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id134.htm
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id135.htm

Actividades de aprendizaje

1. Realice los productos siguientes:

a) (2x – y) (2x + y)=

b) (x + y) (x – y) =

c) (4x + 3y) (4x – 3y) =

d) (a + b) (a+ b) =

e) (2 + r) (2 + r) =

2. El resultado de $\left(\frac{2x}{3} - 3\right)^3$ es

a) $\frac{6x^3}{9} + 27$
b) $\frac{8x^3}{27} - 27$
c) $\frac{8x^3}{27} - \frac{4x^2}{3} + 6x - 27$
d) $\frac{8x^3}{27} - 4x^2 + 18x - 27$

Factorización

Después de conocer el proceso para sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios, continua aprender a factorizarlos, es decir a expresarlos como productos.
Factorizar una expresión quiere decir escribirla como un producto. Los componentes de un producto se llaman factores; de ahí su nombre de factorización; en el proceso de factorización se descompone la expresión en productos que al multiplicarse debe dar como resultado el primero.

Para una mejor comprensión del proceso que se desarrolla al factorizar polinomios, vale la pena discutir primero factores de números enteros,

Ejemplo: obtener los factores del número 20, lo cual significa que se escribe el número 20 como un producto.

Una forma para hacer esto es 20 = (4) (5),
también puede decirse que 20 = (2) (10).
Para comprender mejor el proceso de factorización, es necesario recordar el concepto de **número primo**.

El conjunto de los **números primos** es un subconjunto de los números naturales que engloba a todos los elementos de este conjunto que son divisibles exactamente tan sólo por sí mismos y por la unidad (por convención, el 1 no se considera primo). Los veinte primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 y 71.

Nótese el hecho de que todos los números naturales son divisibles por sí mismos y por la unidad.

El teorema fundamental de la Aritmética establece que cualquier entero positivo puede representarse siempre como un producto de números primos, y esta representación (factorización) es única.

Un número entero, puede factorizarse en más de una manera;
por ejemplo el 18= (2)(9) o bien 18=(3)(6),
sin embargo en ambos productos hay números, el 9 y el 6,
que no son primos. Pero estos números, a su vez, se pueden expresar como productos de números primos, porque $9=3\cdot 3$ y $6=3\cdot 2$.
Si se sustituyen estos números por sus factores se obtendrán las mismas factorizaciones del número 18
Porque $18=2\cdot 9=2\cdot 3\cdot 3$ y $18=3\cdot 6=3\cdot 3\cdot 2$, lo cual es la misma factorización.

Los factores primos de un entero positivo son siempre los mismos, no importa el orden en que se escriban.
Por ejemplo los factores primos de *20* son *2, 2 y 5*. La factorización prima de 100 es $100=2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$. Se usa el concepto de factores primos, para especificar exactamente los factores de un entero positivo, por lo tanto, cuando se desee obtener los factores primos de un entero positivo, se espera que se efectúe una factorización prima.

Pagina interactiva para factorizar números:

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Factors/Index.html#

Factorización por factor común

Proceso de factorizar polinomios de primer grado con coeficientes enteros.
Por ejemplo, factorizar el polinomio $3x+12$. Por la propiedad distributiva, se tiene que

$$3x+12=3(x+4)$$

Luego, 3 y $(x+4)$ son factores de $3x+12$.

La Propiedad Distributiva. Las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación, son de fundamental importancia, a pesar su aparente sencillez. Hasta aquí, hemos usado estas propiedades en expresiones que incluyen sólo una operación. Veamos ahora, algunas expresiones en que ambas operaciones, suma y multiplicación, se combinan para formar otra propiedad.
La expresión *5(3+4)*$=5\cdot 7$*=35*, se ejecuta sumando primero *(3+4)* y luego multiplicando el resultado de esta suma por *5*. Tomemos otra ruta para realizar esta operación: Multipliquemos *(5x3)* y luego *(5x4)*. Ahora sumemos ambos productos, el resultado es el mismo que en la primera operación. Con este criterio es cierto que:

$$3\cdot(2+9)=(3\cdot 2)+(3\cdot 9)$$

Pues, en la expresión $3\cdot(8+2)=3\cdot 8+3\cdot 2$ la suma *(8+2)* está multiplicada por el factor *3*. En esta afirmación, $3\cdot(8+2)=3\cdot 8+3\cdot 2$, podemos notar que el factor 3 multiplica a cada término de la suma. Esto es, el *3* está "distribuido" en la suma. En la operación $2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5$, el multiplicador es el multiplicador es *2* y está distribuido en la suma *(3+5)*.
Por lo tanto estamos en presencia de la ***Propiedad distributiva*** que en resumen dice:
Si a, b y c son números reales entonces a (b + c) = a · b + a · c.

Ejemplo se tiene que la factorización de 4x+8z es:

$$4x+8z=4(x+2z)$$

Ejemplo, la factorización de $2x+4y-8z$ es:

$$2x+4y-8z=2(x+2y-4z)$$

Como se observa, cada vez que se usa la propiedad distributiva, aparece un factor común en cada término del polinomio que se va a factorizar. Ésta es la clave que da la señal de que se puede usar la propiedad distributiva.
Así, el factor común en el polinomio $4x-8y+12z$ es 4.
Este factor común se puede observar si se exagera un poco la escritura del polinomio, escribiendo:

$$4x-8y+12z=(4)x-(4)(2)y+(4)(3)z$$

Con esta forma de escritura, se ve que cada término tiene como factor común a 4. De hecho, cuando en el polinomio hay coeficientes con factores comunes el factor común se puede localizar calculando el máximo común divisor de dichos coeficientes. En el ejemplo anterior, el máximo común divisor de los coeficientes 4, 8 y 12 es el 4 y por eso es el **factor común.**

Sacar factor común: Es aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, Así, la propiedad distributiva dice:

Pues bien, si nos piden factorizar la expresión $a.x+a.y$, basta aplicar la propiedad distributiva y decir que

Cuando nos piden sacar factor común o simplemente factorizar y hay coeficientes con factores comunes, se saca el máximo común divisor de dichos coeficientes. Por ejemplo, si nos piden factorizar la expresión , será

$$36x^2-12x^3+18x=6x(6x-2x^2+3)$$

donde 6 es el máximo común divisor de 36, 12 y 18
Para comprobar si la factorización se ha hecho correctamente, basta efectuar la multiplicación, aplicando la propiedad distributiva de la parte derecha de la igualdad, y nos tiene que dar la parte izquierda.

Los factores comunes en cada término de un polinomio no se restringen a polinomios de primer grado.

Por ejemplo, en el polinomio $5x^2+5x^3$, el factor común es $5x^2$, pues 5 es el máximo común divisor y por otra parte se aconseja que para saber como será la literal que vaya en el factor común se tome la de menor potencia.

