Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

CVE 41

sep

Matemáticas IV
Cuarto semestre

sep

PREPARATORIA

abierta

sep

Preparatoria Abierta

Matemáticas IV

Cuarto semestre

ISBN 970-18-0600-X

9 789701 806005

El contenido académico de este texto es exclusiva responsabilidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y su índice pertenece al programa correspondiente al plan de estudios del nivel medio superior, para la materia de:

MATEMATICA
UNIDADES XIII – XVI

AUTORES: Humberto Cantú Salinas,
Moisés Galicia Arrambide,
Héctor Paz Estrada.

REVISO: Jaime Navarro Cuevas.

COMITE ACADEMICO: Gustavo Mendoza González,
Humberto Cantú Salinas,
Roberto García Martínez,
Moisés Galicia Arrambide,
Héctor Paz Estrada.

COLABORO: Andrés Ramírez y Villa.

La educación es una responsabilidad compartida y en consecuencia invitamos atentamente a toda persona interesada en colaborar para resolver la problemática educativa, a que remita sus comentarios, críticas y sugerencias con respecto a esta obra a la Dirección General del Bachillerato de la SEP.

Sus aportaciones serán apreciadas en todo lo que valen y permitirán perfeccionar y adecuar permanentemente estos materiales a las cambiantes condiciones de la época actual.

ISBN 970-18-0600-X

Indice

Prólogo

Es interesante hacer notar que un número real tiene muchas y muy variadas interpretaciones. Puede representar la distancia entre dos semáforos, el tiempo transcurrido entre la salida y puesta del sol, así como el área de un círculo, si en cada caso el número se acompaña de la unidad de medida, la cual puede ser de tiempo, longitud o área, etc.

Existe una relación entre el número real usado para representar el área de un círculo y el número real asignado a la longitud de su radio. Ejemplos de este tipo nos conducen a la idea de "**Relación**" de la cual la "**Función**" es un caso especial.

Aunque en el ejemplo se menciona una asociación entre números reales, podemos generalizar y considerar asociaciones entre elementos de dos conjuntos cualesquiera.

Si **A** es el conjunto de automóviles registrado en un municipio determinado y **B** el conjunto de números de registro, entonces cada carro en **A** está asociado a un número en **B**. También con cada automovilista registrado está asociado el número de licencia del conductor o con cada individuo, sus huellas digitales, etc.

Nuestro objetivo fue abstraer de estos ejemplos un concepto que fue estudiado por sí mismo, sin referencia a una aplicación específica, y en donde se estableció un tipo de asociación entre los elementos de dos conjuntos **A** y **B**, donde **A** y **B** son conjuntos de números reales. En particular estudiaremos funciones exponenciales, logarítmicas y circulares.

Debemos tomar en cuenta que existe otro tipo de funciones como las hiperbólicas, las de Bessel, las de Legendre, etc., que desde **un punto de vista** más amplio o sea de Matemática Superior, se pueden clasificar como algebraicas y trascendentes, citando entre estas últimas las circulares, con las cuales vamos a iniciar esta parte del curso.

A medida que vaya avanzando en Matemática, su repertorio de funciones conocidas será mayor, así como el conocimiento de sus propiedades y aplicaciones.

Una de las características importantes del concepto de función está en su clasificación de tal manera que podamos derivar teoremas válidos para todas las funciones de una clase particular. Entonces en el futuro, cuando conozca una nueva función de esa clase, no necesitará invertir horas, días, semanas, meses o aun años, para llegar a familiarizarse con ella; porque ya conoce las propiedades de esa familia.

A pesar de sus variadas aplicaciones, la idea de función es en sí misma, extraordinariamente simple como podrá comprobarlo al seguir estudiando Matemática.

HISTORIA

Tales de Mileto vivió durante la primera mitad del siglo VI antes de Cristo, y se dice que la primera parte de su vida transcurrió siendo él mercader y amasó una fortuna tan grande que tuvo oportunidad de pasar el resto de su vida en viajes y estudio. A él se le acredita el haber descubierto una forma de encontrar la altura de la gran Pirámide de Egipto. Dijo haber puesto en el suelo una estaca y esperar hasta que la longitud de la sombra de la estaca y la estaca fueran iguales. En este momento Tales razonó, la longitud de la sombra de la pirámide sería igual a la altura de la pirámide y fue así que pudo determinar la altura de ésta, por medio de este proceso de medición indirecta.

Muchos historiadores pretenden que la **Geometría Demostrativa** se inició con Tales de Mileto y a él se le reconoce el mérito de haber logrado gran número de descubrimientos elementales como estos:

Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
Un ángulo inscrito en un semicírculo, es un ángulo recto.
Cualquier diámetro de un círculo, biseca ese círculo.

Instrucción para el alumno

El presente texto ha sido elaborado tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan a los alumnos de Sistemas Abiertos de Enseñanza.

El texto ha sido estructurado de tal forma que le facilite al máximo su estudio. Cuenta con varias unidades, cada una de las cuales contiene:

1) **Objetivos generales:** que le informan acerca de lo que se pretende lograr con el estudio de dicha unidad.
2) **Una introducción:** independientemente de la que aparece dedicada al texto.
3) **Un glosario:** que le indica el significado de los términos técnicos empleados en el desarrollo de la unidad.
4) **Notación:** en los textos referentes a las ciencias naturales y formales, tales como la Matemática, se encontrarán explicaciones relacionadas con la simbología empleada (fórmulas, tablas, símbolos, etc.).

Para el estudio del curso la unidad se ha dividido en partes llamadas módulos. Cada texto consta siempre de 16 módulos. De esta manera, estimamos que es posible aprobar las asignaturas del plan de estudios de un semestre, en las 18 semanas. El módulo de cada asignatura está programado para que lo estudie en un tiempo promedio de 3 a 4:30 horas por semana. Sin embargo, se le recomienda que dedique a cada módulo, el tiempo que usted considere necesario, de acuerdo con sus posibilidades.

El **módulo** cuenta con:

1) **Objetivos específicos:** que desglosan el objetivo general de la unidad.
2) **Esquema-resumen:** donde se le presenta el contenido de cada módulo, en forma sinóptica.
3) **Contenido:** se refiere al desarrollo del tema o de los temas.
4) **Actividades complementarias:** le servirán de refuerzo en el aprendizaje de una unidad o un módulo específico.
5) **Reactivos de autoevaluación:** al final de cada módulo, se le dan una serie de preguntas de autocomprobación, para que pueda verificar por sí mismo, en qué grado ha logrado los objetivos

(propuestos al principio del módulo). Las respuestas correctas las encontrará al final de cada unidad o, en otros casos, al final del libro.

En la parte final del libro, podrá encontrar, cuando se estime necesario, apéndices que le ayudarán a la ampliación y profundización de algún tema.

Además, se le da en las unidades o al final del texto, una bibliografía con la que puede complementar sus estudios o ampliar su horizonte cultural, de acuerdo con sus inquietudes.

ADVERTENCIA:

Le recomendamos la lectura cuidadosa y la comprensión de los objetivos específicos al empezar cada módulo, para que tenga presente lo que se espera de usted, con el trabajo que realice con cada uno de ellos.

UNIDAD XIII

FUNCIONES CIRCULARES

Introducción

En los cuatro módulos que comprende la presente unidad, se presenta el concepto de circunferencia unitaria y las funciones circulares de un ángulo.

Además se inicia el estudio de las identidades trigonométricas fundamentales y su empleo en las expresiones matemáticas.

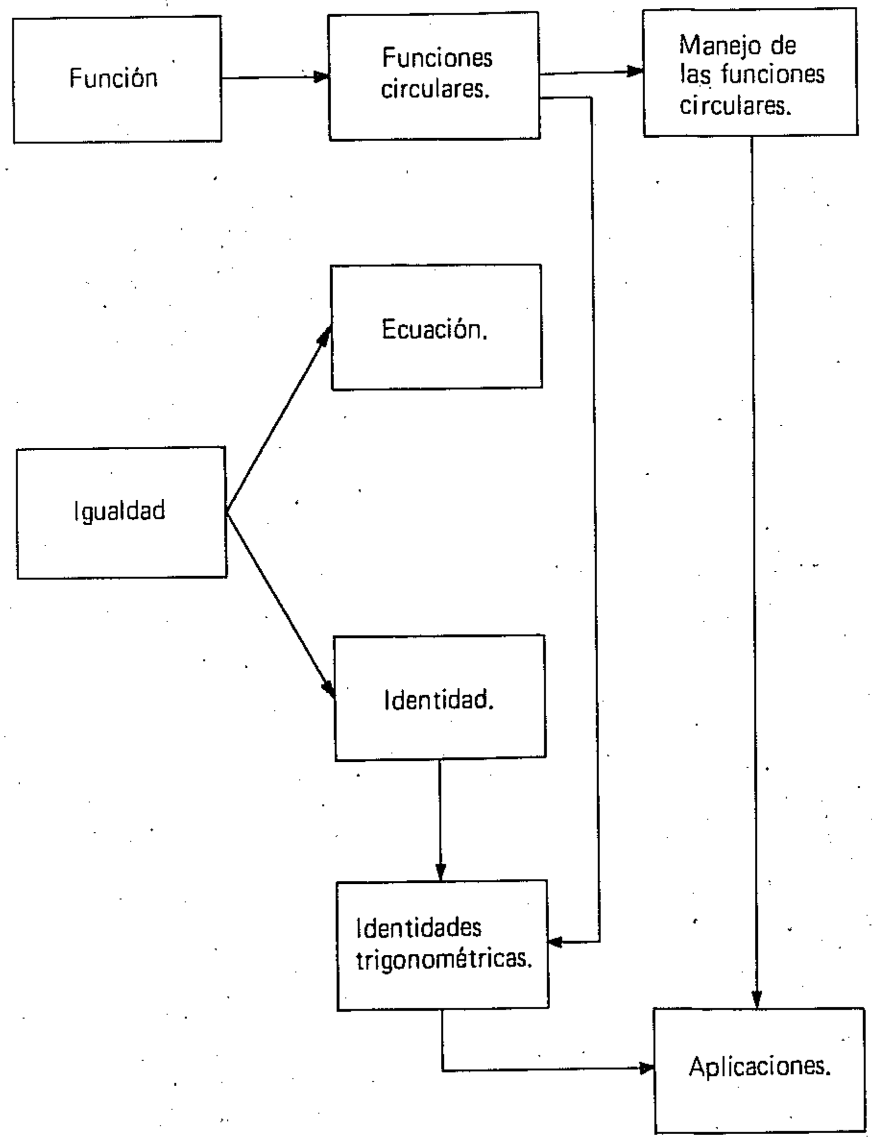
Hemos considerado de gran importancia, que el alumno aprenda a graficar las funciones circulares así como hallar su valor para un cierto ángulo y la interpretación de su signo dependiendo del cuadrante en donde se localice.

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Manejará el concepto de circunferencia unitaria.
2. Determinará las funciones circulares de un ángulo dado.
3. Construirá gráficas de funciones circulares.
4. Describirá las propiedades de las funciones circulares a partir de su gráfica.
5. Justificará la validez de expresiones matemáticas utilizando las identidades trigonométricas fundamentales.

Diagrama temático estructural



Glosario

Trigonometría: Rama de la matemática que estudia las propiedades y aplicaciones de las funciones circulares o trigonométricas.

Distancia entre dos puntos: Si $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$

Son dos puntos cualesquiera la distancia **d** entre ellos está dada por:

$$d = P_1 P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Circunferencia Unitaria: Circunferencia con centro en el origen y radio 1, definida por el conjunto

$$\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Función Circular: La función $P: \theta \longrightarrow P(\theta)$ cuyo recorrido es el conjunto de todos los puntos o pares ordenados $\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$

Función Seno: Sen: $\theta \longrightarrow y$ donde y es la ordenada de $P(\theta)$ o sea $y = \text{sen}\ \theta$

Función Coseno: Cos: $\theta \longrightarrow x$ donde x es la abscisa de $P(\theta)$ o sea $x = \cos\theta$

Función Tangente: Si el punto terminal $P(\theta)$ tiene las coordenadas rectangulares (x, y) entonces

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Gráfica de una Función: Empleo de un sistema rectangular de coordenadas para mostrar la asociación entre dos variables cualesquiera (x, y) en el caso de una función particular.

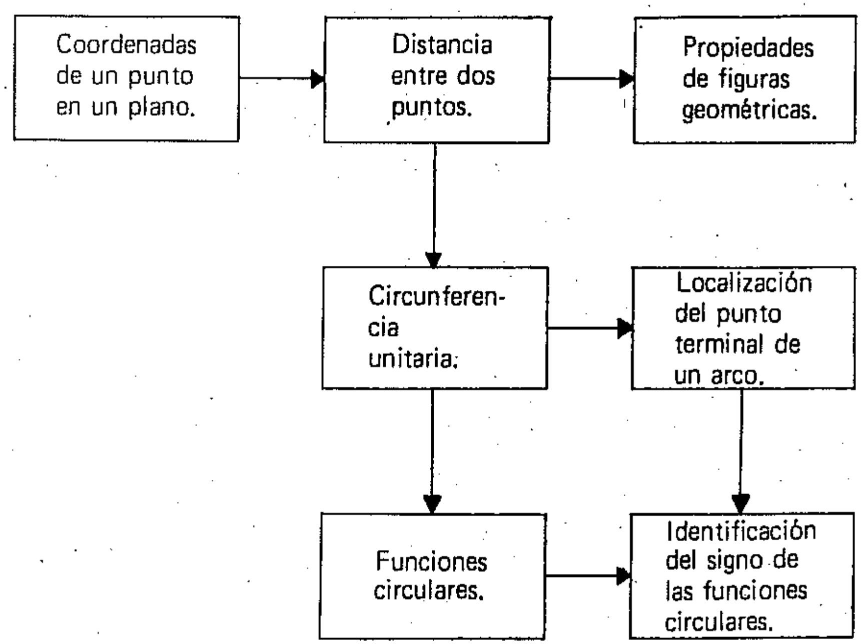
Módulo 1

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Calculará la distancia entre dos puntos, dadas sus coordenadas.
2. Explicará el concepto de circunferencia unitaria.
3. Demostrará algunas propiedades de figuras geométricas dadas, aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos.
4. Localizará sobre la circunferencia unitaria el punto terminal de un arco de longitud dada.
5. Identificará el signo de las funciones circulares en cada uno de los cuatro cuadrantes.

ESQUEMA – RESUMEN



1.1 LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA.

¿Qué significa trigonometría?

¿Qué es la Trigonometría? Trigonometría significa "**medición del triángulo**" y los antecedentes históricos de su estudio surgieron de la necesidad de medir y delimitar tierras. Estudiaremos seis funciones trigonométricas que llegaron a tener muchas otras aplicaciones, y en la Matemática avanzada, de la que forma parte el cálculo, apenas se les reconoce que estén relacionadas con el triángulo.

El dominio de las funciones trigonométricas es. . .

Con excepción de la Geometría, los ángulos tienen escasa importancia en la Matemática y las **funciones trigonométricas** que tienen un conjunto de ángulos como dominio, se reemplazan por las **funciones circulares** que tienen como dominio al conjunto de los números reales. Actualmente la Trigonometría es el estudio de las funciones circulares que son funciones de números reales, sobre números reales. La razón para llamarlas **circulares** se hará evidente a medida que progrese en el estudio de este libro, y para que pueda iniciar ese estudio, es necesario obtener la fórmula para la distancia entre dos puntos, cuyas coordenadas rectangulares se conocen, así como la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen de un plano cartesiano, ya que estos dos conceptos le serán de mucha utilidad.

1.1.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

¿Por qué se necesita conocer la distancia entre dos puntos?

Tomemos dos puntos cualquiera en el plano cartesiano $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ (y el segmento que los une); para localizar estos puntos en el plano hemos utilizado la misma escala en ambos ejes de coordenadas (ver Figura 1).

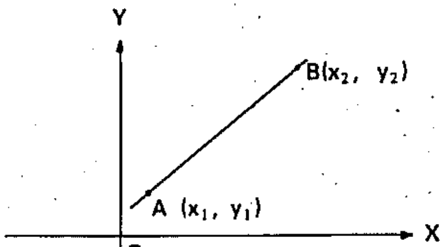


Figura 1

Tracemos un segmento de recta paralelo al eje **X** y que pase por **A** (ver Figura 2).

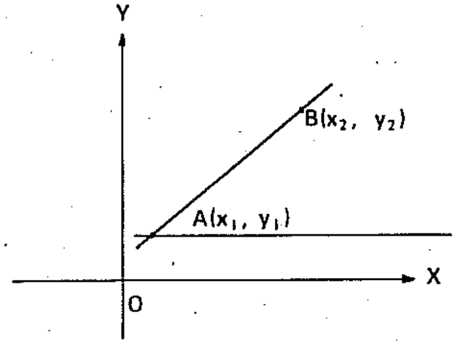


Figura 2

Después, tracemos otro segmento de recta, paralelo al eje **Y** y que pase por **B** (ver Figura 3).

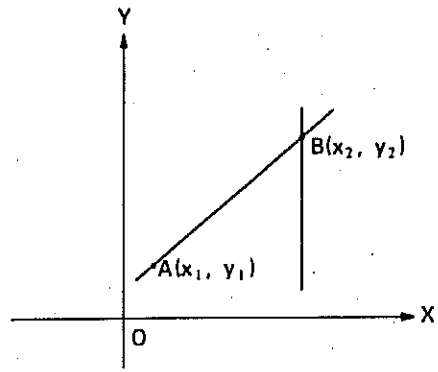


Figura 3

Si superponemos las dos figuras anteriores tendremos la siguiente figura, en la que podemos ver que las dos rectas que trazamos paralelas a los ejes por los puntos **A** y **B**, se intersectan en **D** formando un ángulo recto cuyas coordenadas son (x_2, y_1).

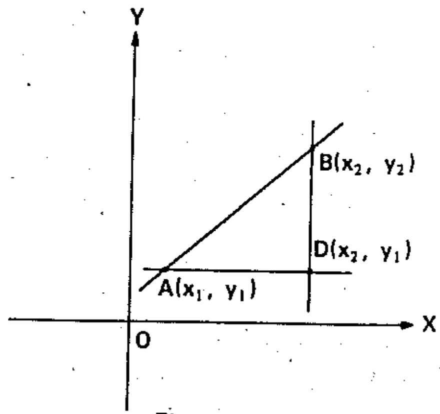


Figura 4

La figura que se ha formado es un triángulo rectángulo con catetos **AD** y **BD** e hipotenusa **AB**; podemos usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la distancia **AB** que es la que nos interesa. Encontramos primero las distancias **AD** y **BD** que son los catetos del triángulo rectángulo; puesto que **B** y **D** tienen la misma abscisa, la distancia de **B** a **D** será:

$$BD = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} \quad ó \quad BD = |y_2 - y_1|$$

y puesto que **A** y **D** tienen la misma ordenada, la distancia de **A** a **D** será:

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} \quad ó \quad AD = |x_2 - x_1|$$

Recordemos ahora el Teorema de Pitágoras que aplicado al triángulo de la figura dice:

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$

Si sustituimos **AD** y **BD** en la expresión anterior, se tiene:

$$(AB)^2 = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2}\right]^2 + \left[\sqrt{(y_2 - y_1)^2}\right]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y puesto que

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad y \quad (y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$$

AD significa la distancia del punto A al punto B.

también se puede escribir:

$$(AB)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Orden de las diferencias de abscisas y ordenadas.

Como puede verse, no importa en qué orden se tomen las diferencias de las abscisas y la diferencia de las ordenadas, la distancia **AB** es la misma. A esta expresión se acostumbra escribirla de la siguiente manera:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1)}$$

y se conoce como fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Ejemplo 1. Encontrar la distancia entre los puntos **A (2,3)** y **B (5,7)**.

Solución:

Tomando **A** como punto **1** y **B** como punto **2** tenemos:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

invirtiendo el orden de los puntos se tiene:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-5)^2 + (3-7)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Como se puede ver, ambos resultados son iguales.

Ejemplo 2. Encontrar la distancia entre los puntos A $(-3, -2)$ y B $(4, 6)$.

Solución:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[4-(-3)]^2 + [6-(-2)]^2} \\ &= \sqrt{(4+3)^2 + (6+2)^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{49 + 64} \\ &= \sqrt{113} \end{aligned}$$

Tomados en otro orden:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3-4)^2 + (-2-6)^2} \\ &= \sqrt{(-7)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{49 + 64} \\ &= \sqrt{113} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Encontrar la distancia entre los puntos A$(5, -2)$ y B$(-4, 7)$

Solución:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-4-5)^2 + [7-(-2)]^2} \\ &= \sqrt{(-4-5)^2 + (7+2)^2} \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (9)^2} \\ &= \sqrt{81 + 81} \\ &= \sqrt{162} \\ &= 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tomados en otro orden:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[5-(-4)]^2 + (-2-7)^2} \\ &= \sqrt{(5+4)^2 + (-2-7)^2} \\ &= \sqrt{9^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{81 + 81} \\ &= \sqrt{162} \\ &= 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Encontrar la distancia del origen O $(0, 0)$ a un punto cualquiera P (x, y).

Solución:

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son A$(5, 5)$, B$(2,1)$ y $(-2, 4)$ es isósceles. (Figura 5).

Solución:

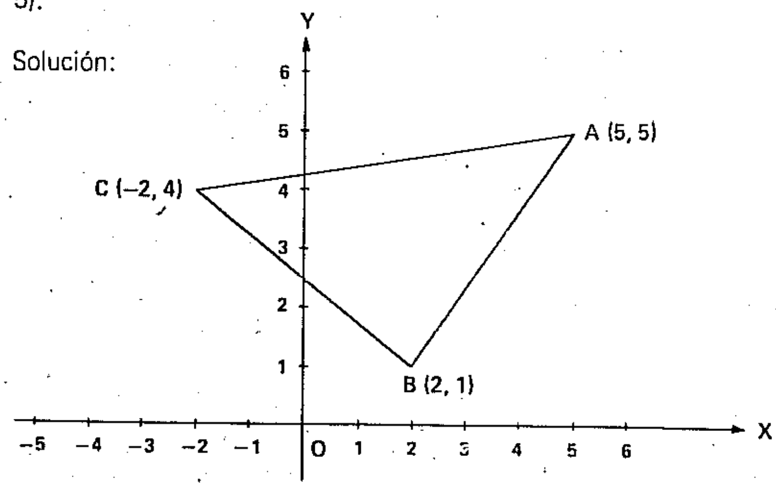


Figura 5

$$AC = \sqrt{[5-(-2)]^2 + (5-4)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 1}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$
$$BC = \sqrt{[2-(-2)]^2 + (1-4)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 9}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

puesto que **AB** y **BC** son iguales el triángulo **ABC** es isósceles.

1.1.2 CIRCUNFERENCIA UNITARIA.

Un conjunto de puntos es. . .

Una curva es un conjunto de puntos que satisfacen una cierta condición y viceversa, todo punto que satisface dicha condición pertenece a la curva.

> **Definición:**
> La circunferencia es el conjunto de puntos del plano que están a una misma distancia (radio) de un punto fijo llamado centro.

Circunferencia unitaria.

La circunferencia que nos interesa es conocida como **unitaria**, y como su nombre lo indica, su radio es igual a uno, por conveniencia el centro lo consideramos en el origen de los ejes coordenados.

Empleo de la fórmula para la distancia entre dos puntos.

Si usamos la fórmula que hemos deducido para la distancia entre dos puntos, podemos obtener la ecuación* de la **circunferencia unitaria.**

Tomemos el centro como el punto **O (0, 0)** y el radio como 1 (Figura 6).

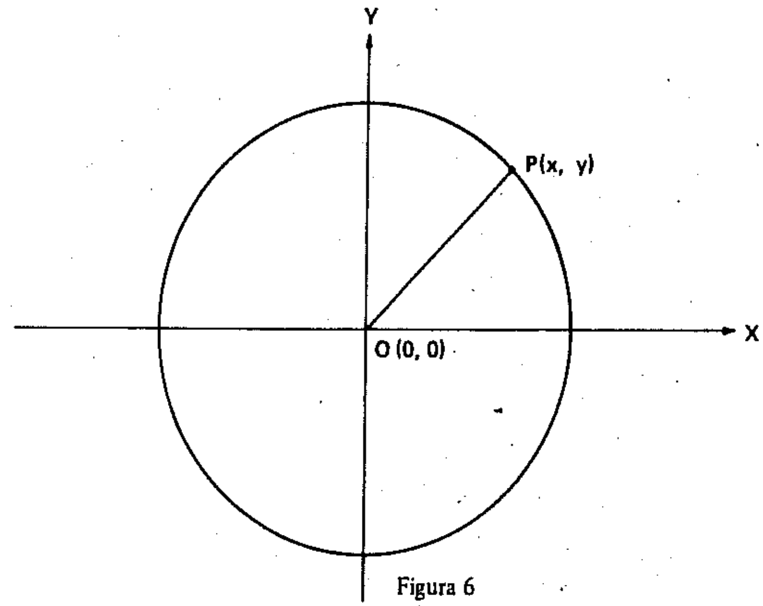


Figura 6

Entonces, la condición que debe satisfacer cualquier punto **P(x, y)** que pertenezca a la circunferencia es

$$OP = 1$$

pero como $OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ por la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos que

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$$

Ecuación de la circunferencia unitaria.

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y simplificando, obtenemos finalmente

$$x^2 + y^2 = 1$$

* Ecuación, es una igualdad que es verdadera para las coordenadas de todos los puntos de la curva que representa.

que es la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen. (Esta ecuación representa la condición que deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos que pertenecen a la circunferencia).

Si usamos la notación de conjuntos, el conjunto

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

representa la circunferencia unitaria con centro en el origen de los ejes coordenados.

1.2 FUNCIONES CIRCULARES.

Un punto P describe un arco de circunferencia.

Consideremos una circunferencia unitaria con centro en el origen **O** de un sistema de coordenadas rectangulares y un punto **P** que puede desplazarse sobre la circunferencia, iniciando cada desplazamiento en el punto **A(1, 0)**; en cada desplazamiento el punto **P** describe un arco de circunferencia, cada uno de estos arcos tiene una longitud α, $(\alpha \in R)$. Representaremos por α tanto al arco como a su longitud. Si un arco, o su longitud se indica mediante un número real, está convenido que este número es positivo si el punto **P** se mueve en el sentido anti-horario (contrario al de las manecillas de un reloj). (Ver Figura 7).

Un arco o longitud se indica mediante un número real.

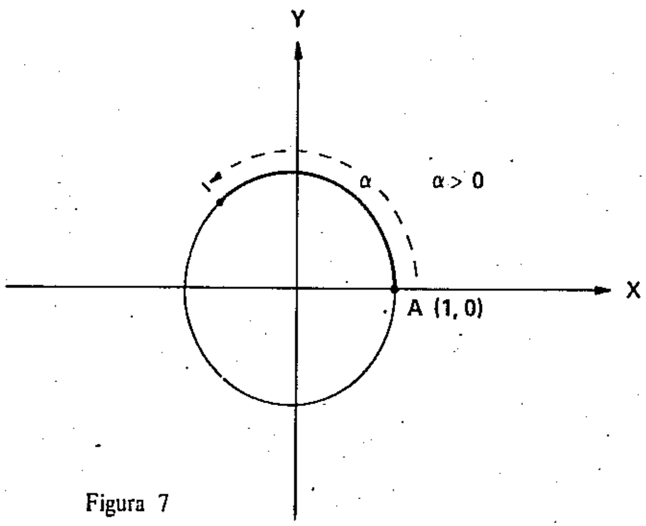


Figura 7

El arco o su longitud se indica con un número real negativo si el punto **P** se mueve en el sentido horario (sentido en el que se mueven las manecillas del reloj). (Ver Figura 8).

¿Qué signo tiene si se mueve contrario a las manecillas del reloj?

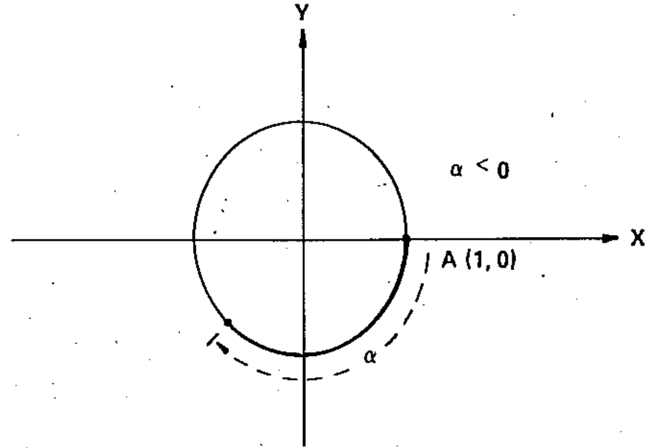


Figura 8

Si el punto **P** no se desplaza ni en sentido positivo ni en sentido negativo, debemos pensar en él como un arco de longitud cero. (Ver Figura 9).

Es un arco de longitud cero cuando. . .

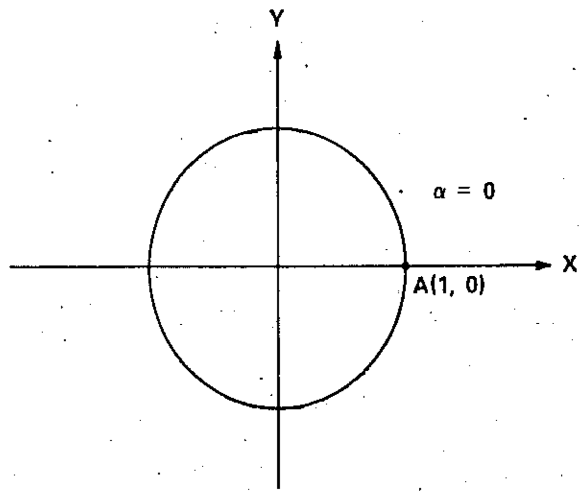


Figura 9

La longitud de una circunferencia es. . .

La longitud de una circunferencia está dada por la expresión $C = 2\pi r$, donde "r" es la medida del radio correspondiente; esta expresión nos permite determinar la longitud de la circunferencia unitaria sustituyendo en ella a "r" por **1**.

$$C = 2\pi \cdot 1 \text{ unidades}$$

$$C = 2\pi \text{ unidades}$$

Longitud de una circunferencia unitaria.

Siendo 2π unidades la longitud de la circunferencia unitaria, un arco de longitud $|\alpha| > 2\pi$ $(\alpha > 2\pi$ ó $\alpha < -2\pi)$ se genera cuando **P** después de recorrer las 2π unidades de la circunferencia continúa su movimiento hasta completar las α unidades en el único punto terminal correspondiente a α. (Ver Figura 10).

Cada arco (α) en la circunferencia unitaria tiene un punto terminal; designémoslo por $P(\alpha)$, (P de alfa). (Ver Figura 11).

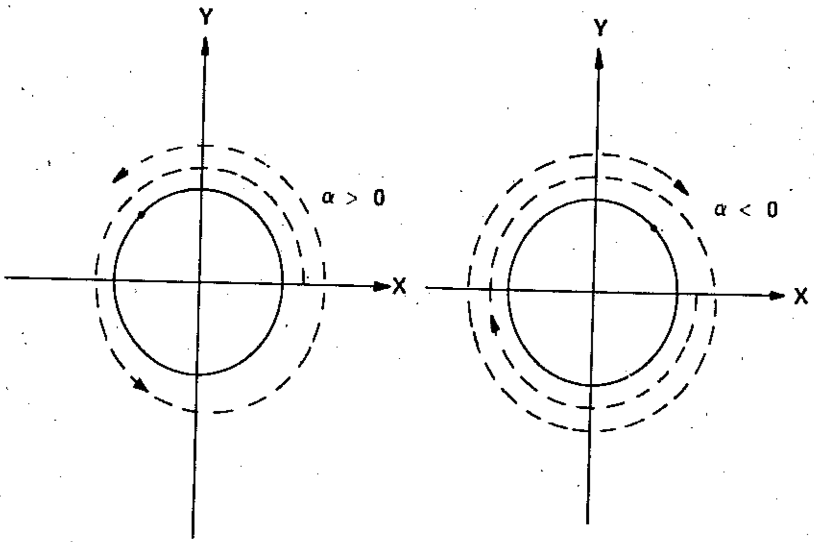


Figura 10

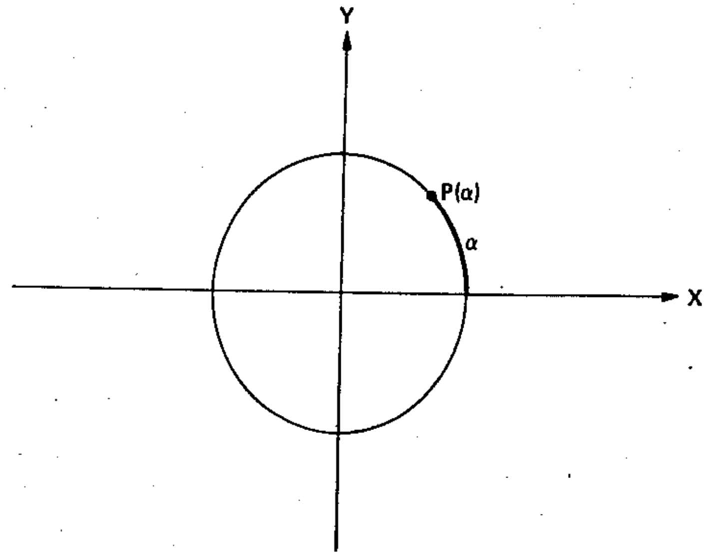


Figura 11

Habrá notado que dicho punto se simboliza de la misma manera que hizo con un elemento del contradominio de una función, y eso es precisamente lo que representa.

A cada punto terminal lo podemos asociar con un número real.

Cada arco tiene un punto terminal y cada arco se representa por un único número real; entonces a cada número real le podemos asociar el único punto terminal del arco correspondiente, generando así una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales $(\alpha \in R)$, y su contradominio el conjunto de puntos en la circunferencia unitaria $[P(\alpha)]$. Con esto, estamos estableciendo dos formas distintas de representar a los puntos de la circunferencia unitaria: a) mediante un par ordenado (x, y) que nos indica su posición respecto a los ejes coordenados, b) por la notación funcional $P(\alpha)$ que ubica cada punto indicando que su distancia a $(1, 0)$ (medida sobre la circunferencia es) $|\alpha|$. Esto lo podemos resumir mediante la igualdad $P(\alpha) = (x, y)$.

Establecemos dos formas distintas de representar los puntos de la circunferencia.

1.2.1 LOCALIZAR PUNTOS EN C.

π es un número irracional y no tiene representación

π es un número irracional.

decimal exacta; en aplicaciones prácticas se acostumbra representarlo por alguna "aproximación" racional, es decir por un número racional "próximo" a π. Dicho número racional depende de la exactitud requerida en cada aplicación, así, en ocasiones π = **3.1416**, otras **3.14**, otras $\frac{22}{7}$ Sea cual sea el número racional utilizado, debe quedarnos claro que la única manera de representar exactamente este número es mediante el símbolo π; cualquiera otra representación numérica del mismo es sólo una "aproximación".

Ejemplo 1: localizar en qué cuadrante se encuentra el punto terminal del arco con longitud $\alpha = 2$, o sea **P(2)**, (**P** de dos).

Solución: antes que nada debemos recordar que la longitud de la circunferencia unitaria es **C** = 2π (Ver Figura 12).

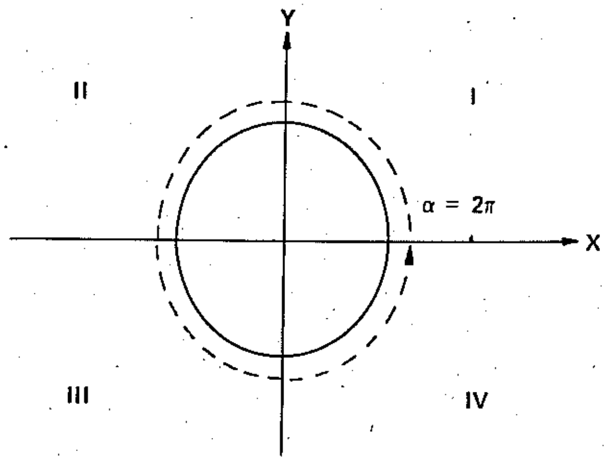


Figura 12

Ahora bien, los ejes coordenados dividen la circunferencia en cuatro partes iguales por lo que la medida del arco de circunferencia en cada cuadrante es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (Ver Figura 13).

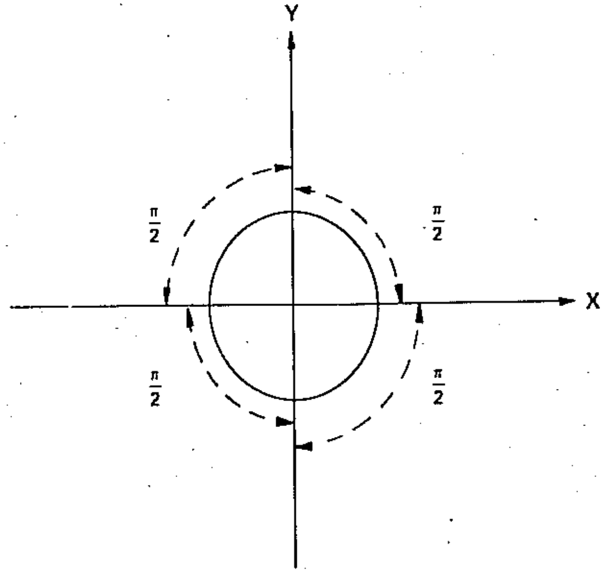


Figura 13

Y estos puntos terminales sobre los ejes coordenados son los indicados en la siguiente figura:

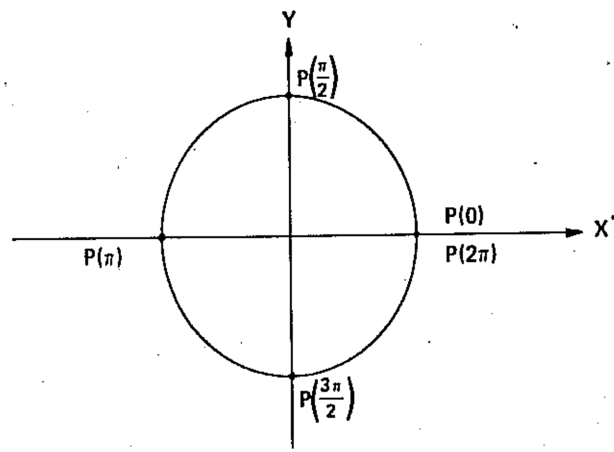


Figura 14

Si $\pi = 3.1416$, $\frac{\pi}{2} = 1.5708$ y como $1.5708 < 2 < 3.1416$ el punto **P(2)** es un punto en el segundo cuadrante (Ver Figura 15). También si dividimos **2** entre $\frac{\pi}{2} = 1.5708$ tenemos que $2 = 1 \times 1.5708 + 0.4292$.