En este ejemplo x^2 es la de menor potencia. Luego la factorización es:

$$5x^2+5x^3=5x^2(1+x)$$

El factor común de $3x^2+2x^2-ax^2$ es solamente x^2 pues en los coeficientes el máximo común divisor es el 1 y la factorización del polinomio es:

$$3x^2+2x^2-ax^2=x^2(3+2-a)=x^2\ (5-a)$$

Este ejemplo muestra que los factores comunes no son necesariamente numéricos. De hecho pueden ser, también, números y literales. El polinomio $4x^2y^2+20xy$ es un ejemplo de esto, porque:

$$4x^2y^2+20xy=4xy\,(xy+5)$$

Aquí, el máximo común divisor es el 4 y las literales de menor potencia son xy.
La propiedad distributiva también es útil en la factorización de polinomios racionales, como $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y$, donde el factor común es $\frac{1}{4}$, por lo que:

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}(x+y)$$

La factorización del polinomio $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y$ es:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(2x+y),$$

lo cual es admisible, porque se está factorizando en polinomios racionales.
Algunas veces el factor común no se ve a simple vista. Por ejemplo, en el polinomio $x^2+\frac{3}{5}$ es necesario reescribirlo como $\frac{5}{5}x^2+\frac{3}{5}$, pues $\frac{5}{5}=1$ y su factorización queda así:

$$x^2+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}x^2+\frac{3}{5}=\frac{1}{5}(5x^2+3)$$

Con esta idea, la factorización del polinomio $z^2-\frac{1}{3}z$ queda así:

$$z^2-\frac{1}{3}z=\frac{1}{3}z(3z-1)$$

El proceso es:

$$z^2-\frac{1}{3}z=\frac{3}{3}z^2-\frac{1}{3}z=\frac{1}{3}(3z-1)$$

Para más ejemplos consultar la página:

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/fcomun1.htm

Factorización por agrupación

Un polinomio puede tener un factor común que, a su vez, también sea un polinomio. Por ejemplo, en el polinomio $x(y-2)+6(y-2)$, el factor común es $(y-2)$, luego la factorización es:

$$x(y-2)+6(y-2)=(y-2)(x+6),$$

Esta factorización se puede verificar multiplicando $(y-2)(x+6)$ y verificando que sea el polinomio original.
En algunos polinomios es necesario aplicar más de una vez la propiedad distributiva, para poder factorizarlos. Por ejemplo, Factorizar el polinomio:

$$2xy-2xz+5y-5z$$

Se agrupa este polinomio en dos binomios $(2xy-2xz)+(5y-5z)$ con el objeto de observar que, en cada una de ellos, hay factores comunes diferentes. En $(2xy-2xz)$ el factor común es $2x$ y la factorización es $2x(y-z)$. Así mismo, en el polinomio $(5y-5z)$, la factorización es

$$(5y-5z)=5(y-z).$$

Por lo que el polinomio que se desea factorizar, se transforma en:

$$2xy-2xz+5y-5z=2x(y-z)+5(y-z)$$

Esta nueva forma de escribir el polinomio presenta un factor común:

$$(y-z)$$

Luego, la factorización es:

$$2xy-2xz+5y-5z=(y-z)(2x+5).$$

Esta idea de agrupar los polinomios y luego factorizar, justifica porqué se le da el nombre de *técnica por agrupación*.
La factorización por agrupación depende de cómo se empiece a agrupar, pero se haga como se haga, la factorización debe ser la misma. Por ejemplo, si el polinomio anterior, se hubiera rescrito como:

$$2xy-2xz+5y-5z=2xy+5y-2xz-5z$$

Entonces la factorización es:

$$2xy+5y-2xz-5z=(2xy+5y)-(2xz+5z)=y(2x+5)-z(2x+5)=(y-z)(2x+5)$$

Para más ejemplos se pueden consultar las páginas:

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/fcomun2.htm

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/fcomun3.htm

Actividades de aprendizaje

Factoriza los siguientes polinomios

1) $az+bz-cz$
2) $\frac{2}{3}y^2 - 4y$
3) $a(2z+3)+b(2z+3)+c(2z+3)$
4) $ax+by+ay+bx$
5) $3x^3 - 9x^2 + 6x$
6) $m^5 - 6m^4 + 10m^3$
7) $14a^3b^4c^2 + 28a^2b^2c^2 - 7a^3bc$
8) $6x^3-9x^2+4x-6$
9) x^3+x^2+x+1
10) x^3+2x^2-x-2

Factorizaciones de trinomios como productos de binomios

Se ha revisado la obtención de factores por aplicación inmediata de la propiedad distributiva; hay otro tipo de polinomios que, para factorizarlos, hacen falta otro tipo de técnicas. Una de ellas es cuando el polinomio se puede expresar como producto de dos binomios.

Factorizar un polinomio, significa expresarlo como un producto, de ahí que, naturalmente, los productos están íntimamente relacionados con las factorizaciones. Por ejemplo el producto $(x+3)(x+2)$ es:

$$\begin{array}{l} x+3 \\ \underline{x+2\qquad} \\ x^2+3x \\ \underline{\qquad 2x+6} \\ x^2+5x+6 \end{array}$$

Así, $(x+3)(x+2)=$ x^2+5x+6 lo cual se interpreta como que el producto de los binomios $(x+3)(x+2)$ es la factorización de x^2+5x+6 . Muchos polinomios se pueden factorizar en esta forma y, para descubrir la técnica, conviene analizar el producto cuidadosamente. En el proceso que se hace para multiplicar:

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+2 \\ \hline x^2+3x \\ 2x+6 \\ \hline x^2+5x+6 \end{array}$$

sólo se llevó a cabo una suma $3x+2x=5x$, lo cual coincide con el término de en medio del trinomio que se desea factorizar x^2+5x+6. Obsérvese ahora la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{l} x+7 \\ x+5 \\ \hline x^2+7x \\ \quad 5x+35 \\ \hline x^2+12x+35 \end{array}$$

a) El primer término del producto $(x+7) \cdot (x+5)$ es $x \cdot x = x^2$

b) El tercer término del producto $(x+7) \cdot (x+5)$ es $7 \cdot 5=35$

c) El término de en medio del producto $(x+7) \cdot (x+5)$ es $7x+5x=12x$

Siguiendo la conducta del producto llevado a cabo, multiplíquese:

$$(x+3)(x+6)$$

a) El primer término del producto es x^2

b) El segundo término del producto es $9x$

c) El tercer término del producto es 18

Con esta técnica se puede llevar a cabo el producto $(x+3)(x+6)$ sin formarlos uno abajo del otro como en los casos anteriores. Así, $(x+3)(x+6)=x^2+9x+18$.

Otro ejemplo. Multiplíquese $(x+4)(x+3)$.

a) El primer término del producto es x^2

b) El segundo término del producto es $7x$

c) El tercer término del producto es 12

Otro ejemplo más: Multiplíquese $(x-3)(x-2)$.

a) El primer término del producto es x^2

b) El segundo término del producto es $-5x$

c) El tercer término del producto es 6

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + px + q$ o $px^2 + qx + r$ como productos de binomios

Se utiliza la técnica de multiplicación que se revisó anteriormente para factorizar polinomios como $x^2+10+21$.
La sospecha inmediata es que este trinomio, puede ser el producto de dos binomios, donde cada uno de los factores serán de la forma (x +"un número"). Como 21 es el último término del producto, los números de los factores deberán ser: $21\cdot1=21$ o bien $7\cdot3=21$, por lo tanto, se puede decir que:

$$x^2+10x+21=(x+3)(x+7) \quad \textbf{\textit{o bien}} \quad x^2+10x+21=(x+1)(x+21)$$

Al multiplicar se puede saber cuál de las dos factorizaciones es la correcta
De este modo, resulta que $(x+3)(x+7)$ es la factorización correcta.

Del mismo modo, se puede factorizar el trinomio:

$$x^2+6x+5=(x+\_\_)(x+\_\_)$$

Los números que se ponen en los espacios son 5 y 1. Así, la factorización correcta es $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$.

En resumen, cuando se tiene un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, su factorización será igual al producto de dos binomios de la forma ***(x+a)(x+b),*** donde la suma de ***a*** y ***b*** es ***q*** y el producto de ***a*** y ***b*** es ***r***. En otras palabras se tendrá que:

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$$

bx

ax

Condiciones

$$\boxed{\begin{array}{c} p = a+b \\ q = ab \end{array}}$$

OBSERVACION:

1. El trinomio es el producto notable de la multiplicación de dos binomios con un término común.
2. El término común de la Factorización aparece en grado decreciente.

Ejemplos:

(1) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$. Porque 2+3=5 y (2) (3)= 6

(2) $a^2 + 4a – 45 = (x – 5)(x + 9)$. Porque -5+9=4 y (-5) (9)= 45

(3) $x^4 – 7x^2 + 10 = (x^2 – 2)(x^2 – 5)$. Porque -2-5= -7 y (-2) (-5) = +10

(4) $(x+y)^2 – 6(x+y) + 9 = (x+y – 3)(x+y – 3)$. Porque -3-3 = -6 y (-3) (-3) = 9

Para más ejemplos de factorización de este tipo trinomios consultar la página http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/tformax1.htm

Si el coeficiente del primer término es diferente de 1, la factorización se complica. Por ejemplo el trinomio $2x^2+5x+3$, los posibles factores del primer término son $2x$ y x, y los únicos para el tercer término son *3* y *1*.
Luego entonces, las únicas factorizaciones posibles son $(2x+1)(x+3)$ y $(2x+3)(x+1)$ en las que sólo la última es la correcta.
Esto se obtiene multiplicando para verificar que $(2x+3)(x+1)= 2x^2+5x+3$.

Existen trinomios que presentan un grado de dificultad mayor, por el número de posibilidades que contienen. Por ejemplo el trinomio $6x^2+5x-4$.
Si este trinomio es factorizable como un producto de dos binomios, entonces las posibilidades son:

$(6x+4)(x-1)$	$(2x+4)(3x-1)$	$(6x+2)(x-2)$
$(6x-1)(x+4)$	$(2x-1)(3x+4)$	$(6x-2)(x+2)$
$(6x+1)(x-4)$	$(2x+1)(3x-4)$	$(2x+2)(3x-2)$
$(6x-4)(x+1)$	$(2x-4)(3x+1)$	$(2x-2)(3x+2)$

Cada uno de estos productos, los primeros y los últimos términos coinciden con los de $6x^2+5x-4$. Para identificar el correcto se considera aquel que, en forma de trinomio, tenga como término central a $5x$, y el único que lo cumple es

$$(2x-1)(3x+4)$$

Pues

$$(2x-1)(3x+4)=6x^2+8x-3x-4=6x^2+5x-4$$

En resumen, para factorizar un trinomio ordenado de la forma $px^2 + qx + r$ se utiliza un método conocido como **de estimación** y el cual es como sigue:

La factorización del trinomio $\mathbf{px^2 + qx + r}$ será igual al producto de dos binomios de la forma ***(ax + b)(cx + d)***, donde el producto de ***a*** y ***c*** es ***p*** (pues su producto va acompañado del literal x^2), ***q*** debe ser igual a la suma de los productos de a con d y b con c (pues estos productos van acompañados del literal x), y el producto de ***b*** y ***d*** es ***r*** (pues este producto es sólo un número).

En este sentido, puede existir más de una posibilidad pare este caso, siendo una sola la correcta, es decir que cumplen con las tres condiciones a la vez. Esto es:

Condiciones a estimar **adx**

$$px^2 + qx + r = (ax + b)\ (cx + d),$$

bcx

p = ac
q = ad + bc
r = bd

Ejemplos. Factorizar:

+10x

$$4x^2 + 16x + 15 = (2x + 3)\ (2x + 5).$$

+6x
+10x
+16x

$$8x^2 - 30x - 27 = (2x - 9)\ (4x + 3).$$

Para más ejemplos de factorización de este tipo de trinomios consultar la página http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/tformbx1.htm

Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos

Un **trinomio Cuadrado Perfecto** es un trinomio de la forma $a^2 + 2ab + b^2$ donde los términos aparecen ordenados con relación a una letra. Para que un trinomio de esta forma sea cuadrado y prefecto debe cumplir dos cosas:

1) el primer y último termino del trinomio deben tener raíz cuadrada exacta, y además

2) el doble producto de estas raíces debe ser el segundo término del trinomio.

Regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto.

1) Un trinomio ordenado con relación a una letra
2) Es cuadrado perfecto cuando el primer y tercer término son cuadrados perfectos
3) El segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Ejemplos de trinomios cuadrados perfectos:

a) El trinomio $x^2 + 2xy + y^2$ es cuadrado perfecto porque el primero "x^2" y el último término "y^2" tienen raíces cuadradas exactas: "x" y "y" respectivamente. Además el doble producto de estas dos raíces es 2xy, el cual coincide con el segundo término del trinomio.

b) El trinomio $4x^2 - 20x + 25$ es cuadrado perfecto porque el primero "$4x^2$" y el último término "25" tienen raíces cuadradas exactas: "2x" y "5" respectivamente. Además el doble producto de estas dos raíces es $2 (2x) (5) = 20x$, el cual coincide con el segundo término del trinomio.

c) El trinomio $x^2 - 6x + 9$ es cuadrado perfecto porque el primero "x^2" y el último término "9" tienen raíces cuadradas exactas: "x" y "3" respectivamente. Además el doble producto de estas dos raíces es $2 (x) (3) = 6x$, el cual coincide con el segundo término del trinomio.

d) El trinomio $x^2 - 5x - 9$ es cuadrado porque el primero "x^2" y el último término "9" tienen raíces cuadradas exactas: "x" y "3" respectivamente. Sin embargo no es perfecto porque el doble producto de estas dos raíces es $2 (x) (3) = 6x$, el cual coincide con el segundo término del trinomio que es 5x. Por lo tanto este trinomio no es cuadrado perfecto.

e) El trinomio $x^2 - 6x - 9$ no es cuadrado porque aunque el primer término "x^2" si tiene raíz cuadrada exacta: "x", el segundo término "-9" ni siquiera tiene raíz cuadrada pues es un número negativo. Por lo tanto este trinomio no es cuadrado perfecto.