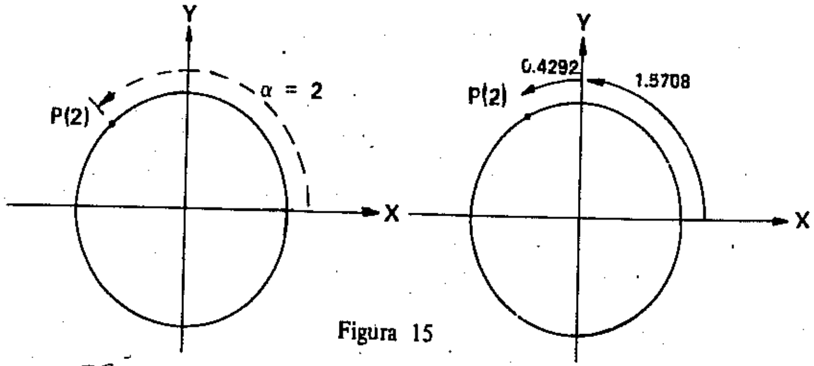


Figura 15

Ejemplo 2: localizar el punto $P(\frac{-5\pi}{4})$

Solución: en este caso el punto **P** se mueve en el mismo sentido que lo hacen las manecillas del reloj, ya que el número es negativo. Para localizar el punto $P(\frac{-5\pi}{4})$ observe que $\frac{5\pi}{4} = 5 \cdot \frac{\pi}{4}$, o sea cinco veces $\frac{\pi}{4}$; también π es la medida de una semicircunferencia, luego cada una de las semicircunferencias se divide en cuatro partes iguales y a partir de **A (1,0)** contamos 5 de ellas para llegar a $P(-\frac{5\pi}{4})$. (Ver Figura 16).

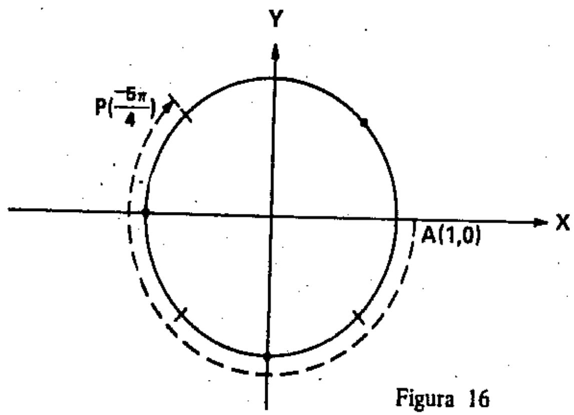


Figura 16

1.3 DEFINICION DE SENO Y COSENO

Un par ordenado define al punto terminal.

Con cada $\alpha \in R$, está asociado un punto terminal $P(\alpha)$ en la circunferencia unitaria; cada punto terminal está definido por un único par ordenado con componentes reales **(x, y)**. Si a cada α (número real) se le asocia la única "**x**" (abscisa) del punto terminal del arco correspondiente se genera una función llamada coseno (cos), que tiene como dominio al conjunto de los números reales y como contradominio al conjunto de las "**x**" de los puntos en la circunferencia unitaria; estas "**x**" (abscisas) indican la separación entre cada punto de la circunferencia y el eje vertical, siendo la longitud del radio igual a **1** ($r = 1$) es fácil comprender que los puntos de la circunferencia más alejados del eje "**Y**" (vertical), puntos **A(1, 0)** y **E(−1, 0)**, están a una unidad del mismo, de ahí que el contradominio de esta función sea $\{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\}$ (Ver Figura 17).

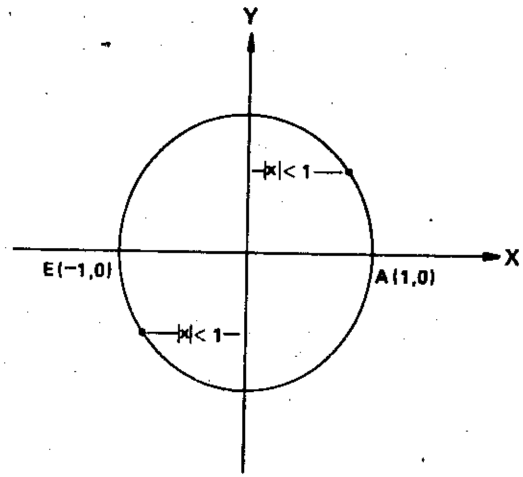


Figura 17

Función coseno.

Un elemento del contradominio de una función, se puede representar mediante un símbolo que combina el nombre de la función con su correspondiente elemento del dominio; así, si **f** es el nombre de la función, y α un elemento del dominio "$f(\alpha)$" (efe de alfa) es el elemento del contradominio asociado con α. Dado que coseno se abrevia "cos" y que α representa a cualquier elemento del dominio de esta función, entonces "cos (α)" (coseno de alfa) es el elemento del contradominio asociado con α.

> Definición: Si $P(\alpha) = (x, y)$ es un punto de la circunferencia unitaria
> $x = \cos(\alpha) \quad \alpha \in R \qquad -1 \le \cos(\alpha) \le 1$
> es la ecuación que define a la función coseno.

En la práctica se presciende del paréntesis que contiene a la variable del dominio quedando

$$x = \cos\alpha \quad , \quad \alpha \in R \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

si el arco o su longitud está precedido de signo negativo es necesario escribirlo dentro del paréntesis.

Función seno.

Si ahora, a cada número real α, se le asocia con la "y" (ordenada) del punto terminal que le corresponde, obtenemos la función llamada Seno (sen) cuyo dominio es también el conjunto de los números reales (**R**) y su contra dominio está constituido por las "y" (ordenadas) de los puntos en la circunferencia unitaria, para esta función; si α es un elemento del dominio, "sen α," (seno de alfa) es su correspondiente elemento en el contradominio.

> Definición: Si $P(\alpha) = (x, y)$ es un punto de la circunferencia unitaria
> $y = \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \alpha \in R$
> es la ecuación que define a la función seno.

De la figura 18 podemos notar que los valores de **y** varían desde **1** en el punto **D** hasta **1** en el punto **B**.

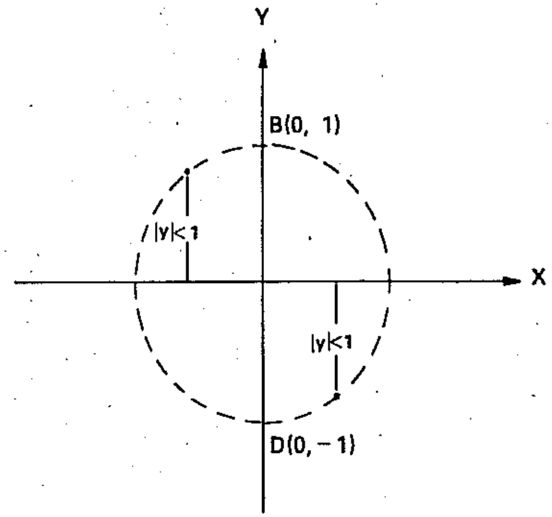


Figura 18

o sea que $-1 \le y \le 1$ ó $-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$

Y la función tangente es...

> Definición: Si $P(\alpha) = (x, y)$, es un punto de la circunferencia unitaria $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$
> es la ecuación que define a la función tangente

Como para todo $P(\alpha)$ en la circunferencia unitaria, $x = \cos\alpha$, $y = \operatorname{sen}\alpha$, la ecuación que define a la función tangente puede escribirse también como

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cos\alpha \neq 0}$$

$\operatorname{tg}\alpha$ no está definida cuando $x = 0$ ó $\cos\alpha = 0$, en estos casos decimos que $\operatorname{tg}\alpha$ no existe, ya que la división entre cero no es un número real.

Podemos definir otras tres funciones.

Otras tres funciones circulares llamadas cotangente (cot), secante (sec), y cosecante (csc), son definidas en seguida y al igual que las tres primeras, estas definiciones están dadas en términos de las coordenadas del punto terminal $P(\alpha)$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} \qquad y \neq 0$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{y} \qquad y \neq 0$$

como $\quad x = \cos \alpha \;, \quad y = \operatorname{sen} \alpha$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

Determinación de las funciones recíprocas.

El principio de sustitución nos permite expresar estas igualdades de la siguiente manera:

Si $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$; $\quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ ó $\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ ó $\operatorname{tg} \alpha \; \cot \alpha = 1$

Si $\cos \alpha \neq 0$; $\quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ ó $\cos \alpha \; \sec \alpha = 1$

Si $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$; $\quad \csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ ó $\operatorname{sen} \alpha \; \csc \alpha = 1$

Estas definiciones nos permiten entender por qué a estas funciones se les llaman funciones recíprocas.

1.3.1 SIGNO DE LAS FUNCIONES CIRCULARES EN CADA UNO DE LOS CUATRO CUADRANTES.

En que condiciones las funciones trigonométricas son positivas, negativas o cero.

Considerando que a las funciones circulares las hemos definido en términos de las coordenadas de un punto en el plano cartesiano, es fácil notar que los valores de estas funciones son números reales, negativos, cero o positivos. Esto depende del cuadrante en que se encuentre el punto considerado. Presentamos una tabla con el cuadrante en que está el punto **P(α)** y los signos que corresponden a las funciones seno, coseno y tangente. Los signos de las funciones recíprocas los obtenemos fácilmente si recordamos que un número y su recíproco deben tener el mismo signo para que su producto pueda ser **1**.

Cuadrante en que se localiza P(α)	$\operatorname{sen} \alpha = y$	$\cos \alpha = x$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$
I	+	+	+
II	+	–	–
III	–	–	+
IV	–	+	–

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.–

a) Encontrar la distancia entre los puntos dados.
   1) (5,7) y (3,1)
   2) (–6, 3) y (2, –3)
   3) (–4, –5) y (3, 7)
   4) (–3, 5) y (4, –2)

b) Demostrar que los puntos A(2, –1), B(6, 1) y C(–2, 7) son los vértices de un triángulo rectángulo. ¿Cuál es su área?

c) Demostrar que los puntos A(–1, 6), B(2, 2) y C(3, 3) son los vértices de un triángulo isósceles.

d). Encontrar las longitudes de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son A(–4, 5), B(0; 10), C(4; 1) y D(1, –7).

e) Encontrar las abscisas de los puntos cuya ordenada es **4** y cuya distancia al origen es **10**.

f) Demostrar que los puntos A(1, 1), B(6, 2) y C(–4, 0) están sobre la misma recta.

g) Encontrar las coordenadas del punto sobre el eje **Y** que equidista de los puntos A(–5, 5) y B(5, 10).

h) Considérese una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 1. ¿Por cuál de los siguientes puntos pasa?

$$(1,\ 0),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\ \frac{3}{\sqrt{6}}\right).$$

2.– Localizar aproximadamente los siguientes puntos en la circunferencia unitaria:

a) $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $P\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $P\left(\frac{24\pi}{12}\right)$

e) $P\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

f) $P\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

g) $P\left(\frac{31\pi}{6}\right)$

h) $P\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$

Haciendo π = **3.1416** localizar aproximadamente los siguientes puntos:

i) **P (7)** $X = \frac{7)\cdot(180)}{3.1416}$

j) **P (– 15)**

k) **P (– 5)**

l) **P (32)**

m) **P (– 4)**

n) **P (9)**

o) **P (27)**

3.– En la siguiente tabla, llene los huecos con el signo correspondiente a cada función,

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
Seno												
Coseno												
Tangente												
Cotangente												
Secante												
Cosecante												

4.– Ubique aproximadamente cada uno de los siguientes puntos en la circunferencia unitaria y determine los signos de sus funciones circulares

a) **P (0.5)**

b) **P (3)**

c) **P (3.27)**

d) **P(– 6.33)**

e) **P (– 0.9)**

f) **P (17.32)**

g) **P (– 10.54)**

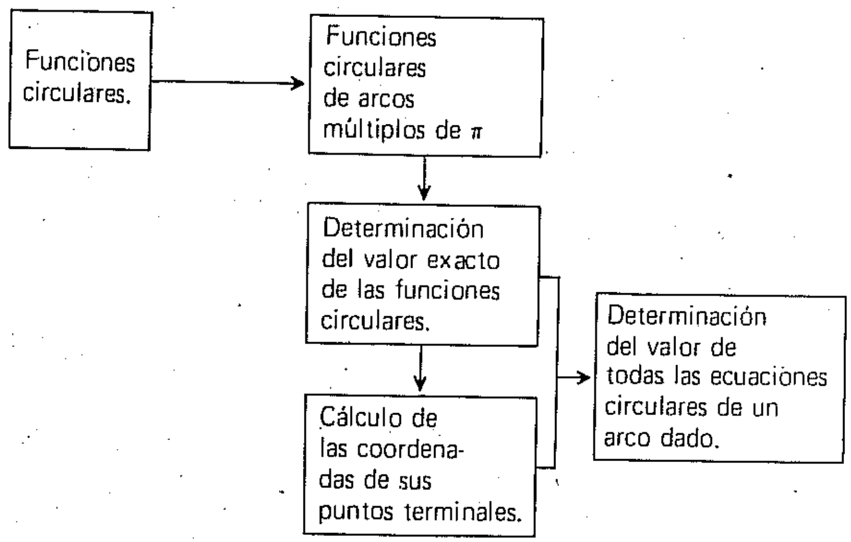
Módulo 2

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Calculará los valores de las funciones circulares de arcos cuadrantales.
2. Calculará las coordenadas de puntos terminales de arcos cuyas longitudes son múltiplos o submúltiplos de π.
3. Determinará el valor exacto de la función de un arco, conocidas las coordenadas correspondientes del punto terminal en la circunferencia unitaria, asociado al arco de longitud dada.
4. Determinará el valor de las seis funciones circulares para el respectivo valor del ángulo, conociendo el punto de intersección de la recta que une el origen con el punto indicado y la circunferencia unitaria.
5. Determinará el valor de las cinco funciones circulares faltantes para un ángulo, conociendo el valor de una de ellas y el cuadrante en que queda localizado el punto terminal.

ESQUEMA – RESUMEN



2.1 VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES PARA LOS NUMEROS REALES $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Para cada número real β se asocia un par de coordenadas.

Antes de establecer asociaciones entre ciertos elementos del dominio (números reales) de las funciones circulares, con los de su contradominio (números reales) es importante que recuerde que para cada número real β existe un par de coordenadas **(x, y)** asociadas al punto terminal del arco β que parte de **A (1, 0)** en la circunferencia unitaria. Por tanto, las coordenadas **x** y **y** son los valores funcionales del número real β; donde $\cos \beta = x$, $\operatorname{sen} \beta = y$. (Ver Figura 1).

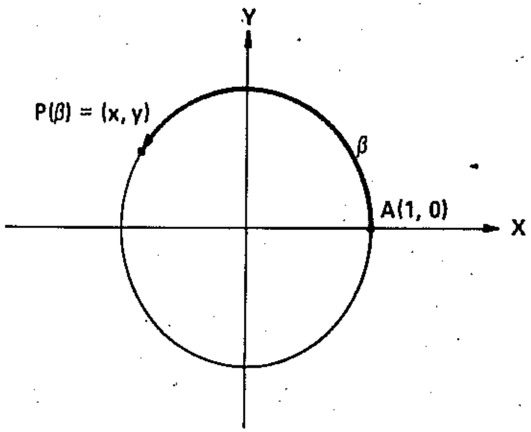


Figura 1

Si el punto terminal coincide con uno de los ejes coordenados. . .

Ahora vamos a calcular los valores de las funciones circulares de **arcos cuadrantales.** Este nombre lo reciben por encontrarse el punto terminal en la frontera de 2 cuadrantes (coincide con uno de los ejes coordenados).

Tomando en cuenta que la longitud de la circunferencia unitaria es igual a 2π, vemos como ilustración que cuando la longitud del arco $\beta = \frac{\pi}{2}$, su punto terminal asociado es **P(0, 1)**. (Ver Figura 2).

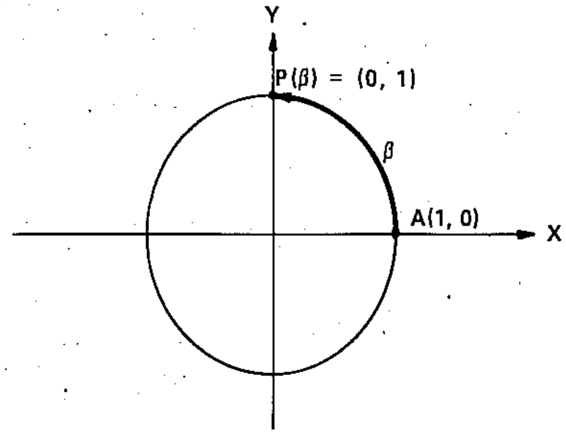


Figura 2

En la figura 3 se localizan los puntos terminales cuando $\beta = 0, \pi, \frac{3}{2}\pi$, y 2π.

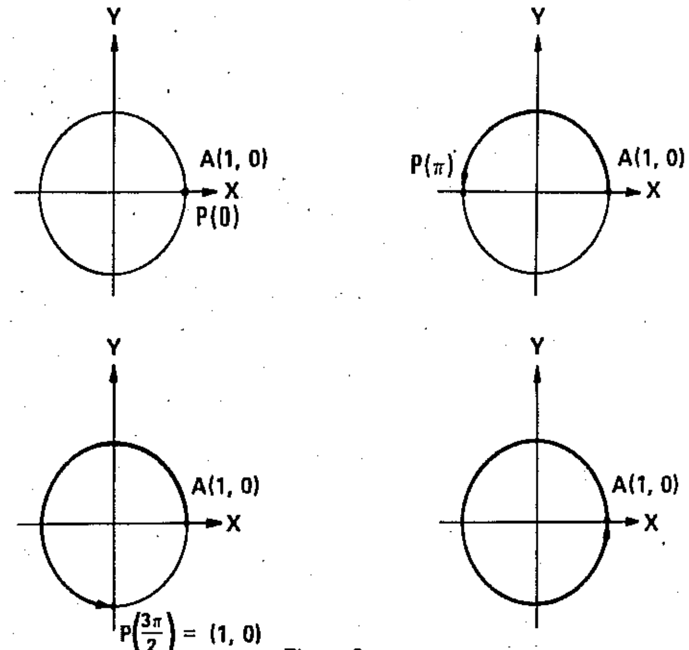


Figura 3

mediante las cuales puede verificar los valores que se dan en la siguiente tabla:

β	P (x, y)	cos β	sen β
0	(1, 0)	1	0
$\frac{\pi}{2}$	(0, 1)	0	1
π	(−1, 0)	−1	0
$\frac{3\pi}{2}$	(0, −1)	0	−1
2π	(1, 0)	1	0

Ejemplo 1. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{tg} \pi$.

Solución: primeramente establecemos las coordenadas del punto terminal en la circunferencia unitaria correspondiente a una longitud del arco de π unidades como se muestra en la Figura 4.