Una vez identificados los trinomios cuadrados perfectos es fácil factorizarlos, por ejemplo si el trinomio es $a^2 + 2ab + b^2$ entonces se usan las raíces cuadradas del primer y último término (en este caso la raíz cuadrada de a^2 es a y la raíz cuadrada de b^2 es b) y se usan el signo del segundo término para así expresar el trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ como un producto de binomios (que de hecho es el mismo binomio):

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Factorización de los trinomios cuadrados perfectos de los ejemplos anteriores:
a) es $x^2 + 2xy + y^2$, y como vimos las raíces de "x^2" y de "y^2" son "x" y "y". Luego la factorización queda así:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$$

b) es $4x^2 - 20x + 25$, y como vimos las raíces de "$4x^2$" y de "25" son "2x" y "5". Luego la factorización queda así:

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)(2x - 5) = (2x - 5)^2$$

Recordar que el signo que se pone en los factores debe ser el mismo que el signo del segundo término del Trinomio Cuadrado Perfecto.

c) es $x^2 - 6x + 9$, y como vimos las raíces de "x^2" y de "9" son "x" y "3". Luego la factorización queda así:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$$

d) y e) no se pueden factorizar de esta manera pues no son Trinomios Cuadrados Perfectos.

Procedimiento para factorizar Trinomios Cuadrados Perfectos

1) Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término; en el ejemplo a y b.
2) Se forma un producto de dos factores binomios con la suma de estas raíces; entonces $(a + b)(a + b)$.
3) Este producto es la expresión factorizada $(a + b)^2$.

Más ejemplos de factorización de Trinomios Cuadrados perfectos:

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3x) + (3)^2 = (x + 3)^2$

b) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2(4x) + (4)^2 = (x + 4)^2$

c) $x^2 – 6x + 9 = x^2 – 2(3x) +(3)^2 = (x – 3)^2$

d) $x^2 – 8x + 16 = x^2 – 2(4x) + (4)^2 = (x – 4)^2$

Para más ejemplos consultar la página siguiente http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/tcuadra1.htm

Un resumen de los tipos de factorización anteriores se puede encontrar en la página siguiente:

http://platea.pntic.mec.es/anunezca/ayudas/factorizacion/factorizacion_polinomios.htm

Actividades de aprendizaje

Factoriza los siguientes trinomios:

a) $2x^2 + 5x + 2 =$

b) $2x^2 - 13x - 7 =$

c) $r^2 + 2rs + s^2 =$

d) $9x^2 - 12x + 4 =$

e) $z^2 + 4zx + 4x^2 =$

f) $a^2 + 5ab + 4b^2 =$

g) $x^2 + 3xy - 4y^2 =$

h) $x^2 + 7x + 10 =$

i) $x^2 + 6x + 9 =$

j) $2x^2 - 5x - 4 =$

Factorización de diferencias de cuadrados

En el estudio de los anteriores métodos de factorización, hubo uno que se deriva del producto de dos binomios, el cual da como resultado un trinomio. Sin embargo, no todo producto de dos binomios es un trinomio. Recuérdese que una ***diferencia de cuadrados*** es un polinomio que es producido por el producto de binomios conjugados.

Para identificar si un polinomio es una diferencia de cuadrados se debe empezar verificando si el polinomio es un binomio. Luego, se debe observar que ambos términos tengan raíz cuadrada exacta y por último que los términos estén unidos por el signo menos. Así por ejemplo, el polinomio

$$x^2 - y^2$$

es una diferencia de cuadrados pues es un binomio, ambos términos tiene raíz cuadrada exacta y están unidos por el signo menos. Ahora, si se multiplica

$$(x+y)(x-y)$$

Se tiene que

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2.$$

De esta manera, el binomio $x^2 - y^2$ queda factorizado así $(x+y)(x-y)$. Obsérvese que los factores $(x+y)$ y $(x-y)$ están compuestos por las raíces de x^2 y y^2. Así que sólo basta que uno de ellos sea una suma y el otro la resta.

Del mismo modo, si se multiplica $(x+2)(x-2)=x^2 -4$.

Obsérvese que si se busca un producto tal como

$$(a+b)\ (a-b)$$

Donde los binomios son la suma y la diferencia de los mismos dos términos, el producto contiene solamente dos términos. Es decir:

$$(a+b)(a-b)= a^2 -b^2$$

Este es el modelo general de la diferencia de cuadrados y su modo de factorización. Formalmente este modelo se expresa como

$$\forall\ a,b; a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Obsérvese que un factor es la suma, y el otro la resta de las cantidades cuyos cuadrados aparecen en la expresión del modelo. Cabe recordar que a esta suma por la resta, se le llama producto de ***binomios conjugados*.** Por ejemplo, si se tiene la suma $r+s$, su binomio conjugado es $r-s$.

Con esta simbología se puede resumir, que un producto de binomios conjugados es igual a la diferencia de cuadrados. Recíprocamente, una diferencia de cuadrados, se factoriza como un producto de binomios conjugados. Por ejemplo, $25x^2-16y^2= (5x+4y)(5x-4y)$.

Para ejemplificar factorizar los polinomios siguientes:

$x^2 – 1 = x^2 – 1^2 = (x – 1)(x + 1)$

$4x^2 – 16 = (2x)^2 – 4^2 = (2x – 4)(2x + 4)$

Para ver más ejemplos de factorizaciones de diferencias de cuadrados consultar la página:

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/dcuadra1.htm

Factorización de sumas o diferencias de cubos perfectos

Una suma de cubos perfectos, es un binomio que se expresa en forma de suma donde los términos tiene raíces cúbicas exactas, por ejemplo $a^3 + b^3$. La forma de factorizar este tipo de binomios es aplicar la fórmula siguiente:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

El procedimiento para factorizar un binomio de esta forma es como sigue

1) Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio.
2) Se forma un producto de dos factores.
3) Los factores binomios son la suma de las raíces cúbicas de los términos del binomio.
4) Los factores trinomios se determinan así:
   El cuadrado de la primera raíz menos el producto de estas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo 1: Factorizar $x^3 + 1$

La raíz cúbica de: x^3 es x

La raíz cúbica de: 1 es 1

Según la fórmula: $x^3 + 1 = (x + 1)[(x)^2 - (x)(1) + (1)^2]$

Luego $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

Ejemplo 2: Factorizar $8x^3 + 64$

La raíz cúbica de: $8x^3$ es 2x

La raíz cúbica de: 64 es 4

Según la fórmula $8x^3 + 64 = (2x + 4)[(2x)^2 - (2x)(4) + (4)^2]$

Luego $8x^3 + 64 = (2x + 4)(4x^2 - 8x + 16)$

Ejemplo 3: Factorizar $1000x^6y^3 + 125z^{12}w^{15}$

La raíz cúbica de: $1000x^6y^3$ es $10x^2y$

La raíz cúbica de: $125z^{12}w^{15}$ es $5z^4w^5$

$$1000x^6y^3 + 125z^{12}w^{15} = (10x^2y + 5z^4w^5)\,[(10x^2y)^2 - (10x^2y)(5z^4w^5) + (5z^4w^5)^2]$$

Luego $1000x^6y^3 + 125z^{12}w^{15} = (10x^2y + 5z^4w^5)(100x^4y^2 - 50x^2yz^4w^5 + 25z^8w^{10})$

Una diferencia de cubos perfectos es un binomio que se expresa en forma de resta donde los términos tienen raíces cúbicas exactas por ejemplo $a^3 - b^3$. La forma de factorizar este tipo de binomios es aplicar la fórmula siguiente:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

El procedimiento para factorizar un binomio de esta forma es como sigue:

1) Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio.
2) Se forma un producto de dos factores.
3) Los factores binomios son la diferencia de las raíces cúbicas de los términos del binomio.
4) Los factores trinomios se determinan así:
   El cuadrado de la primera raíz más el producto de estas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo 1: Factorizar $y^3 - 27$

La raíz cúbica de: y^3 es y

La raíz cúbica de: 27 es 3

Según procedimiento $y^3 - 27 = (y - 3)[(y)^2 + (y)(3) + (3)^2]$

Luego $y^3 - 27 = (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$

Ejemplo 2: Factorizar $125x^3 - 1000$

La raíz cúbica de: $125x^3$ es $5x$

La raíz cúbica de: 1000 es 10

Según procedimiento $125x^3 - 1000 = (5x - 10)[(5x)^2 + (5x)(10) + (10)^2]$

Luego $125x^3 - 1000 = (5x - 10)(25x^2 + 50x + 100)$

Para ver más sobre el tema, consultar la página :
http://student_star.galeon.com/factor02.html

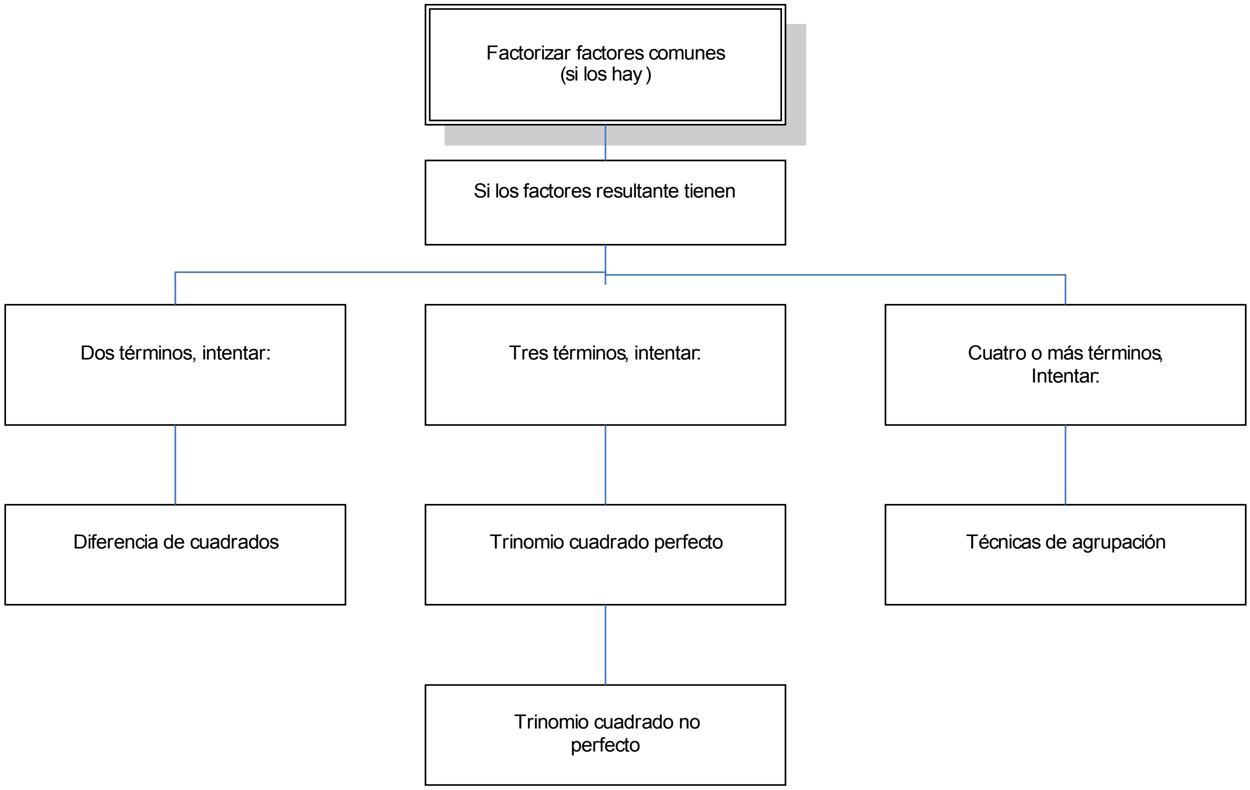
Hay unos polinomios que, para factorizarlos, no basta una sola técnica. Por ejemplo, para factorizar el polinomio $x^3 + 2x^2 + xy^2$ es necesario, primero, factorizar al factor común x, para obtener:

$$x^3 + 2x^2 + xy^2 = x\,(x^2 + 2x + y^2)$$

Uno de los factores resultantes, $(x^2 + 2x + y^2)$ es, a su vez, factorizable porque es un trinomio cuadrado perfecto. Es decir $(x^2 + 2x + y^2) = (x + y)^2$, luego

$$x^3 + 2x^2 + xy^2 = x\,(x^2 + 2x + y^2) = x\,(x+y)^2$$

La factorización de polinomios puede ser muy compleja y podría involucrar todas las técnicas conocidas y, a veces, requerir de todo el ingenio. Sin embargo, una buena estrategia puede ser seguir el siguiente esquema:



Por ejemplo, al factorizar el polinomio $z^3 + 9z^2 + 20z$ usando este diagrama

$$z^3 + 9z^2 + 20z = z(z + 4)(z + 5)$$

Intentar el polinomio $2y^2 - 28y + 98$. La factorización es

$$2y^2 - 28y + 98 = 2(x^2 - 14x + 49) = 2(x - 7)^2.$$

Obsérvese que el siguiente binomio $a^2 + b^2$. En este caso, no es factorizable en términos de polinomios en enteros. De hecho, no existe método alguno para factorizar polinomios de la forma $a^2 + b^2$. Dicho de otra manera, no es posible factorizar una suma de cuadrados.

Observar que casi todos los polinomios que se han revisado, son cuadráticos o de segundo grado. Hay polinomios de mayor grado que pueden factorizarse usando las técnicas que se han registrado.

Por ejemplo, para factorizar $x^4 + 6x^2 + 9$:

$$x^4 + 6x^2 + 9 = \left(x^2\right)^2 + 6x^2 + 9 = \left(x^2 + 3\right)^2$$

Del mismo modo, el trinomio $y^4 + 3y^2 + 2$ no es trinomio cuadrado perfecto, pero se puede factorizar como:

$$y^4 + 3y^2 + 2 = \left(y^2 + 2\right)\left(y^2 + 1\right)$$

También se pueden factorizar polinomios definidos en los racionales. Por ejemplo

$$z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(3z^2 - z - 2\right) = \frac{1}{3}\left(3z + 2\right)\left(z - 1\right).$$

Para polinomios racionales, se necesita una factorización en la forma de un número racional, multiplicado por uno o más polinomios en enteros.