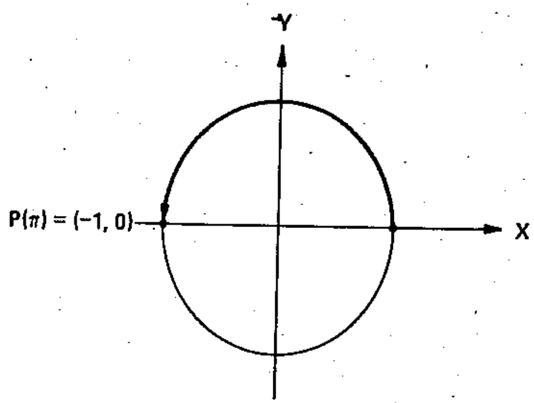


Figura 4

Ahora mediante la identidad trigonométrica

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$$

calculamos el valor pedido, esto es:

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{\operatorname{sen} \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0 \text{ ; por tanto } \operatorname{tg} \pi = 0$$

Ejemplo 2. Encontrar el valor exacto de sec $\frac{3\pi}{2}$

Solución: Ubicamos el punto terminal en la circunferencia unitaria correspondiente al arco $\frac{3\pi}{2}$ con sus coordenadas respectivas, según se muestra en la Figura 5.

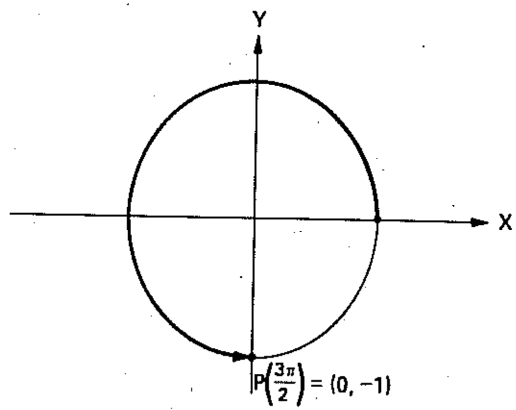


Figura 5

y usando la identidad trigonométrica $\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta}$ sustituimos valores

$$\sec \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

Este cociente indicado es una forma indefinida en R es decir, no se permite la división por cero, por lo que decimos que

$$\sec \frac{3\pi}{2} \quad \text{NO EXISTE}$$

Ejemplo 3. Encontrar el valor exacto de csc $\frac{3\pi}{2}$

Solución: Seguimos el mismo procedimiento discutido en los ejemplos anteriores, es decir, primero se ubica el punto terminal en la circunferencia unitaria que corresponda al arco dado estableciendo sus coordenadas y luego se aplica la identidad trigonométrica respectiva. Para este ejemplo se tiene la Figura 6.

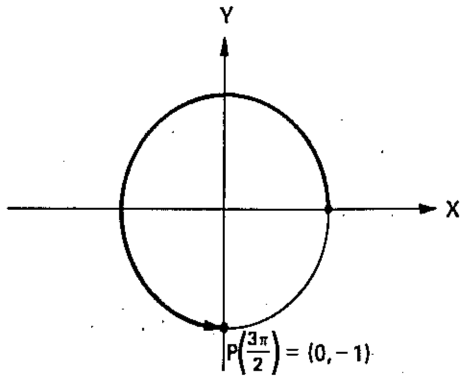


Figura 6

la identidad respectiva es $\csc \beta = \frac{1}{\text{sen } \beta}$; y sustituyendo valores numéricos se tiene

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\text{sen } \frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

por tanto $\csc \frac{3\pi}{2} = -1$

2.2 VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES PARA ARCOS $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ Y SUS MULTIPLOS.

En el tema anterior hemos determinado ciertos puntos de la circunferencia unitaria en los que hemos visto que sus coordenadas son números enteros. Estos puntos corresponden al arco $\beta = 0, \frac{\pi}{2} \cdot \pi \; \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Coordenadas de arcos múltiplos o submúltiplos de π.

Ahora vamos a calcular las coordenadas de otros puntos terminales de arcos cuyas longitudes son algunos múltiplos o submúltiplos de π. Calcularemos en primer lugar las coordenadas del punto terminal correspondiente al arco de longitud $\frac{\pi}{4}$. Trácese una circunferencia unitaria y localícese $P(\frac{\pi}{4})$. (Figura 7).

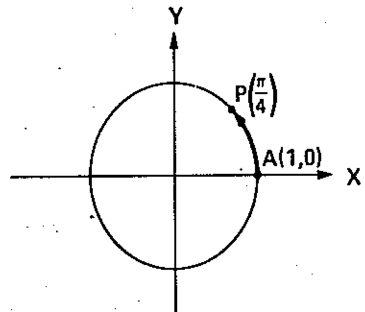


Figura 7

Puesto que este valor es exactamente la mitad de $\frac{\pi}{2}$, queda localizado en el punto medio del arco de circunferencia en el primer cuadrante.

Trácense segmentos de recta perpendiculares a ambos ejes, pasando por el punto $P(\frac{\pi}{4})$, resultando un cuadrado, lo cual se justifica mediante la geometría plana. (Figura 8).

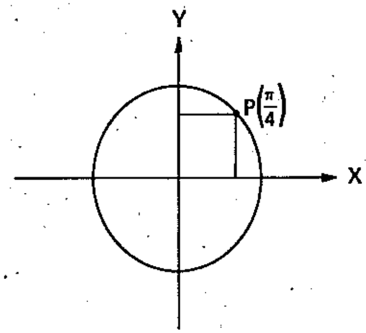


Figura 8

Ahora bien, si trazamos una diagonal como se muestra en la Figura 9, se forma un triángulo rectángulo.

El triángulo tiene dos catetos iguales.

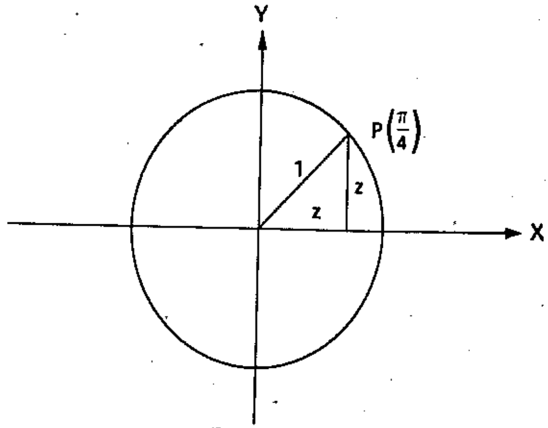


Figura 9

Empleamos el teorema de Pitágoras.

Dicho triángulo tiene dos catetos iguales: Si designamos por z la longitud de cada cateto y aplicamos el Teorema de Pitágoras, se establece que:

$$z^2 + z^2 = 1^2;\ \text{luego}\ 2z^2 = 1;\ \text{por tanto}$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ó sea que la longitud de cada cateto es $\frac{\sqrt{2}}{2}$. De esta manera, ya tenemos determinadas las coordenadas del punto $P(\frac{\pi}{4})$ que son $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

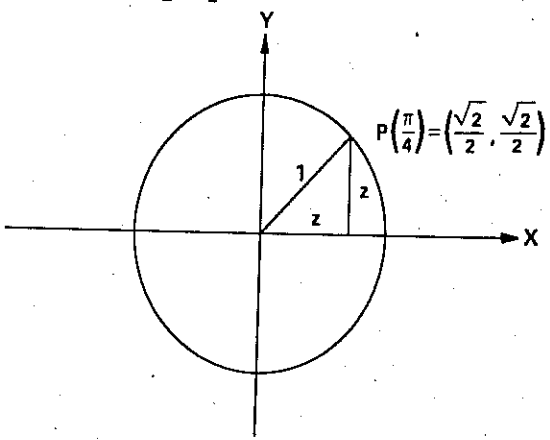


Figura 10

El procedimiento puede aplicarse a otros puntos terminales.

Con un procedimiento similar usted puede calcular las coordenadas de los puntos terminales asociados a los arcos $3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}$ y $7\frac{\pi}{4}$, pero esto sería un gasto innecesario de tiempo, ya que por inspección nos damos cuenta que son numéricamente las mismas coordenadas de $\frac{\pi}{4}$ sólo que con signos distintos, de acuerdo con el cuadrante donde esté ubicado el punto terminal.

Llene en la Figura 11 que se muestra en seguida las coordenadas de los puntos terminales anotados.

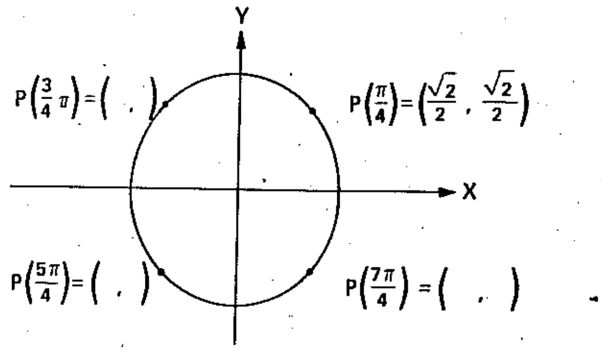


Figura 11

Obtengamos P cuando el arco de longitud es $\frac{\pi}{3}$

Ahora vamos a calcular las coordenadas del punto terminal correspondiente al arco de longitud $\frac{\pi}{3}$, para lo cual es necesario considerar lo siguiente:

En una circunferencia unitaria cuyo centro coincide con el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, se traza una cuerda **AB** de longitud igual a la unidad. (Figura 12).

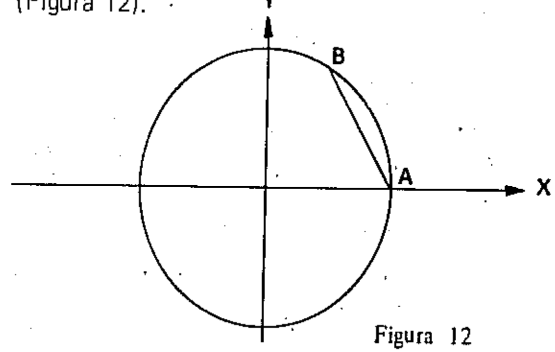


Figura 12

A partir de **B**, trácese otra de longitud unitaria, **BC**. Desde **C** trácese otra cuerda **CD** de longitud unitaria y continúese con las cuerdas contiguas de longitud unitaria **DE**, **EF** y **FA**. (Figura 13).

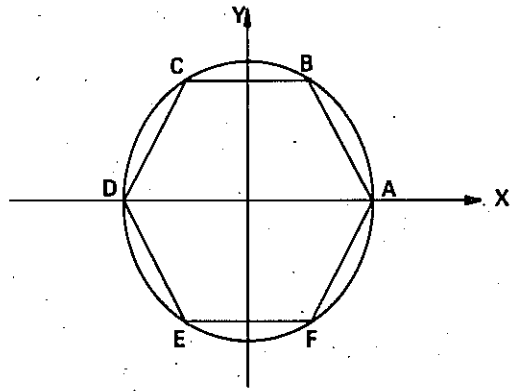


Figura 13

Lo que hemos construido de acuerdo con la Geometría Plana es un hexágono regular inscrito en una circunferencia. (La longitud de los lados de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es igual a la longitud de su radio). Es importante que verifique el siguiente argumento:

Como tenemos 6 cuerdas de igual longitud, entonces tenemos 6 arcos de igual longitud. En consecuencia, la longitud del arco **AB** es la sexta parte de la distancia que se mide alrededor de la circunferencia. Esto es: la longitud del arco $\mathbf{AB} = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$.

Ahora bien, de la figura 13, tomemos sólo la cuerda **AB** y tracemos el radio **OB** (Figura 14).

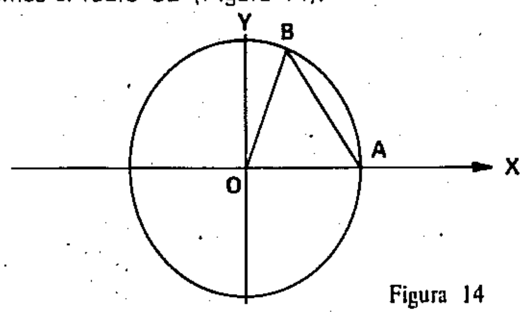


Figura 14

De esta manera se obtiene el triángulo equilátero **OAB** (por construcción), pues que **OA** = **OB** = **AB** = **radio** = **1** unidad de longitud. Tracemos la perpendicular desde **B** hasta el eje de las **x** y llamemos **H** al punto de intersección con dicho eje. (Figura 15).

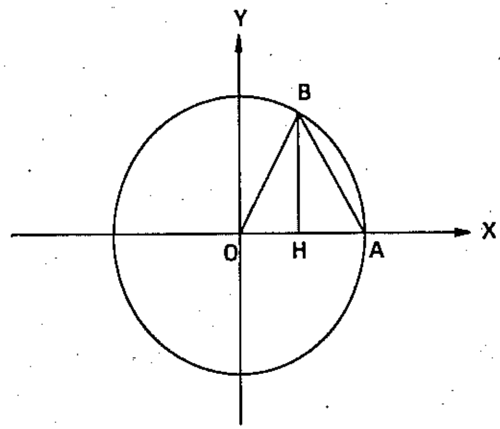


Figura 15

Puede darse cuenta que $\mathbf{OH} = \frac{1}{2}$ y que aplicando el Teorema de Pitágoras, se calcula la longitud entre los puntos **B** y **H** (Figura 16).

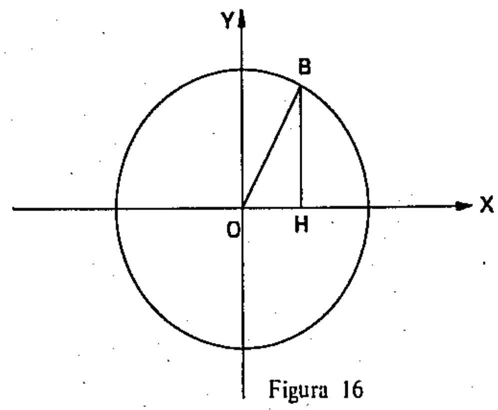


Figura 16

siendo para este caso:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$\overline{BH}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OH}^2$$

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2}$$

y sustituyendo los valores numéricos se tiene:

$$\overline{BH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

por tanto

$$\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De este modo, hemos obtenido las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo **OBH** y consecuentemente las coordenadas del punto **B** las cuales se muestran en la Figura 17.

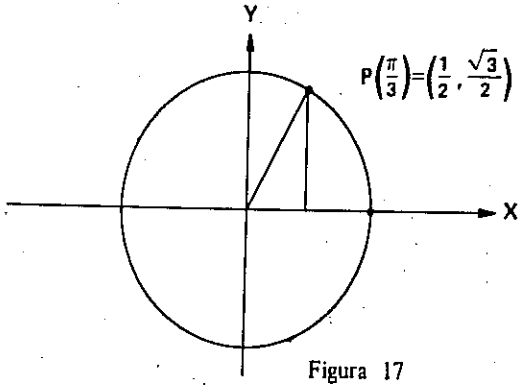


Figura 17

Podríamos calcular en forma similar las coordenadas de los puntos terminales para arcos de $2\frac{\pi}{3}$, $4\frac{\pi}{3}$ y $5\frac{\pi}{3}$ unidades, pero esto constituiría un gasto de tiempo innecesario. En todos estos casos las coordenadas son iguales en valor absoluto, y sólo cambian de signo. Veamos el siguiente ejemplo cuando la longitud del arco es $\frac{4\pi}{3}$. (Figura 18).

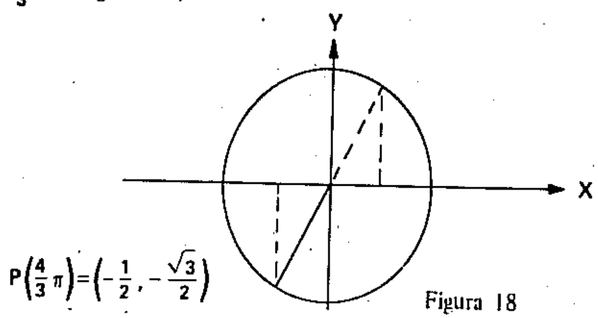


Figura 18

Ahora, puede establecer las coordenadas de los otros dos valores de arcos: $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, y anotarlos en la Figura 19.

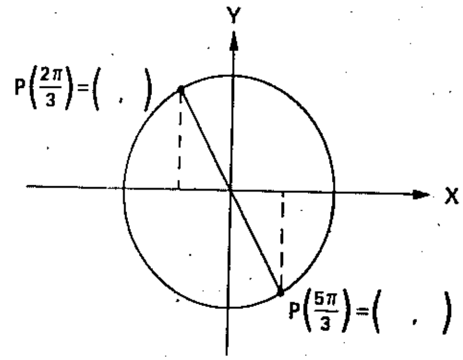


Figura 19

En seguida estableceremos las coordenadas del punto terminal asociado al arco de longitud $\frac{\pi}{6}$, para lo cual colocamos el triángulo equilátero **OAB** en la forma que abajo se muestra: (Figura 20).

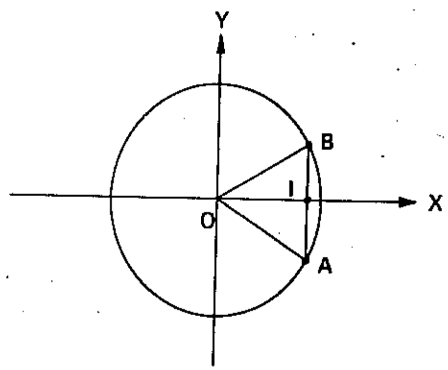


Figura 20

El eje **X** intersecta al arco en su punto medio y consecuentemente la cuerda se divide en 2 partes iguales, esto es $\mathbf{BI} = \mathbf{IA} = \frac{1}{2}$ unidades de longitud, y aplicando el Teorema de Pitágoras se calcula que $\mathbf{OI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ó sea que las coordenadas del punto terminal asociado con el arco $\frac{\pi}{6}$ son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Así se puede calcular en forma similar las coordenadas de $\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi,$ pero esto sería un gasto de tiempo innecesario; ya que puede observar que únicamente cambian los signos de acuerdo con el cuadrante en que esté el punto terminal.

Ahora usted puede establecer por inspección, las coordenadas de los puntos terminales correspondientes a los arcos $\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$ y $\frac{11}{6}\pi$, en la Figura 21.

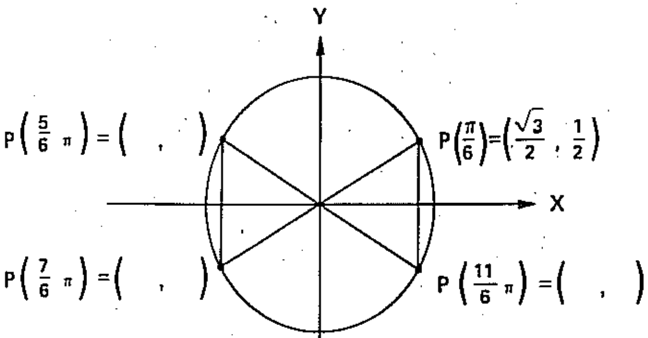


Figura 21

Ejemplo 4. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi$

Solución: Se establecen primero las coordenadas del punto terminal en la circunferencia unitaria asociado al arco de longitud $\frac{3}{4}\pi$ unidades como se muestra en la Figura 22.

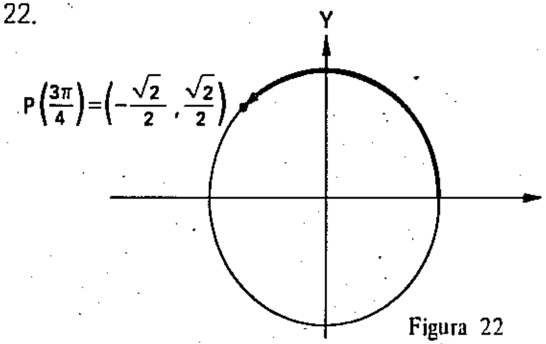


Figura 22

por tanto, $\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo 5. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi$

Solución: En la Figura 23 se muestran las coordenadas correspondientes al punto terminal en la circunferencia unitaria, asociado al arco $\frac{5\pi}{4}$

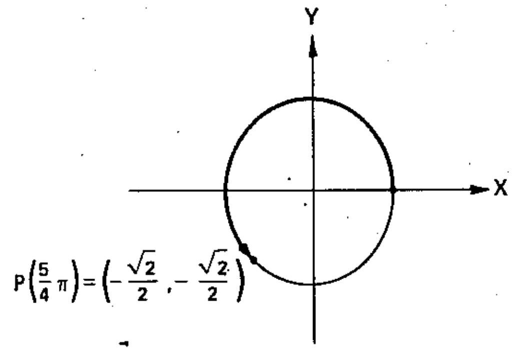


Figura 23

y usando la identidad trigonométrica respectiva, se tiene:

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{5}{4}\pi}{\cos \frac{5}{4}\pi} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

por tanto, $\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi = 1$

Ejemplo 6. Encontrar el valor exacto de $\sec \frac{5}{3}\pi$

Solución: Se sigue un procedimiento similar al ejemplo anterior.

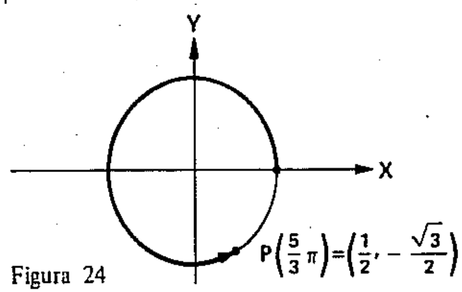


Figura 24

y usando la identidad correspondiente se tiene que

$$\sec \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{\cos \frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 .$$

por tanto, $\sec \frac{5}{3}\pi = 2$

Ejemplo 7. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{ctg} \frac{11}{6}\pi$

Solución: En la Figura 25 se muestran las coordenadas correspondientes al punto terminal en la circunferencia unitaria asociado al arco de longitud $\frac{11}{6}\pi$ unidades.

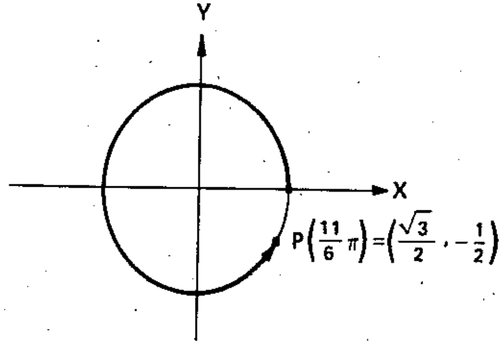


Figura 25

y utilizando la identidad trigonométrica respectiva, se obtiene:

$$\operatorname{ctg} \frac{11}{6}\pi = \frac{\cos \frac{11}{6}\pi}{\operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

2.3 DADO EL VALOR DE UNA FUNCION, ENCONTRAR EL VALOR DE TODAS LAS DEMAS FUNCIONES.

Otra forma de encontrar el valor de las funciones circulares.

Si conocemos el valor de una de las funciones circulares y el cuadrante en el que queda localizado el punto terminal $P(\theta)$, podemos determinar el valor de las demás funciones circulares. A continuación se presentan varios ejemplos que le ilustrarán cómo hacerlo.

Ejemplo: Para un valor dado de θ el punto $P(\theta)$ queda localizado sobre el segmento de recta que une los puntos (0, 0) y (3, 4) (Figura 26). Encontrar el valor de todas las funciones circulares de θ.

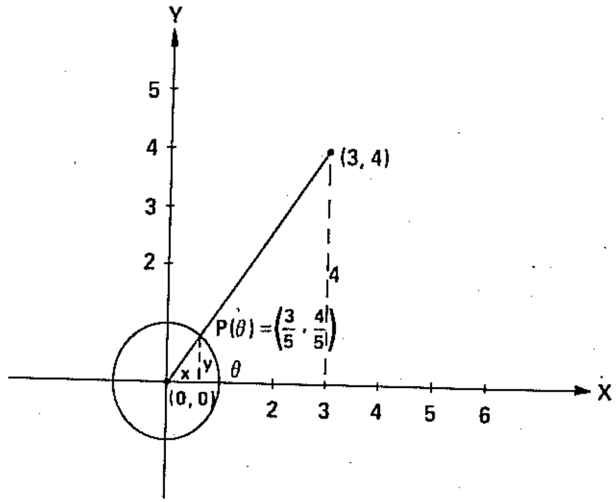


Figura 26

La distancia de (0, 0) á (3, 4) está dada por

$$\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 .$$

Necesitamos determinar las coordenadas x, y del punto $P(\theta)$ que queda localizado sobre la circunferencia unitaria, y sobre la recta que une los puntos (0, 0) y (3, 4). Por triángulos semejantes* tenemos que:

$$\frac{x}{1} = \frac{3}{5} ; \quad x = \frac{3}{5}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{4}{5} ; \quad y = \frac{4}{5}$$

Luego, las coordenadas de $P(\theta)$ son: $x = \frac{3}{5}$ y $y = \frac{4}{5}$.

Usando la definición de las funciones circulares tenemos:

* Si dos triángulos son semejantes sus lados homólogos** son proporcionales entre sí.
** Partes homólogas de dos figuras son las que están dispuestas en forma semejante.

$$\operatorname{sen}\theta = y = \frac{4}{5} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = x = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ y $\operatorname{tg}\theta > 0$, encontrar el valor de las demás funciones circulares.

Puesto que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ la y de $P(\theta)$ sobre el círculo unitario es igual a $-\frac{3}{5}$ (definición de seno). Sustituimos este valor en la ecuación del círculo unitario y tenemos:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{9}{25} = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{9}{25}$$

$$x^2 = \frac{16}{25}$$

$$x = \pm\frac{4}{5}$$

Pero como $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\operatorname{tg}\theta > 0$, $P(\theta)$ queda localizado en el tercer cuadrante, por lo que $x = -\frac{4}{5}$, así que $P(\theta) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ (Figura 27) usando las coordenadas de este punto determinamos el valor de las demás funciones circulares que son:

$$\cos\theta = -\frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \qquad \csc\theta = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

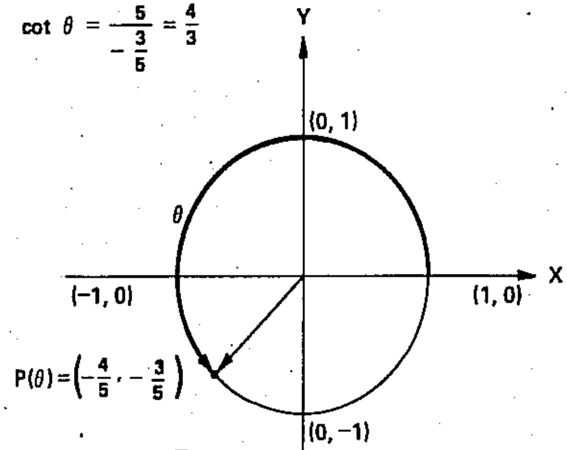


Figura 27

Ejemplo: Si θ es un número real asociado al punto $P(\theta)$ que queda localizado en la intersección de la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(12, -5)$, y la circunferencia unitaria, encontrar el valor de todas las funciones circulares. (Figura 28).

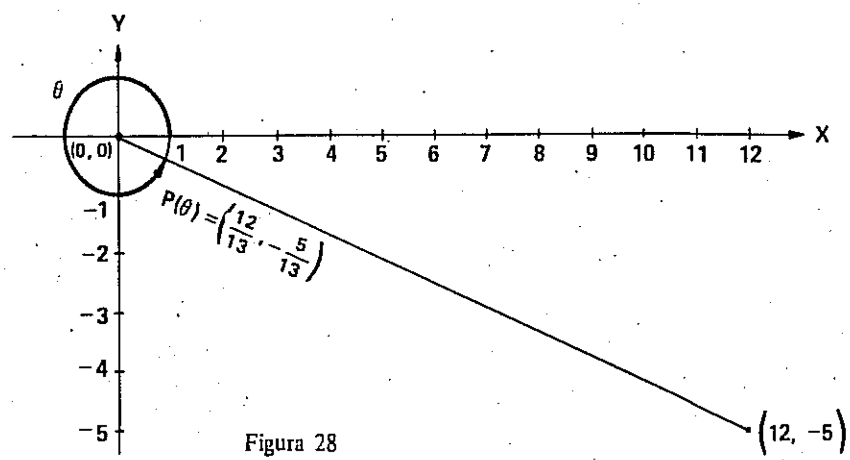


Figura 28

La distancia de $(0, 0)$ a $(12, -5)$ está dada por

$$\sqrt{(12-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Por triángulos semejantes tenemos que $x = \frac{12}{13}$ y $y = -\frac{1}{13}$; luego, $P(\theta) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ y el valor de las funciones circulares es:

$$\text{sen } \theta = -\frac{5}{13} \qquad \cot \theta = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \qquad \csc \theta = \frac{1}{-\frac{5}{13}} = -\frac{13}{5}$$

Ejemplo: Si $\cot \theta = -\frac{8}{15}$, encontrar el valor de todas las demás funciones circulares si $P(\theta)$ está en el segundo cuadrante.

En este ejemplo no conocemos ni x ni y de $P(\theta)$, pero sabemos que $\cot \theta$ está definido como $\frac{x}{y}$, con x negativa y y positiva por estar $P(\theta)$ en el segundo cuadrante. Para encontrar estos valores procedemos como sigue:

Hagamos $r = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$

$-\frac{8}{15}$ podemos escribirlo en forma equivalente como $\dfrac{-\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}}$

por lo que $\cot \theta = \dfrac{-\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}}$

y dado que por definición $\cot\theta = \frac{x}{y}$, concluimos que $x = -\frac{8}{17}$ y $y = \frac{15}{17}$, así $P(\theta) = \left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ y los valores de las funciones circulares que faltan serán:

$$\text{sen } \theta = \frac{15}{17} \qquad \sec \theta = -\frac{17}{8}$$

$$\cos \theta = -\frac{8}{17} \qquad \csc \theta = \frac{17}{15}$$

$$\text{tg } \theta = -\frac{15}{8}$$

Ejemplo: Si θ es un número real asociado al punto terminal $P(\theta)$ que se localiza en la intersección del segmento de recta que une el punto $(0, 0)$ con el $(3, -4)$, y la circunferencia unitaria, encontrar los valores de las funciones de $\theta + \frac{\pi}{2}$ (Figura 29).

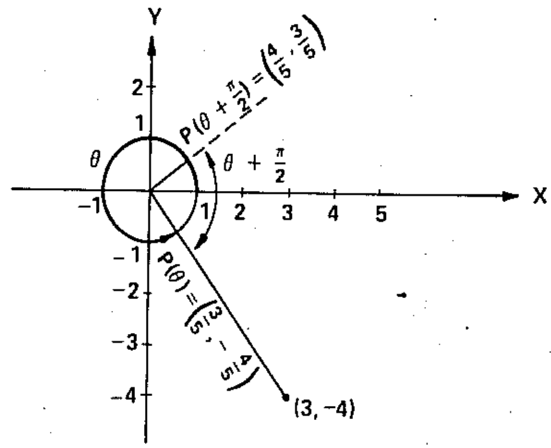


Figura 29

Por triángulos semejantes determinamos que $P(\theta) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ y por triángulos congruentes* $P(\theta + \frac{\pi}{2}) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, luego los valores de las funciones circulares son:

$$\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5} \qquad \cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{5} \qquad \sec\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\text{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4} \qquad \csc\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{3}$$

* Dos triángulos son congruentes si se pueden hacer coincidir en todas sus partes.

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior, encontrar los valores de las funciones de $\theta + \pi$ (Figura 30).

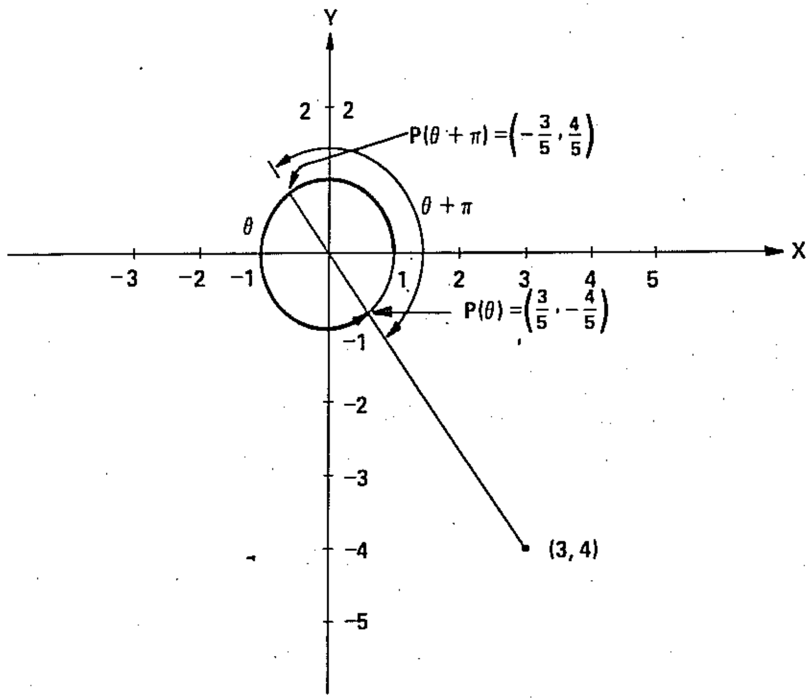


Figura 30

Por triángulos congruentes encontramos que $P(\theta + \pi) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, luego los valores de las funciones son:

$\text{sen}\,(\theta + \pi) = \frac{4}{5}$	$\cot\,(\theta + \pi) = -\frac{3}{4}$
$\cos\,(\theta + \pi) = -\frac{3}{5}$	$\sec\,(\theta + \pi) = -\frac{5}{3}$
$\text{tg}\,(\theta + \pi) = -\frac{4}{3}$	$\csc\,(\theta + \pi) = \frac{5}{4}$

Si a θ se le aumenta o disminuye un múltiplo entero de 2π $P[\theta + k(2\pi)]$ coincidirá con el punto terminal original $P(\theta)$, y ambos puntos terminales tendrán las mismas coordenadas, por lo que podemos dar la siguiente definición:

Para toda $\theta \in R$ y $k \in I$ tenemos que:

$\text{sen}\,[\theta + k(2\pi)] = \text{sen}\,\theta$	$\text{sen}\,[\theta + k(2\pi)] = \sec\,\theta$
$\cos\,[\theta + k(2\pi)] = \cos\,\theta$	$\csc\,[\theta + k(2\pi)] = \csc\,\theta$

De esto podemos concluir que estas cuatro funciones circulares son periódicas* en 2π.

Las funciones tangente y cotangente difieren del seno, coseno, secante y cosecante en cuanto al período ya que $\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ ó $\text{tg}\,\theta = \frac{-y}{x} = \frac{y}{-x}$ y $\cot\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ ó $\cot\,\theta = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$; por lo que el valor de estas dos funciones circulares en $P(\theta)$ es igual al valor de las mismas en $P(\theta + k\pi)$, así que podemos dar la siguiente definición:

Para toda $\theta \in R$ y $k \in I$, tenemos que

$\text{tg}\,(\theta + k\pi) = \text{tg}\,\theta$

$\cot\,(\theta + k\pi) = \cot\,\theta$

Luego, las funciones tangente y contangente son periódicas en π.

* Una función f es periódica con período p si para toda $\theta \in R$ $f(\theta + p) = f(\theta)$, es decir el valor de la función $f(\theta)$ se repite cuando a θ se le suma p.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los ejercicios del 1 al 11 se recomienda hacer la gráfica de la circunferencia unitaria con las coordenadas del punto terminal respectivo.

1. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}$
2. Encontrar el valor exacto de $\cos 2\pi$
3. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$
4. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen} 2\pi$
5. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$
6. Encontrar el valor exacto de $\cos \frac{3\pi}{2}$
7. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{ctg} \pi$
8. Encontrar el valor exacto de $\sec \pi$
9. Encontrar el valor exacto de $\csc \frac{\pi}{2}$
10. Encontrar el valor exacto de $\csc \frac{3\pi}{2}$
11. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{tg} 0$.

En los ejercicios del 12 al 27 se recomienda hacer la gráfica de la circunferencia unitaria con las coordenadas del punto terminal respectivo.

12. Encontrar el valor exacto de $\cos \frac{5}{4}\pi$
13. Encontrar el valor exacto de $\csc \frac{5}{6}\pi$
14. Determinar el valor exacto de $\sec \frac{7}{4}\pi$
15. Determinar el valor exacto de $\operatorname{ctg} \frac{2}{3}\pi$
16. Determinar el valor exacto de $\sec \frac{\pi}{4}$
17. Encontrar el valor exacto de $\cos \frac{7}{6}\pi$
18. Encontrar el valor exacto de $\csc \frac{4}{3}\pi$
19. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$
20. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{ctg} \frac{7}{4}\pi$

21. Determinar el valor exacto de $\csc \frac{7}{6}\pi$
22. Encontrar el valor exacto de $\sec \frac{5}{4}\pi$
23. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi$
24. Encontrar el valor exacto de $\cos \frac{5}{6}\pi$
25. Encontrar el valor exacto de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$
26. Encontrar el valor exacto de $\csc \frac{\pi}{3}$
27. Determinar el valor exacto de $\operatorname{tg} \frac{7}{4}\pi$

En los problemas del 28 al 32 el punto $P(\theta)$ está localizado en la intersección del segmento de recta que une el origen con el punto indicado y la circunferencia unitaria. Determinar el valor de las seis funciones circulares para el respectivo valor de θ. Para resolver todos los problemas de este ejercicio es muy conveniente que construya una gráfica en cada uno de ellos.

28. $(-4,\ 3)$
29. $(12,\ 5)$
30. $(5,\ -6)$
31. $(-24,\ -7)$
32. $(10,\ 10)$

En los problemas del 33 al 37 encontrar, el valor de las cinco funciones circulares que faltan si se conocen las siguientes condiciones:

33. $\operatorname{tg}\ \theta = \frac{2}{3}$; $P(\theta)$ en el tercer cuadrante.
34. $\sec \theta = -\frac{5}{4}$: $P(\theta)$ en el segundo cuadrante.
35. $\cos \theta = \frac{7}{10}$; $P(\theta)$ en el primer cuadrante.
36. $\cot \theta = 2$; $\operatorname{sen} \theta$ negativo
37. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} \theta$ positiva

En los problemas del 38 al 42, $P(\theta)$ está localizado en la intersección del segmento de recta que une el origen con el punto $(15, 8)$ y la circunferencia unitaria. Determinar las funciones circulares de:

38. $\theta + \pi$
39. $\theta - \pi$
40. $\theta + \frac{\pi}{2}$
41. $\theta - \frac{\pi}{2}$
42. $\theta + \frac{3\pi}{2}$

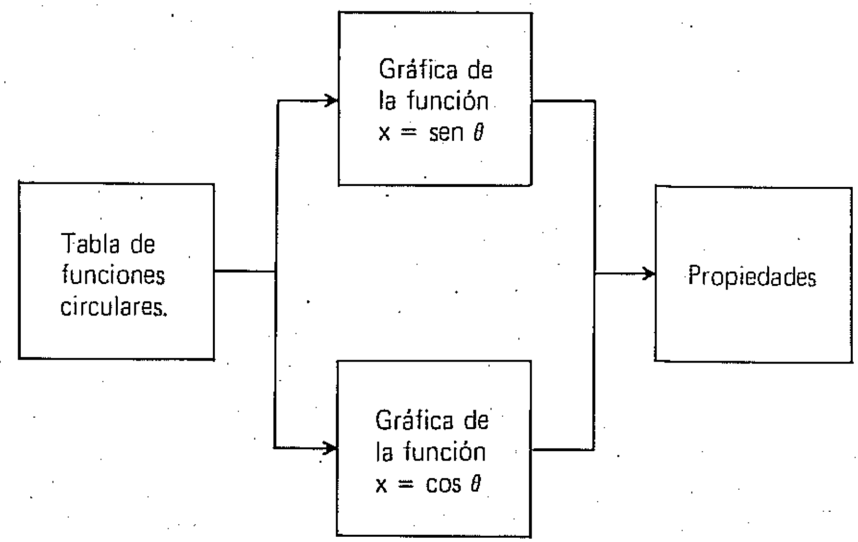
Módulo 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Describirá por medio de una tabla, la variación de las funciones seno y coseno al variar el ángulo θ.
2. Construirá la gráfica de la función $X = \text{sen}\ \theta$.
3. Expondrá las propiedades de la función seno usando su gráfica.
4. Construirá la gráfica de la función $X = \cos \theta$.
5. Expondrá las propiedades a la función coseno usando su gráfica.