Las técnicas de factorización son, tal vez, la herramienta más fuerte que posee el álgebra.

Actividades de aprendizaje

Factoriza los siguientes polinomios:

1) $100z^2 - 81y^2$
2) $y^2 - 9y - 22$
3) $3a^2 - 48$
4) $x^3z - xz^3$
5) $6y^3 + 6y^2 - 36y$
6) $a^2 + 10$
7) $z^4 - 3z^2 + 2$
8) $x^4 - 16$
9) $\frac{1}{3}a^2 - 4a + 12$
10) $\frac{1}{2}z^2 - 2y^2$
11) $27x^3 + 8y^3$
12) $125a^3 - b^3c^3$

13) El resultado de factorizar $y^4 - 225$ es

a) $\left(y^2 - 15\right)^2$
b) $\left(y^2 + 15\right)^2$
c) $\left(y^2 + 15\right)\left(y^2 - 15\right)$
d) $\left(y^2 - 15\right)\left(y^2 - 15\right)$

14) El resultado de factorizar $5a^2 - 30ab + 45b^2$ es

a) $5(a - 5b)^2$
b) $5(a - 3b)^2$
c) $(5a + 15b)(a - b)$
d) $(5a - 3b)(a + 15b)$

Módulo 16
Simplificación de fracciones

OBJETIVO:
Manejará las cuatro operaciones fundamentales con expresiones algebraicas fraccionarias, simplificarlas hasta transformarlas en irreductibles y expresará proposiciones en lenguaje simbólico matemático.

Cualquier expresión que pueda escribirse como cociente de polinomios, se llama expresión racional o fraccionaria. Por ejemplo $\frac{x^2}{x^2+1}$ es una expresión racional.

El uso de las propiedades estudiadas hasta ahora, se ilustra con la simplificación del cociente $\frac{x^2-6x}{2x^2+3x}$ el cual, factorizando y simplificando queda como:

$$\frac{x^2-6x}{2x^2+3x}=\frac{x(x-6)}{x(2x+3)}=\frac{x-6}{2x+3}$$

Mostremos un ejemplo más. Simplifica $\frac{x^3+x^2-6x}{x^3-3x^2+2x}=\frac{\square}{\square}$

¿Tu resultado es $\frac{x+3}{x-1}$? ¡Perfecto! Veamos porque:

$$\frac{x^3+x^2-6x}{x^3-3x^2+2x}=\frac{x(x^2+x-6)}{x(x^2-3x+2)}=\frac{x(x-2)(x+3)}{x(x-2)(x-1)}=\frac{x+3}{x-1}$$

Las propiedades de las fracciones que servirán para lo posterior, se resumen como:

1) $b\dfrac{a}{b} = a$

2) $\dfrac{a}{b} = a\dfrac{1}{b}$

3) $\dfrac{cx}{cy} = \dfrac{x}{y}$

4) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d} = \dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Actividades de aprendizaje

Usando las propiedades del resumen, simplifica las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{3x}{6y} =$

$b)\ \dfrac{x-3}{2x-6} =$

$c)\ \dfrac{x+12}{2x+16} =$

$d)\ \dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-1} =$

1) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=$

2) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}=$

3) $\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+5x-3}=$

4) $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2+4x-4}$

5) $\dfrac{(2a-b)(a^2-3ab+ab^2)}{(2a^2+ab-b^2)(a-2b)}=$

6) $\dfrac{(2a^2+7ab+6b^2)(a-b)}{(2a^2+ab-3b^2)(2a+b)}=$

7) $\dfrac{(2x-5y)(x^2+3xy+2y^2)}{(2x^2-3xy-5y^2)(2x-y)}=$

8) $\dfrac{ax-ay+bx-by}{2ax-by-ay+2bx}=$

9) $\dfrac{ax+2bx-2by-ay}{2ax-ay+4bx-2by}=$

10) $\dfrac{sx+2sx-tx-2ty}{2sx+4sy+tx+2ty}=$

Multiplicación de fracciones racionales

Para multiplicar dos fracciones racionales, recordemos que en un producto como $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}$ se obtiene multiplicando numeradores y poniendo el producto en el numerador, y multiplicando denominadores y poniendo el producto en el denominador. Es decir $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$. En general, la regla para multiplicar números racionales es $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Recuerda que la suma de fracciones no se comporta así, por lo que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ es un procedimiento erróneo.

Usando esta propiedad del producto de fracciones, multiplique y simplifique la expresión $\frac{7}{x}\cdot\frac{x^2+x}{3}=$____________.

Compara tu solución con $\frac{7}{x}\cdot\frac{x^2+x}{3}=\frac{7\left(x^2+x\right)}{3x}=\frac{7x\left(x+1\right)}{3x}=\frac{7\left(x+1\right)}{3}$ ¿Coincides?

Ahora efectúa las siguientes multiplicaciones:

$a)\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=$

$b)\frac{-2}{3}\cdot\frac{-5}{11}=$

$c)\frac{x}{y}\cdot\frac{r}{s}=$

$d)\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x-y}{5}=$

Compara tus respuestas con:

$$a)\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

$$b)\frac{-2}{3}\cdot\frac{-5}{11}=\frac{10}{33}$$

$$c)\frac{x}{y}\cdot\frac{r}{s}=\frac{xr}{ys}$$

$$d)\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x-y}{5}=\frac{\left(x+y\right)\left(x-y\right)}{10}=\frac{x^2-y^2}{10}$$

¿Puedes intentar la multiplicación $\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{xy}{x^2+2x-3}$ y simplificarla?__________

____

Si obtuviste $\frac{\left(x+1\right)y}{x+3}$ ¡bien! Veamos porqué:

$$\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{xy}{x^2+2x-3}=\frac{\left(x^2-1\right)xy}{x\left(x^2+2x-3\right)}=\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)xy}{x\left(x+3\right)\left(x-1\right)}=\frac{\left(x+1\right)y}{x+3}$$

División de fracciones racionales

En la división de fracciones, usaremos el principio $\frac{a}{b}=a\left(\frac{1}{b}\right)$ que ya usamos antes.

En palabras, usaremos el hecho de que el cociente a dividido por b, es igual al producto de a por el recíproco de b. Por favor, no veas esto como un hecho sin importancia, porque éste resume todas las posibilidades de división para los números reales. Por ejemplo si sustituimos $a=\frac{1}{2}$ y $b=5$, se tiene:

$$\frac{\frac{1}{2}}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

El producto de dos números recíprocos es 1. Es decir $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, lo cual dicho sea de paso, muestra que $\frac{a}{b}$ ***y*** $\frac{b}{a}$ son inversos multiplicativos uno del otro. Esto a su vez, justifica expresiones como:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}$$

De este modo, los números $3/5$ y $5/3$ son recíprocos porque ________________ __________________________.

Muy bien, porque su producto es uno. Fíjate que hay expresiones equivalentes que usan simbología diferente, pero con el mismo significado. Por ejemplo:

$$a\div b=a\cdot\frac{1}{b}\ \ \textbf{\textit{o bien}}\ \ \frac{r}{s}\div t=\frac{r}{s}\cdot\frac{1}{t}=\frac{r}{st}$$

De este modo, el cociente $x\div\frac{1}{a}=$ _____________.