ESQUEMA – RESUMEN



3.1 GRAFICA DE LAS FUNCIONES SENO y COSENO.

En el módulo 2 de esta misma unidad, obtuvimos los valores de las funciones seno y coseno cuando el punto terminal **P(θ)** estaba en cualquiera de los dos ejes coordenados.

Variación de funciones al variar el ángulo.

Estos valores nos servirán ahora para ver cómo varían estas funciones al variar θ, ya sea en sentido positivo o negativo. Veamos primero por medio de una tabla esta variación (θ positivo).

Cuadrante	Variación de θ	Variación de sen θ	Variación de cos θ
I	de 0 á $\frac{\pi}{2}$	de 0 á 1	de 1 á 0
II	de $\frac{\pi}{2}$ á π	de 1 á 0	de 0 á −1
III	de π á $\frac{3\pi}{2}$	de 0 á −1	de −1 á 0
IV	de $\frac{3\pi}{2}$ á 2π	de −1 á 0	de 0 á 1

En la tabla anterior, hemos visto los valores del seno y coseno cuando θ varía de **0** a 2π, sin embargo θ puede tomar valores mayores que 2π si θ se toma positivo (Figura 1).

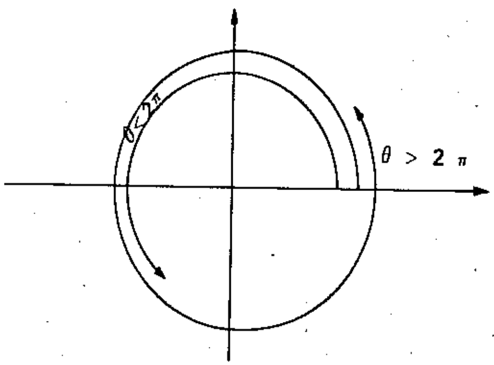


Figura 1

ó menores que -2π si θ se toma en sentido negativo, (Figura 2).

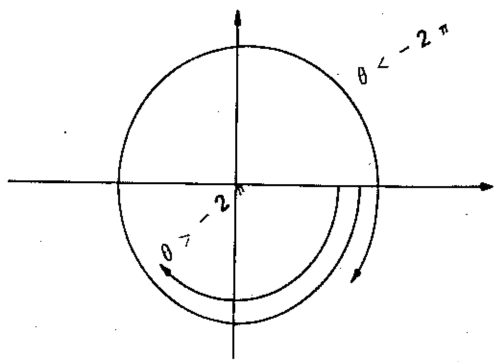


Figura 2

observe que los valores de las funciones seno y coseno, varían entre −1 y 1 para toda $\theta \in$ **R.**

Tomando lo anterior como punto de partida y con ayuda de la circunferencia unitaria construiremos la gráfica de **y = sen** θ, para lo cual procedemos como sigue:

Construcción de la gráfica y = sen θ.

En un sistema de coordenadas rectangulares, se marcan sobre el eje **x** los valores de θ y sobre el eje **y** los valores de sen θ. A la izquierda del eje **y** dibujemos una circunferencia unitaria con su centro sobre el eje horizontal. Marcamos en la circunferencia unitaria **P(0)**, **P($\frac{\pi}{2}$)**, **P(π)**, **P($\frac{3\pi}{2}$)** y **P(2π)**, y sobre el eje horizontal graficamos

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$ y 2π.

La distancia del origen de los ejes a cada uno de estos puntos es igual a la longitud de su arco correspondiente en la circunferencia unitaria. (Figura 3)

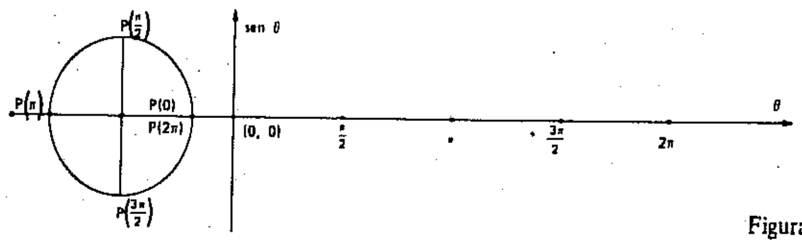


Figura 3

Si la ordenada de cada punto que hemos marcado sobre la circunferencia unitaria representa el valor de sen θ, entonces trazamos por cada uno de estos puntos rectas paralelas al eje horizontal y por cada uno de los puntos que graficamos con anterioridad, sobre el eje horizontal trazamos rectas paralelas al eje vertical. (Figura 4).

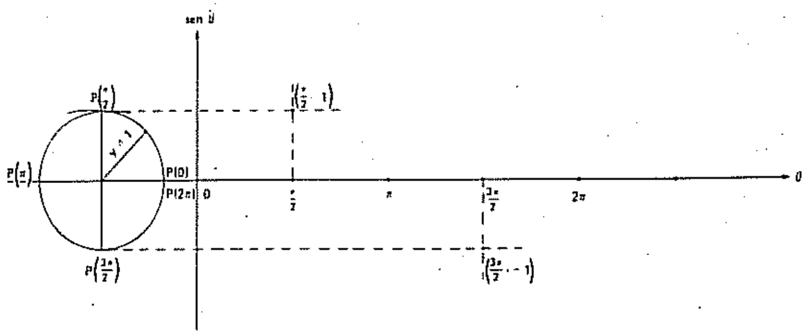


Figura 4

Los puntos de intersección son de la gráfica.

Los puntos donde se intersectan las dos rectas paralelas a los ejes, son puntos que pertenecen a la curva $y = \text{sen}\ \theta$, sin embargo necesitamos algunos otros valores para θ, estos valores pueden ser los que estudiamos en el módulo 2, de esta misma unidad; $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, y $\frac{7\pi}{4}$ y que junto con los valores que obtuvimos en la gráfica anterior, nos dará la Figura 5.

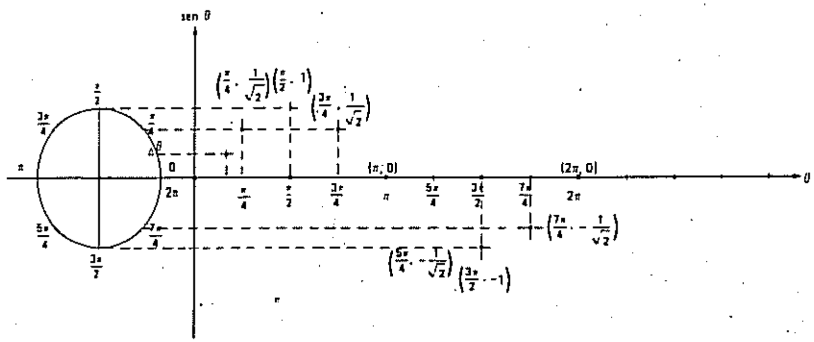


Figura 5

También se puede ver en la figura anterior que para un arco θ cualquiera sobre la circunferencia unitaria, tenemos el punto correspondiente $(\theta, \text{sen}\ \theta)$ que pertenece también en la gráfica de la función seno.

Se unen todos los puntos obtenidos.

Por último, unimos todos los puntos anteriores por medio de una línea curva y la gráfica resultante será la de $y = \text{sen}\ \theta$ (Figura 6).

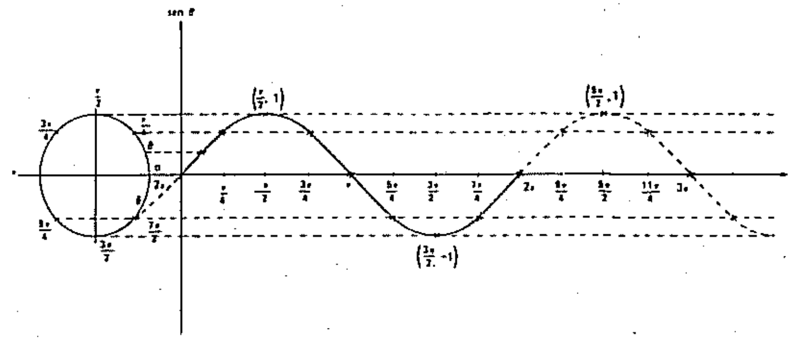


Figura 6

La curva la podemos continuar indefinidamente hacia la derecha o hacia la izquierda, como lo podemos ver en la figura por medio de la curva punteada. Si $\theta < 0$ lo que hacemos es sustituir en la ecuación $y = \text{sen}\ \theta$ el valor de θ y encontrar el correspondiente valor para la y, uniendo después todos los puntos así encontrados por medio de una línea curva.

Propiedades de la función seno.

De la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$ podemos visualizar fácilmente las siguientes propiedades para la función seno:

1) La función es periódica, con período igual a 2π.
2) En el primer cuadrante la función crece de 0 á 1 y en el cuarto cuadrante crece de -1 a 0.
3) En el segundo y tercer cuadrante la función decrece de 1 a 0 y de 0 á -1 respectivamente.
4) La función es positiva en el primero y segundo cuadrante, y negativa en el tercero y cuarto cuadrante.

5) La función intersecta el eje horizontal en múltiplos enteros de π, $\operatorname{sen} n\pi = 0$, $n \in I$.

Pasemos ahora a construir la gráfica de $x = \cos\theta$, para lo cual usaremos el método de tabulación.

En un sistema de coordenadas rectangulares, se grafican los valores de θ (dominio) en el eje horizontal y los valores de $\cos\theta$ (contradominio) en el eje vertical.

Y ahora obtengamos la gráfica de $y = \cos\theta$.

Con ayuda de los valores que se obtuvieron en el módulo 2 de esta misma unidad formamos la siguiente tabla:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

También unimos los puntos trazados.

Graficamos todos estos puntos en nuestro sistema de coordenadas, uniéndolos después por medio de una curva continua resultando la siguiente gráfica. (Figura 7).

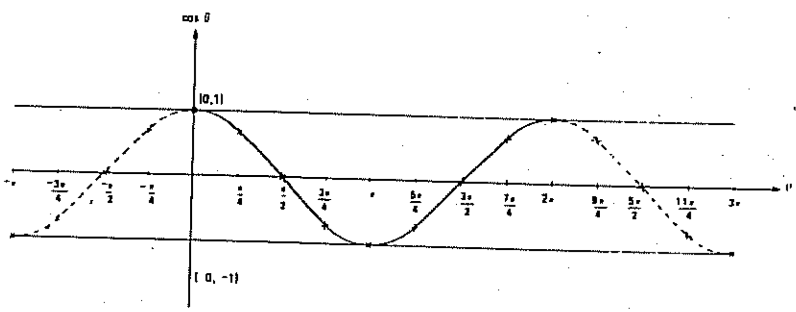


Figura 7

En la figura se observa que graficando algunos puntos a la derecha de 2π ó a la izquierda de **0**, se puede inducir que la curva se prolonga indefinidamente en ambos sentidos, lo cual se muestra por medio de la línea punteada en la Figura 7.

Podemos visualizar a partir de la gráfica del coseno, las siguientes propiedades:

Propiedades de la función coseno.

1. La función decrece entre **0** y π
2. La función crece entre π y 2π
3. La función es periódica, siendo su período igual a 2π
4. La función es positiva en los cuadrantes I y IV, y negativa en los cuadrantes II y III.
5. El valor de $\cos\theta$ varía entre -1 y 1 para $\theta \in R$.

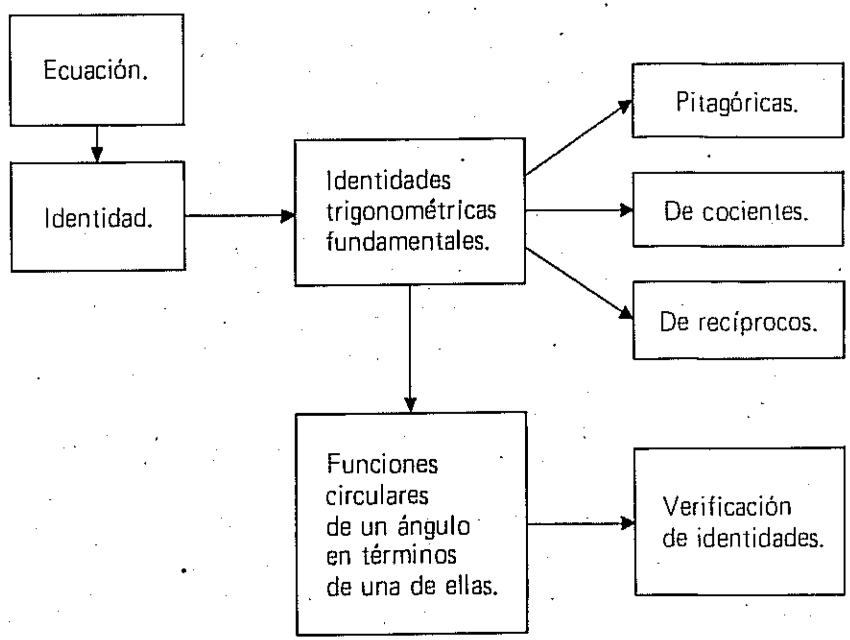
Módulo 4

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Distinguirá entre ecuación e identidad.
2. Enumerará las identidades trigonométricas fundamentales.
3. Expresará las seis funciones circulares de un ángulo en términos de una de ellas.
4. Verificará identidades dadas utilizando alguno de los métodos propuestos.

ESQUEMA–RESUMEN



4.1 IDENTIDADES FUNDAMENTALES.

¿Qué es una igualdad condicional?

Ya en cursos anteriores, ha tenido contacto con igualdades como $2x + 3 = 15$, ó como $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$; $x \in R$ y aunque aparentemente no existe diferencia entre ellas ya que hasta este tema las hemos simbolizado de la misma forma (=), puede notar que $2x + 3 = 15$, $x \in R$ es una igualdad que resulta cierta si y sólo si $x = 6$, es decir x está condicionada a ser igual a seis para que dicha igualdad sea verdadera. Este hecho nos permite asignar a las igualdades, de las que $2x + 3 = 15$ es un caso particular, el nombre de igualdades condicionales ó ecuaciones; algunas ocasiones distinguió este tipo de igualdades mediante el uso del cuantificador existencial.

Otros ejemplos de ecuaciones son:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$, en este caso la igualdad es cierta si y sólo si $x = 2$ ó $x = 3$.

b) $x^3 - 7x + 6 = 0$, aquí la igualdad se cumple si $x = -3$ ó $x = 1$ ó $x = 2$.

¿A qué llamamos identidad?

En el caso de $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$, $x \in R$ debe notar que la igualdad es cierta para toda $x \in R$; a este tipo de igualdades les conocemos con el nombre de identidades y vamos a distinguirlas de las ecuaciones reemplazando el símbolo $=$ por el símbolo $\equiv$. Para referirse a una igualdad de este tipo, le ha valido algunas veces del cuantificador universal. En conclusión tenemos dos tipos de igualdades:

a) Ecuación como $3x - 5 = 1$
b) Identidad como $x^3 - 1 \equiv (x - 1)(x^2 + x + 1)$

que aunque tienen distinto significado tienen muchas características comunes como son las propiedades de sustitución, reflexiva, simétrica, transitiva, etc.

El objetivo de este tema, es que le familiarice con las funciones circulares y sus combinaciones mediante la verificación de identidades que contienen dichas funciones. Para lograr esta verificación, nos basamos en ocho identidades consideradas como fundamentales, mismas que le presentamos en seguida:

Clasificación de identidades trigonométricas.

a) pitagóricas	b) de cocientes	c) de recíprocos
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1$	$\text{tg}\,\alpha \equiv \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$	$\text{sen}\,\alpha\,\csc\alpha \equiv 1$
$\text{tg}^2\alpha + 1 \equiv \sec^2\alpha$	$\cot\alpha \equiv \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$	$\cos\alpha\,\sec\alpha \equiv 1$
$1 + \cot^2\alpha \equiv \csc^2\alpha$		$\text{tg}\,\alpha\,\cot\alpha \equiv 1$

Las identidades de cociente y de recíprocos ya las conoce, justifiquemos las tres primeras. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ "resulta cierta si en ella sustituimos las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia unitaria", y como para todo punto en esta curva $x = \cos\alpha$, $y = \text{sen}\,\alpha$ $(\alpha \in R)$, al sustituir resulta $(\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2 \equiv 1$* ó en la forma convencional $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha \equiv 1$.

Esta igualdad resulta ser identidad ya que a cada $\alpha \in R$ corresponde un punto en la circunferencia unitaria, y las coordenadas de cualquier punto en esta curva hacen cierta la igualdad $x^2 + y^2 = 1$.

Partamos ahora de

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Formulación de identidades pitagóricas.

Divídase esta igualdad por $\cos^2\alpha$: resulta

$$\frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \equiv \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

ó $$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \equiv \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

ó $$\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \equiv \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

* Para comodidad al operar con las potencias de estas funciones, se escriben con el exponente en la parte superior derecha del nombre de la función.

ó $(tg\alpha)^2 + 1 \equiv (sec\alpha)^2$ propiedad de sustitución.

Finalmente $tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$

Volvamos a la igualdad $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Si ahora sus dos miembros son divididos por $sen^2\alpha$ obtenemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} \equiv \frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$\left(\frac{sen\alpha}{sen\alpha}\right)^2 + \left(\frac{cos\alpha}{sen\alpha}\right)^2 \equiv \left(\frac{1}{sen\alpha}\right)^2 \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Finalmente $1 + cot^2\alpha \equiv csc^2\alpha$. sustitución.

Se presentan a continuación ejemplos que pretenden mostrar algunos caminos para verificar identidades; antes de entrar de lleno en estos procesos mostramos que es posible expresar las seis funciones circulares en términos de una de ellas.

Ejemplo 1. Exprese las seis funciones circulares de α en términos de $cos\alpha$.

Solución: de $sen^2\alpha + cos^2\alpha \equiv 1$ tenemos

$$sen^2\alpha \equiv 1 - cos^2\alpha$$

$$sen\alpha \equiv \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

El signo depende del cuadrante en que se encuentre $P(\alpha)$.