Bien, $x \div \frac{1}{a} = ax$. Efectúa ahora, la división $\frac{x+3}{5} \div \frac{x+2}{7} = \frac{\square}{\square}$

Tu resultado debe ser $\frac{7(x+3)}{5(x+2)}$ ¿coincidimos? Muy bien. Veamos esta división al detalle:

$$\frac{x+3}{5} \div \frac{x+2}{7} = \frac{x+3}{5} \cdot \frac{7}{x+2} = \frac{7(x+3)}{5(x+2)}$$

Intenta ahora este $\dfrac{\frac{x^2-4}{3}}{\frac{x+2}{5}} = \frac{\square}{\square}$

Checa tu solución:

$$\frac{\frac{x^2-4}{3}}{\frac{x+2}{5}} = \frac{x^2-4}{3} \cdot \frac{5}{x+2} = \frac{5(x^2-4)}{3(x+2)} = \frac{5(x+2)(x-2)}{3(x+2)} = \frac{5(x-2)}{3} -$$

Tal vez ya observaste que la operación de división se ha concretado a convertirla en multiplicación. Es decir, la división se ejecuta convirtiéndola en multiplicación. Seguro también observaste que, para la reducción de la expresión, el proceso de factorización es clave. El caso de $\frac{x^2-4}{x^2-9} \div \frac{x^2-x-6}{x^2+6-6}$ es un ejercicio más completo ¿Quieres intentarlo? Adelante.

Veamos la solución:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} \div \frac{x^2-x-6}{x^2+6-6} = \frac{x^2-4}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+6-6}{x^2-x-6} = \frac{(x^2-4)(x^2+6-6)}{(x^2-9)(x^2-x-6)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)(x-3)(x+2)} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)^2}$$

Actividades de aprendizaje

1) $\dfrac{3a^2b}{2ab^2}\cdot\dfrac{5a^3b^2}{3a^2b^3}=$

2) $\dfrac{7x^3y}{2xy^5}\cdot\dfrac{3xy^2}{3x^3y^3}=$

3) $\dfrac{4ab^2c^3}{5a^2c^4}\cdot\dfrac{7a^3b^3c^5}{3ab^2c^2}=$

4) $\dfrac{5a^2x^3t}{3ax}\cdot\dfrac{8a^4xt^2}{13a^3x^2t^3}=$

5) $\dfrac{7a^2x^2}{3ax^3}\div\dfrac{14a^3x}{9ax^3}=$

6) $\dfrac{5a^2x}{2ax^2t}\div\dfrac{10a^3xt}{6a^2x^3t^2}=$

7) $\dfrac{9xy^3z^2}{14yz^3}\div\dfrac{18x^2yz^2}{21xy^3z}=$

8) $\dfrac{15a^3t}{14ab^2t^3}\div\dfrac{6a^2bt^2}{21a^2b^2t}=$

9) $\left(x^2-3x+2\right)\div\dfrac{x^2-1}{x}=$

10) $\left(x^2+5x+4\right)\div\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

Hemos estudiado la multiplicación y división de expresiones racionales. Ahora estudiaremos la forma de sumar este tipo de expresiones.

Tal vez te preguntes por qué dejamos para después la suma y resta de las expresiones radicales y no procedimos, como en el estudio de los números reales, en donde empezamos con la suma y terminamos con el cociente. La razón es que la suma de expresiones racionales depende de las operaciones de multiplicación y división. Veamos cómo ocurre esto.

Suma de expresiones racionales con denominador común.

Para sumar expresiones racionales con denominador común, es necesario aplicar la propiedad distributiva, lo cual es una forma de factorizar un factor común. Por ejemplo:

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(a+b)$$

En general, si x no es cero:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{1}{x}a+\frac{1}{x}b=\frac{1}{x}(a+b)=\frac{a+b}{x}$$

Por ejemplo, usando esta generalidad, la suma $\frac{5}{x}+\frac{7}{x}=\frac{\square}{\square}$

Correcto, $\frac{5}{x}+\frac{7}{x}=\frac{5+7}{x}=\frac{12}{x}$ ¿Cuál es el resultado de $\frac{a}{y}+\frac{b}{y}+\frac{c}{y}=\frac{\square}{\square}$?

Cierto, la solución es $\frac{a}{y}+\frac{b}{y}+\frac{c}{y}=\frac{a+b+c}{y}$. Este tipo de sumas puede aparecer de una manera más extraña. Por ejemplo $\frac{y}{x+y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{\square}{\square}$ ¿Qué pondrás en los espacios?

Desde luego que $\frac{x}{x+y}$. Veamos porqué:

$$\frac{y}{x+y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{y+x-y}{x+y}=\frac{x}{x+y}$$

Observa que para sumar fracciones que tienen un denominador común, basta con anotar la suma de los numeradores sobre el mismo denominador, esto es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=\frac{x+y}{a}$$

Suma de expresiones racionales con denominadores diferentes.

Para enfrentar el problema de sumar expresiones racionales con diferentes denominadores, debemos encontrar una suma de fracciones equivalentes cuyos denominadores sean iguales. Para esto, recurriremos a la regla de la igualdad de fracciones, la cual dice que $\frac{x\cdot c}{y\cdot c}=\frac{x}{y}$. Por ejemplo $\frac{6}{14}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 7}=\frac{3}{7}$.

De este modo, la suma $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$ se puede hacer si encontramos fracciones equivalentes a 3/8 y ¼, respectivamente, que tengan el mismo denominador. En ¼, se puede ver que $\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 4}=\frac{2}{8}$, la cual es una fracción equivalente a ¼ y, además, tiene el mismo denominador que 3/8, luego entonces $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$.

Al número 8 que aparece debajo de la fracción, se le llama el denominador común de 3/8 y ¼. Cuando se suman fracciones siempre se ocupa el menor denominador común. Por ejemplo, en la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, las fracciones 4/6 y 2/3 son equivalentes, pero siempre se procura usar el de menor denominador común. La palabra “procura” se debe a que no siempre es posible trabajar con denominadores pequeños. En la suma $\frac{3}{5}+\frac{1}{7}$ necesitamos un número que sea múltiplo de *5* y *7*, para usarlo como común denominador. Ese número lo podemos obtener multiplicando $5\cdot 7=35$, el cual es el número más pequeño que se puede usar como denominador común: Así, la suma es $\frac{3}{5}+\frac{1}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{1\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{21}{35}+\frac{5}{35}=\frac{26}{35}$.

Siguiendo este procedimiento ¿Cuál es la suma $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=\frac{\square}{\square}$?

Seguramente tu respuesta es $\frac{7x}{6}$. Analicemos la respuesta.

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=\frac{3x}{12}+\frac{4x}{12}=\frac{7x}{12}$$

En este caso, el mínimo común denominador es el producto de los denominadores de las fracciones que se suman. Desde luego que el producto de todos los denominadores es múltiplo de cada uno de ellos, y siempre servirá como denominador común. Así por ejemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

De acuerdo con esto, llena los espacios en la suma $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\square}{\square}$.