Por lo que

$sen\alpha \equiv \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$cos\alpha \equiv cos\alpha$

Dividiendo la primera por la segunda expresión y por definición de tangente.

$$tg\alpha \equiv \frac{\pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}}{cos\alpha}$$

$$cot\alpha \equiv \frac{cos\alpha}{\pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$sec\alpha \equiv \frac{1}{cos\alpha}$$

$$csc\alpha \equiv \frac{1}{\pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

Ejemplo 2. Expresar las seis funciones circulares de α en términos de $sec\alpha$

sean (1) $sen^2\alpha + cos^2\alpha \equiv 1$ (2) $cos\alpha \equiv \frac{1}{sec\alpha}$

de (1) $sen^2\alpha \equiv 1 - cos^2\alpha$

$$sen\alpha \equiv \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

$$sen\alpha \equiv \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{sec\alpha}\right)^2} \quad \text{sustituyendo } cos\alpha \text{ por } \frac{1}{sec\alpha}$$

$$sen\alpha \equiv \pm\sqrt{1 - \frac{1}{sec^2\alpha}}$$

$$sen\alpha \equiv \pm\sqrt{\frac{sec^2\alpha - 1}{sec^2\alpha}}$$

$$sen\alpha \equiv \pm\frac{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}{\sqrt{sec^2\alpha}}$$

$$sen\alpha \equiv \pm\frac{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}{sec\alpha}$$

El signo depende del cuadrante en que se encuentre $P(\alpha)$ así que

$$sen\alpha \equiv \pm\frac{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}{sec\alpha} \qquad cot\alpha \equiv \pm\frac{1}{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}$$

$$cos\alpha \equiv \frac{1}{sec\alpha} \qquad sec\alpha \equiv sec\alpha$$

$$tg\alpha \equiv \pm\sqrt{sec^2\alpha - 1} \qquad csc\alpha \equiv \pm\frac{sec\alpha}{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}$$

Ejemplo 3. Verifique la identidad, transformando el primer miembro de la misma hasta hacerlo igual al segundo.

$$\frac{1}{1 + sen\alpha} + \frac{1}{1 - sen\alpha} \equiv 2\,sec^2\alpha$$

1) $\frac{1}{1+\text{sen}\alpha} + \frac{1}{1-\text{sen}\alpha} \equiv \frac{1-\text{sen}\alpha + 1 + \text{sen}\alpha}{(1+\text{sen}\alpha)(1-\text{sen}\alpha)}$ (1) suma de fracciones

2) $\equiv \frac{2}{1-\text{sen}^2\alpha}$ (2) efectuando operaciones indicadas

3) $\equiv \frac{2}{\cos^2\alpha}$ (3) sustitución

4) $\equiv 2\,\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (4) $\frac{a}{b} = a\frac{1}{b},\ b \neq 0$

5) $\equiv 2\sec^2\alpha$ (5) sustitución

En estos procesos no es posible indicar un método o procedimiento general a seguir, sin embargo, las siguientes recomendaciones suelen ser útiles: a) Efectuar las operaciones indicadas, b) Hacer las simplificaciones algebraicas tales como factorización, suma de fracciones procurando evitar hasta donde sea posible introducir radicales que puedan complicar la situación, c) En muchos casos será conveniente reducir todas las funciones a seno y coseno antes de simplificar.

Procedimiento para la verificación de identidades.

La verificación de identidades suele intentarse por alguno de los siguientes caminos:

1o. Reducir el miembro más complicado al más simple (Ejemplo 3).
2o. Trabajar con ambos miembros simultáneamente hasta llegar en ambos a la misma expresión (Ejemplo 4).
3o. Usando algún artificio como multiplicar (dividir) ambos miembros de una fracción por la misma expresión (Ejemplo 5).

Ejemplo 4. Transformando cada miembro por separado verifique:

$$\text{tg}\alpha\,\frac{1}{\csc\alpha} \equiv \sec\alpha - \frac{1}{\sec\alpha}$$

$\text{tg}\alpha\,\frac{1}{\csc\alpha}$	$\sec\alpha - \frac{1}{\sec\alpha}$
$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\csc\alpha}$	$\frac{\sec^2\alpha - 1}{\sec\alpha}$
$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,\text{sen}\alpha$	$\frac{\text{tg}^2\alpha}{\sec\alpha}$
$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$	$\frac{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}$
$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha\ \text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\ \cos\alpha}$
$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$	$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$

Ejemplo 5. Verificar:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \equiv \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$$

(1) $\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \equiv \frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\cdot\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha}$ (1) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}$

(2) $\equiv \frac{(1-\cos\alpha)\ \text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$ (2) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

(3) $\equiv \frac{(1-\cos\alpha)\ \text{sen}\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ (3) sustitución

(4) $\equiv \frac{(1-\cos\alpha)\ \text{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)\ (1+\cos\alpha)}$ (4) $a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b)$

(5) $\equiv \frac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$ (5) $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

El estudiante, cuando empieza a verificar identidades casi siempre se pregunta: ¿Para qué me servirá todo esto?

¿Para qué me sirve todo ésto?

Existen varias razones que contestan su pregunta:

1o. El constante contacto con las funciones circulares lo familiariza con ellas, dándole oportunidad de recordarlas mejor.
2o. Adquiere mayor madurez matemática al aplicar lo que ha aprendido en cursos anteriores.
3o. Conocerá identidades que aplicará o utilizará en cursos posteriores y en aplicaciones prácticas.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Usando las identidades fundamentales expresar cada una de las siguientes funciones en términos de únicamente $\operatorname{sen}\alpha$

1. $\cos^2\alpha$
2. $\operatorname{tg}^2\alpha$
3. $\cot^2\alpha$
4. $\csc^2\alpha$
5. $\sec\alpha$
6. $\sec^2\alpha$

Reducir las siguientes expresiones a términos de una sola función.

7. $\dfrac{\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$, $\qquad \csc\alpha \neq 0$

8. $\dfrac{\cot\alpha \sec^2\alpha}{1 + \cot^2\alpha}$

9. $\dfrac{\sec^2\alpha}{\csc^2\alpha}$, $\qquad \csc\alpha \neq 0$

10. $\dfrac{\cot\alpha \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha \neq 0$

Verificar las siguientes identidades

11. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \cot\alpha \equiv \dfrac{\sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

12. $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

13. $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha \equiv 2\cos^2\alpha - 1$

14. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} \equiv \sec\alpha + 1$

15. $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\sec^2\alpha} \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

16. $\dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha} \equiv 1 + \operatorname{sen}\alpha$

17. $\dfrac{\csc^2\alpha - \csc\alpha \cot\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \equiv \dfrac{\csc^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$

18. $\sec\alpha \csc\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha \sec\alpha \equiv \cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha$

19. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha} \equiv \dfrac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

20. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha} \equiv -(\cot\alpha \cos\alpha - \csc\alpha)$

21. $\dfrac{1 + \cot^2\alpha}{\cot^2\alpha} \equiv \sec^2\alpha$

22. $\dfrac{\cot\alpha + \csc\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cot\alpha - \csc\alpha} + \sec\alpha \equiv 0$

23. $\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha \equiv \csc\alpha \sec\alpha$

24. $(\operatorname{tg}\alpha - \cot\alpha)^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha \equiv 1 - 4\operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha$

25. $\dfrac{\cos^3\alpha + \sec^3\alpha}{\cos\alpha + \sec\alpha} \equiv \sec^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Bibliografía básica para consulta

Trigonometría.
Fred W. Sparks
Paul K. Rees
Editorial Reverté Mexicana, S. A.
1976

Trigonometría Plana y Esférica.
Frank Ayres Jr.
Serie Shaum. Mc. Graw- Hill.
1976

Paneles de verificación

MODULO 1 – VALIDACION

1.–

a) 1) $\sqrt{40}$

2) 10

3) $\sqrt{193}$

4) $\sqrt{98}$

b) La longitud de los lados del triángulo es

$AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{80}$ y $BC = \sqrt{100}$.

usando el teorema de Pitágoras tenemos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

sustituyendo los valores de AB, AC y BC se tiene

$$(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{80})^2 = (\sqrt{100})^2$$

$$20 + 80 = 100$$

$$100 = 100$$

Como se cumple el Teorema de Pitágoras el triángulo es rectángulo.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ (AB)\ (AC)$$

$$= \frac{1}{2}\ (\sqrt{20})\ (\sqrt{80})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1600}$$

$$= \frac{1}{2}\ (40)$$

$$= 20\ u^2$$

c) $\overline{AC} = 5$ y $\overline{AB} = 5$,
por tanto, el triángulo es isósceles.

d) $BD = \sqrt{290}$, $AC = \sqrt{80}$

e) $(\sqrt{84}, 4)$, $(-\sqrt{84}, 4)$

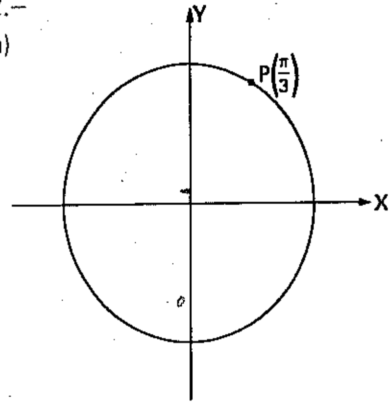
f) $AB + BC = AC$

g) $(0, \frac{15}{2})$

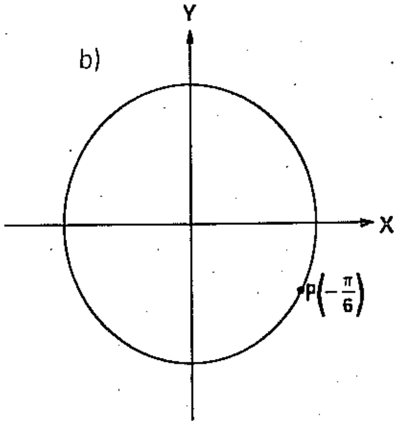
h) $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2.–

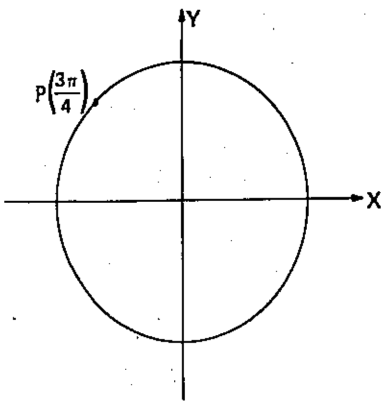
a)



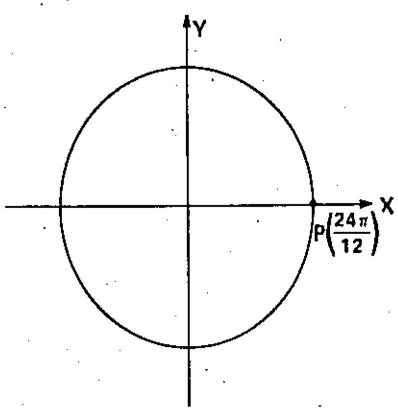
b)



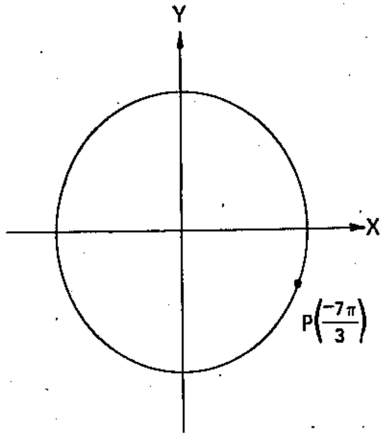
c)



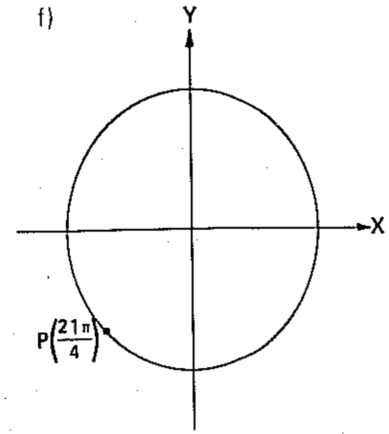
d)



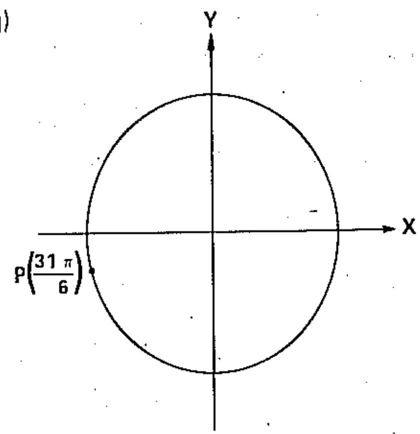
e)



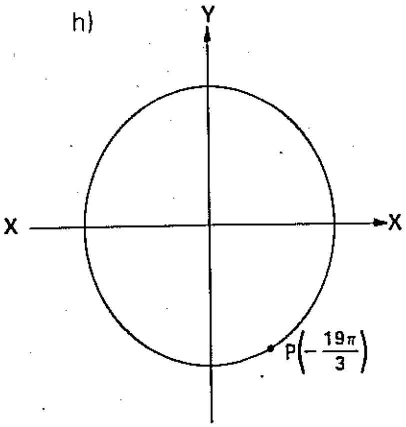
f)



g)

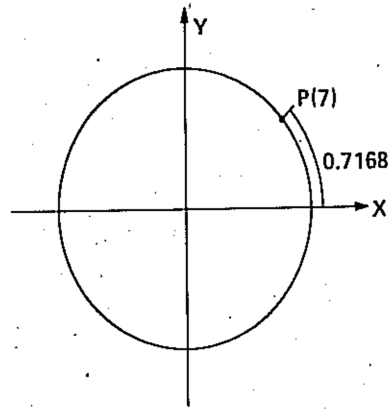


h)



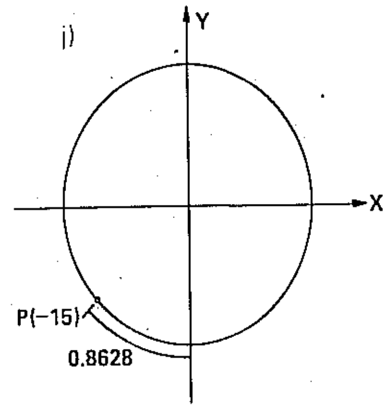
$7 = 4 \times 1.5708 + 0.7178$

i)

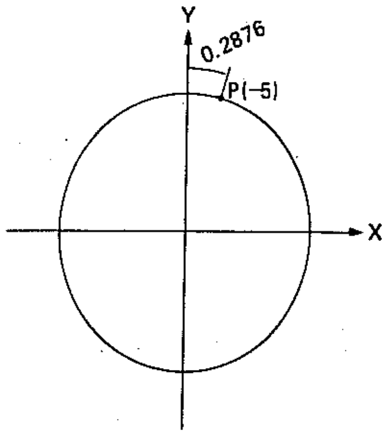


$15 = 9 \times 1.5708 + 0.8628$

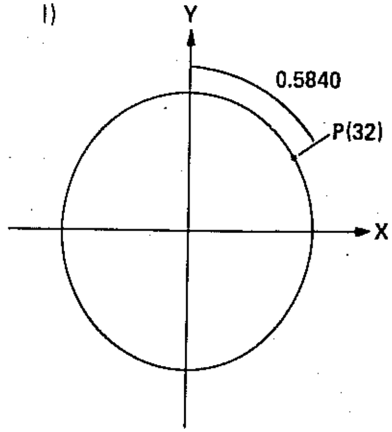
j)



k)

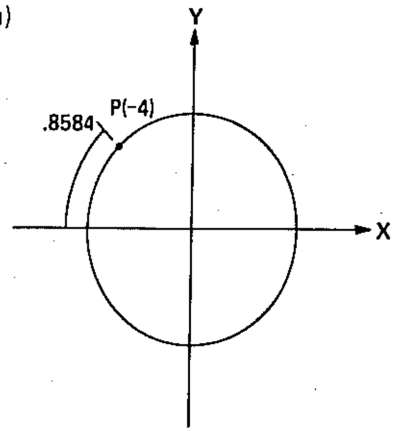


l)

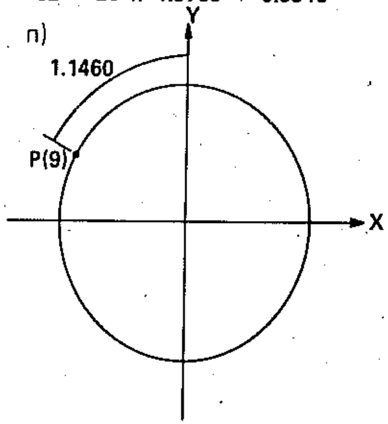


32 = 20 x 1.5708 + 0.5840

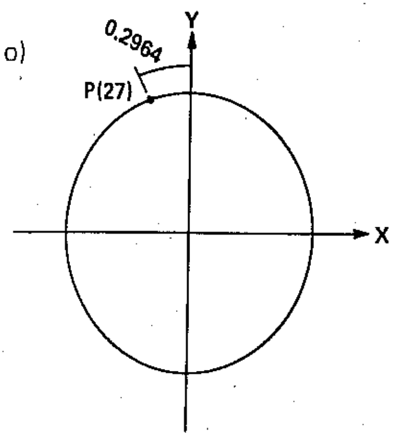
m)



n)

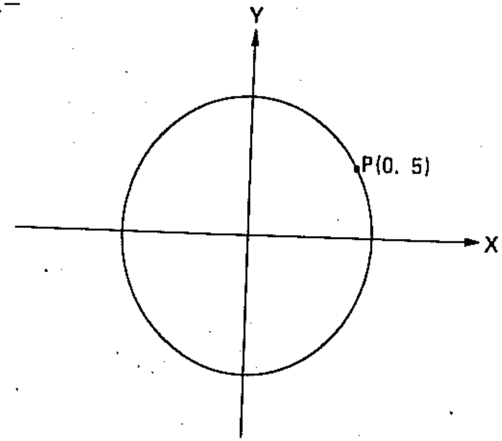


o)



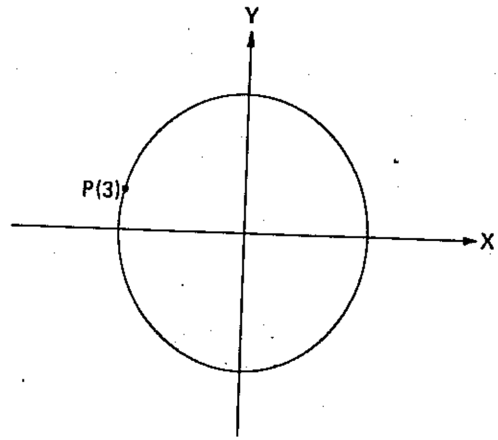
3.−

a)



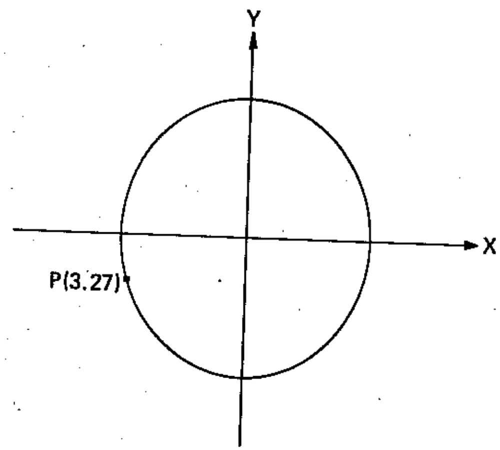
sen 0.5 > 0
cos 0.5 > 0
tg 0.5 > 0
cot 0.5 > 0
sec 0.5 > 0
csc 0.5 > 0

b)