Tu respuesta debe ser $\frac{x+y}{xy}$, porque $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y}{xy}+\frac{y}{xy}=\frac{x+y}{xy}$

¿Cuál será el común denominador de las fracciones $\frac{2x-5}{x+2}$ ***y*** $\frac{3x+4}{x-2}$?_______.

El común denominador, será e producto de los dos denominadores, esto es:

$$(x+2)(x-2)=x^2-4$$

A veces el común denominador no se ve tan inmediatamente, por ejemplo ¿Cuál es el común denominador de las fracciones $\frac{a}{x^2-5x+6}$ ***y*** $\frac{x}{x^2-9}$?

Si propusiste como respuesta $(x+3)(x-3)(x-2)$, tienes muy claro el proceso de factorización y para qué se usa. Veamos $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ *y* $x^2-9=(x+3)(x-3)$. Luego entonces, el mínimo común denominador es $(x+3)(x-3)(x-2)$. De aquí en adelante, identificaremos al mínimo común denominador con las siglas MCD. Así que encuentra el MCD para las fracciones, que se muestran enseguida y, en cada caso, indica las fracciones equivalentes que tienen el MCD:

$$\frac{3}{2x^2+7x-15} = \frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{\rule{3cm}{0.4pt}}$$

$$\frac{x+1}{2x^2-11x+12} = \frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{\rule{3cm}{0.4pt}}$$

¿Factorizaste primero? Bien, seguramente tu resultado es correcto. Compáralo:

$$\frac{3}{2x^2+7x-15} = \frac{3(x-4)}{(2x-3)(x+5)(x-4)}$$

$$\frac{x+1}{2x^2-11x+12} = \frac{(x+1)(x+5)}{(2x-3)(x-4)(x+5)}$$

Con este modo de obtener el MCD, sumaremos:

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+3} = \frac{x+3}{2x(x+3)}+\frac{2x}{2x(x+3)} = \frac{3x+3}{2x(x+3)}$$

¿Cuál es el resultado de sumar $1+\frac{1}{x}=$?

Muy bien si tu resultado es $\frac{x+1}{x}$, es correcto, porque $1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$. Efectúa las siguientes sumas:

1) $\frac{3}{a+b}+\frac{2}{a}=$

2) $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{x+3}{x-2}=$

3) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{x}=$

4) $\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{2x}{x+2}=$

Revisa tus respuestas:

1) $\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{2}{a}=\dfrac{3a}{a(a+b)}+\dfrac{2(a+b)}{a(a+b)}=\dfrac{5a+2b}{a(a+b)}$

2) $\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{3x^2+8}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{3x^2+8}{x^2-4}$

3) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3y}{xy}+\dfrac{2x}{xy}-\dfrac{y}{xy}=\dfrac{3y+2x-y}{xy}=\dfrac{2x+2y}{xy}$

4) $\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{-2x^2+5x+1}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{-2x^2+5x+1}{x^2-4}$

Como ves, este tipo de operaciones dependen mucho de tu capacidad para factorizar y de encontrar el MCD. De hecho, para encontrar el MCD de un conjunto de fracciones, debes:

a) Factorizar completamente cada denominador
b) Formar el MCD como el producto de todos los diferentes factores. El exponente de cada factor habrá de ser el más alto que esté asociado con el factor en los distintos denominadores.

Por ejemplo $\dfrac{x}{12}+\dfrac{x}{18}=\dfrac{x}{2^2\cdot 3}+\dfrac{x}{2\cdot 3^2}=\dfrac{3x}{2^2\cdot 3^2}+\dfrac{2x}{2^2\cdot 3^2}=\dfrac{5x}{36}$. Encuentra el MCD de las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{3x}{x^2-4};\dfrac{7}{x^2-4x+4};\dfrac{5x}{x^2+2x}$

2) $\dfrac{2x}{x^2-4};\dfrac{3}{x^2-5x+6}$

3) $\dfrac{3}{x^2+2x+1};\dfrac{5x+1}{x^2+3x+2}$

Compara tus respuestas:

1) $MCD=x(x-2)^2(x+2)$

2) $MCD=(x-3)(x-2)(x+2)$

3) $MCD=(x+1)^2(x+2)$

Con estas ideas, efectúa la suma $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{\square}{\square}$

Si tu respuesta es $\frac{3x}{(x-1)(x+1)}$, es un gran avance. Veamos porqué:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}+\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}+\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1+x-1+x}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)}=\frac{3x}{x^2-1}$$

Ahora efectúa la resta $\frac{-x^2+x}{x^2+3x-10}-\frac{-x-2}{x+5}=\frac{\square}{\square}$ (no olvides que la resta se logra sumando el inverso aditivo del sustraendo)

Veamos:

$$\frac{-x^2+x}{x^2+3x-10}-\frac{-x-2}{x+5}=\frac{-x^2+x}{(x+5)(x-2)}+\frac{x+2}{x+5}=\frac{-x^2+x+(x+2)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$$

$$=\frac{-x^2+x+x^2-4}{(x+5)(x-2)}=\frac{x-4}{(x+5)(x-2)}$$

Actividades de aprendizaje

En los incisos 1 a 3, convierte la fracción en una equivalente cuyo denominador sea la expresión que aparece a la derecha de cada ejercicio.

1) $\frac{x-2}{x-1};(x-1)(x+2)$

2) $\frac{x+3}{2x-1};(2x-1)(x-3)$

3) $\frac{2x-y}{3x+y};3x^2-5xy-2y^2$

En los incisos 3 y 4 encuentra el MCD de los denominadores y escríbelos como un conjunto equivalente.

4) $\frac{2}{x-4};\frac{3x}{x+4};\frac{x^2}{x^2-16}$

5) $\frac{1}{(x-2)^2};\frac{2}{x^2-4};\frac{3}{x+2}$

Efectúa las siguientes sumas:

6) $\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{b^2}{a(a+b)}=$

7) $\dfrac{s}{r}+\dfrac{s}{r-s}-\dfrac{2rs-r^2}{(r-s)r}=$

8) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{3-2x}{2x-1}+\dfrac{1}{x(2x-1)}=$

9) $\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{x(x+2)}-\dfrac{4x}{x(x^2-4)}=$

10) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2x^2+1}{x(x^2-1)}=$

11) El resultado de $\dfrac{2}{a-5}+\dfrac{3a}{a^2-25}$ es

a) $\dfrac{10-a}{a^2-25}$

b) $\dfrac{5a+10}{a^2-25}$

c) $\dfrac{3a+2}{a^2+a-30}$

d) $\dfrac{3a^2+15a+2}{a-5}$

12) La forma más simple en que se puede expresar el resultado de la expresión $\dfrac{\frac{2}{b^2}-\frac{b}{4}}{b^2+2b+4}$ es

a) $-\dfrac{b-2}{4b^2}$

b) $\dfrac{-b+10}{4b^2(b+2)^2}$

c) $\dfrac{8-3b}{b^2+2b+4}$

d) $\dfrac{b^2+5b+4}{b-5}$