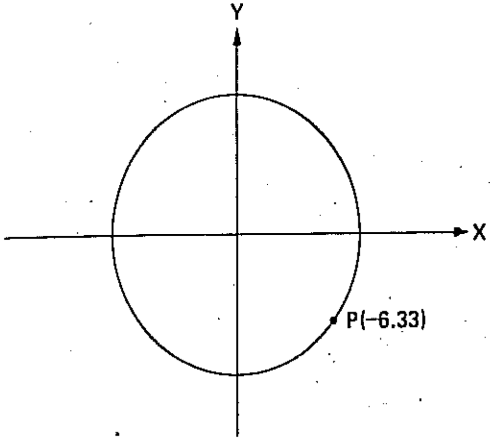
sen 3 > 0
cos 3 < 0
tg 3 < 0
cot 3 < 0
sec 3 < 0
csc 3 > 0

c)



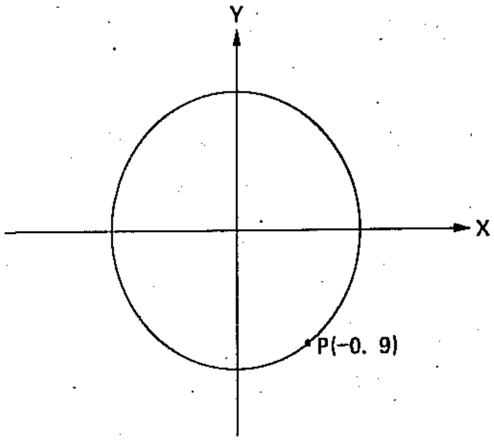
sen 3.27 < 0
cos 3.27 < 0
tg 3.27 > 0
cot 3.27 > 0
sec 3.27 < 0
csc 3.27 < 0

d)



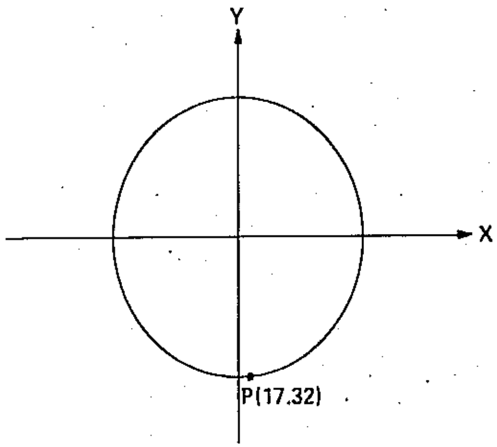
sen (−6.33) < 0
cos (−6.33) > 0
tg (−6.33) < 0
cot (−6.33) < 0
sec (−6.33) > 0
csc (−6.33) < 0

e)



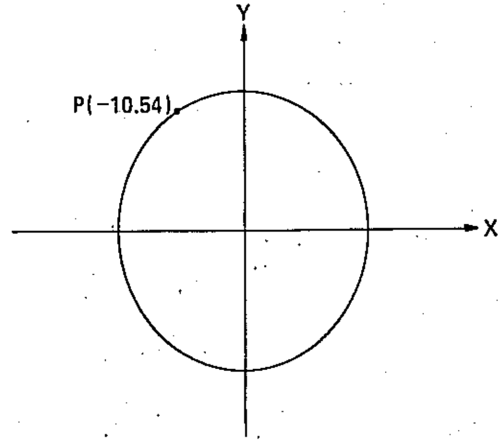
sen (−0.9) < 0
cos (−0.9) > 0
tg (−0.9) < 0
cot (−0.9) < 0
sec (−0.9) > 0
csc (−0.9) < 0

f)



sen (17.32) < 0
cos (17.32) > 0
tg (17.32) < 0
cot (17.32) < 0
sec (17.32) > 0
csc (17.32) < 0

g)



sen (−10.54) > 0
cos (−10.54) < 0
tg (−10.54) < 0
cot (−10.54) < 0
sec (−10.54) < 0
csc (−10.54) > 0

MODULO 2 – VALIDACION

1. 0
2. 1
3. 0
4. 0
5. No existe
6. 0
7. No existe
8. −1
9. 1
10. −1
11. 0
12. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
13. 2
14. $\sqrt{2}$
15. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
16. $+\sqrt{2}$
17. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
18. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
19. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
20. −1
21. −2
22. $-\sqrt{2}$
23. $-\frac{1}{2}$

24. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. $\sqrt{3}$

26. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

27. -1

28. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \cot\theta = -\frac{4}{3}$

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$ $\quad \sec\theta = -\frac{5}{4}$

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{3}$

29. $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ $\quad \cot\theta = \frac{12}{5}$

$\cos\theta = \frac{12}{13}$ $\quad \sec\theta = \frac{13}{12}$

$\tan\theta = \frac{5}{12}$ $\quad \csc\theta = \frac{13}{5}$

30. $\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{\sqrt{61}}$ $\quad \cot\theta = -\frac{5}{6}$

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{61}}$ $\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{61}}{5}$

$\tan\theta = -\frac{6}{5}$ $\quad \csc\theta = -\frac{\sqrt{61}}{6}$

31. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{25}$ $\quad \cot\theta = \frac{24}{7}$

$\cos\theta = -\frac{24}{25}$ $\quad \sec\theta = -\frac{25}{24}$

$\tan\theta = \frac{7}{24}$ $\quad \csc\theta = -\frac{25}{7}$

32. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \cot\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \sec\theta = \sqrt{2}$

$\tan\theta = 1$ $\quad \csc\theta = \sqrt{2}$

33. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad \sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$

$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\cot\theta = \frac{3}{2}$

34. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \cot\theta = -\frac{4}{3}$

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{3}$

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$

35. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{51}}{10}$ $\quad \cot\theta = \frac{7}{\sqrt{51}}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\quad \sec\theta = \frac{10}{7}$

$\csc\theta = \frac{10}{\sqrt{51}}$

36. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sec\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \csc\theta = -\sqrt{5}$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$

37. $\cos\theta = -\frac{5}{13}$ $\quad \sec\theta = \frac{-13}{5}$

$\tan\theta = \frac{12}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{-13}{12}$

$\cot\theta = \frac{5}{12}$

38. $\operatorname{sen}(\theta+\pi) = -\frac{8}{17}$ $\quad \cot(\theta+\pi) = \frac{15}{8}$

$\cos(\theta+\pi) = -\frac{15}{17}$ $\quad \sec(\theta+\pi) = -\frac{17}{15}$

$\tan(\theta+\pi) = \frac{8}{15}$ $\quad \csc(\theta+\pi) = -\frac{17}{8}$

39. Respuestas iguales a los del problema 38.

40. $\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15}{17}$ $\quad \cot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{15}$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{17}$ $\quad \sec\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{17}{8}$

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{8}$ $\quad \operatorname{cse}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{17}{15}$

41. $\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$ $\qquad$ $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{15}$

$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{17}$ $\qquad$ $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{17}{8}$

$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{8}$ $\qquad$ $\operatorname{cse}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{17}{15}$

42. Resultados iguales a los del problema 41.

MODULO 4 – VALIDACION

1. $\cos^2 \alpha \equiv 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$

2. $\operatorname{tg}^2 \alpha \equiv \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$

3. $\cot \alpha \equiv \dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha}$

4. $\csc^2 \alpha \equiv \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$

5. $\sec \alpha \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$

6. $\sec \alpha \equiv \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$

UNIDAD XIV

FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES.

Introducción

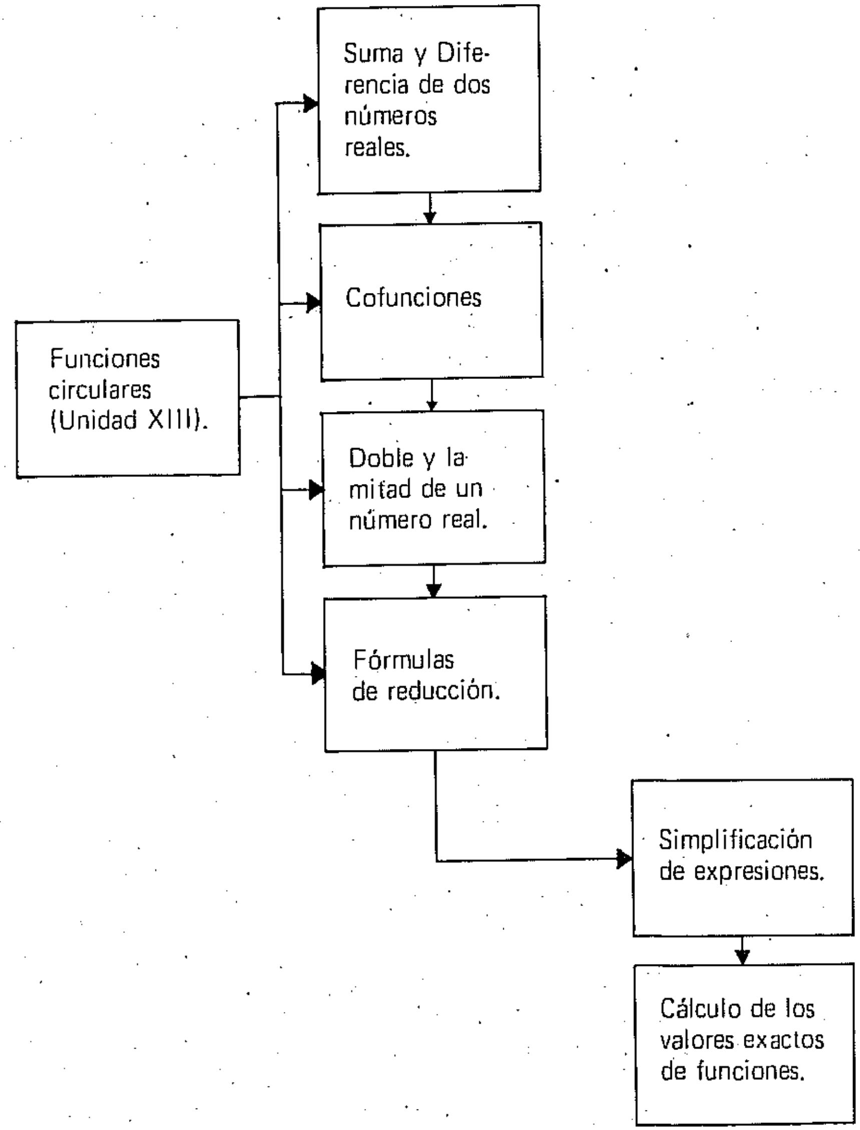
En esta unidad se tratan las funciones circulares de la suma y diferencia de dos números reales, y del doble y la mitad de un número real. Asimismo se presenta el concepto de cofunción y su empleo en las fórmulas de reducción, las cuales constituyen una herramienta adecuada para la simplificación de expresiones que contengan funciones circulares.

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Determinará las expresiones de las funciones circulares de una suma y de una diferencia de números reales.
2. Determinará las expresiones de las funciones circulares del doble y la mitad de un número real.
3. Aplicará las fórmulas de reducción a problemas propuestos.
4. Calculará los valores exactos de funciones de múltiplos y submúltiplos de π.
5. Utilizará las identidades trigonométricas en la simplificación de algunas expresiones complicadas.

Diagrama temático estructural



Glosario

Cofunción: La cofunción de un número cualquiera es igual a la función $\pi/2$ menos el número.

Angulo: Abertura comprendida entre dos semirectas que parten de un punto y tiene una medida que corresponde a la magnitud de la rotación necesaria, para llevar una de las semirectas desde su posición original hasta la posición de la otra.

Angulo en Revoluciones: Su magnitud está determinada por la razón entre la longitud s del arco interceptado y la longitud de la circunferencia, o sea:

$$\text{Angulo en revoluciones} = \frac{s}{2\pi r}$$

Angulo en Grados: Sistema sexagecimal utilizado en aplicaciones prácticas, cuya unidad fundamental es el grado. La magnitud de un ángulo en grados está dada por la relación:
Angulo en grados =, (número de revoluciones) (360°).

Angulo de Radianes: Sistema más utilizado en matemáticas, cuya unidad fundamental es el radián. Si la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, deducimos inmediatamente que:
Angulo en radianes = (número de revoluciones) (2π).

Igualdad: Expresión de la equivalencia de dos cantidades.

Ecuación: Proposición de igualdad válida sólo para determinados valores de las letras que aparecen en ella.

Identidad: Proposición de igualdad válida para todos los valores permisibles de las letras que aparecen en ella.

Identidad Trigonométrica: Proposición de igualdad entre funciones trigonométricas válida para todos los valores permisibles de θ.

Valores Permisibles: Son aquellos para los cuales ambos miembros de la igualdad están definidos.

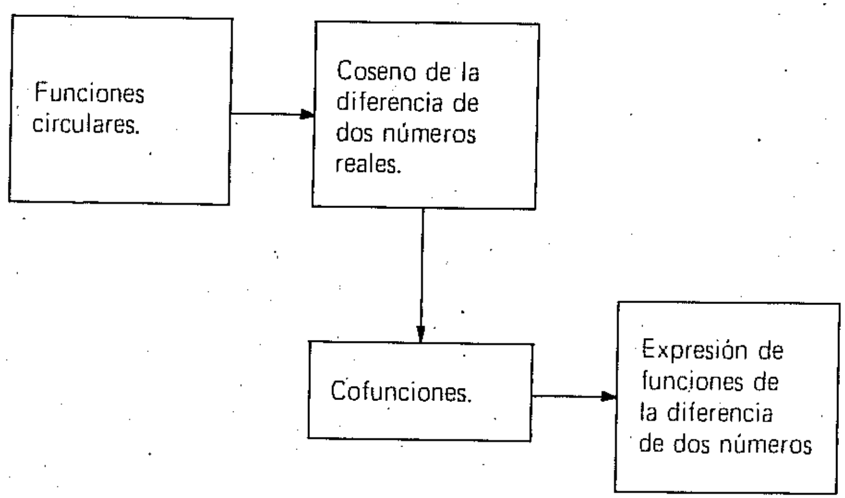
Módulo 5

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Deducirá la expresión para el coseno de la diferencia de dos números reales.
2. Conocidos los valores de dos números α y β, desarrollará el conseno de la correspondiente diferencia y determinará su valor.
3. Identificará las cofunciones.
4. Demostrará que una función circular de un número real β es igual a su cofunción de $\pi/2$ menos el número β.
5. Expresará funciones de la diferencia de dos números como una función de β, usando la propiedad que relaciona a las cofunciones y representando las funciones de $(-\beta)$ en términos de β.

ESQUEMA – RESUMEN



5.1 COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS NUMEROS.

Demostración de la expresión para $\cos(\alpha - \beta)$.

¿En una circunferencia unitaria cómo podemos determinar la longitud de una cuerda?

Para lograr esta meta, le mostraremos primero cómo determinar la longitud de una cuerda en la circunferencia unitaria. En la Figura 1 tenemos: una circunferencia unitaria con centro en **O**.

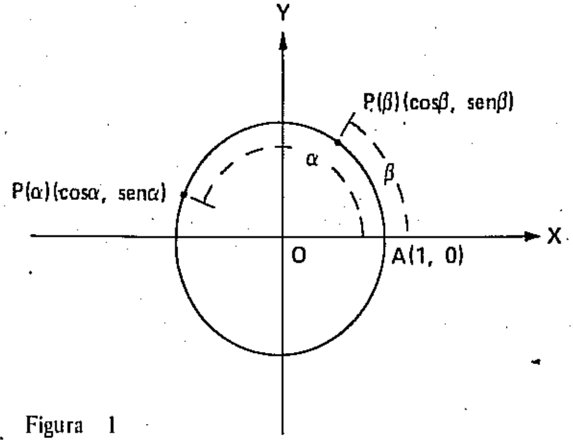


Figura 1

Observemos los arcos P(α) y (β).

$P(\alpha)$, punto terminal de un arco de longitud α, $P(\beta)$ punto terminal de un arco de longitud β, el arco determinado por los puntos $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ tiene magnitud igual $\alpha - \beta$. El segmento de recta que une estos dos puntos es una cuerda de la circunferencia. (Figura 2).

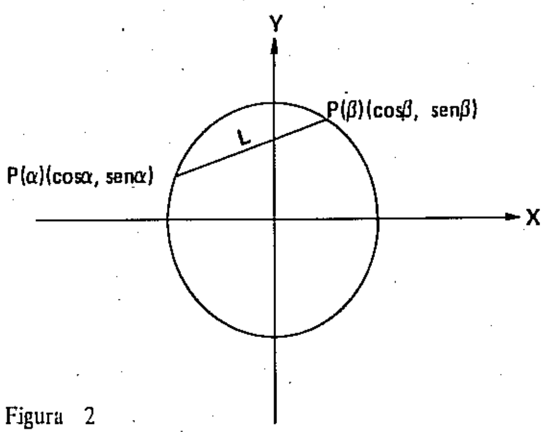


Figura 2

Determinación de la longitud de la cuerda.

La longitud de dicha cuerda, es la distancia entre sus puntos extremos; como la distancia entre dos puntos del plano está dada por la expresión

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Asignemos el subíndice **2** a las coordenadas de $P(\alpha)$ y el subíndice **1** a las coordenadas de $P(\beta)$, para obtener

$$L = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2}$$

elevando al cuadrado cada binomio dentro del radical tenemos que:

$$L = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta}$$

agrupando

$$L = \sqrt{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

como para todo $\gamma \in R$ $\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$ resulta: γ (gamma)

$$L = \sqrt{1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

sumando y sacando de factor a **−2**

$$L = \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)} \qquad (1)$$

Ahora consideremos una cuerda de la misma longitud **L** de tal manera que uno de sus extremos coincida con el punto **A (1, 0)** (Figura 3).

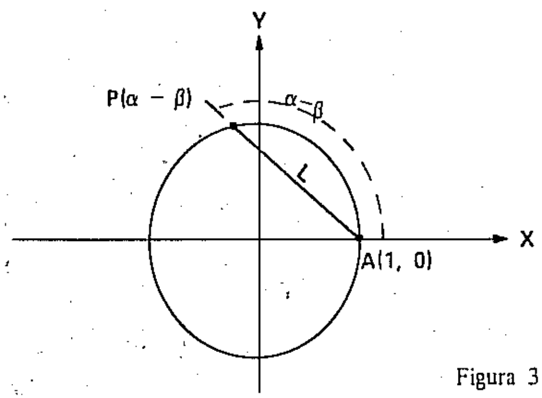


Figura 3

Medida del arco determinado por una cuerda.

"El arco determinado por esta cuerda mide también $(\alpha - \beta)$ unidades porque en un mismo círculo a cuerdas iguales corresponden arcos iguales y viceversa".

En esta posición los extremos de la cuerda son los puntos $A(1, 0)$ y $P(\alpha - \beta)$ este último con coordenadas $(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$. Aunque la longitud de la cuerda sigue siendo la misma podemos obtener otra expresión para ella estableciendo la distancia entre sus puntos extremos hagámoslo asignando el subíndice 2 a las coordenadas del punto terminal $P(\alpha - \beta)$ y el subíndice 1 a las coordenadas del punto A.

$$L = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2}$$

elevando al cuadrado dentro del radical tenemos:

$$L = \sqrt{\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)}$$

agrupando

$$L = \sqrt{[\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)] + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

pero $\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) \equiv 1$ entonces;

$$L = \sqrt{1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

ó $$L = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)} \qquad (2)$$

Hemos derivado dos expresiones (1) y (2) para representar un mismo número L.

$$(1)\quad L = \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}$$

$$(2)\quad L = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

por lo que

$$\sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)} = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad para eliminar los radicales resulta:

$$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$-2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = -2\cos(\alpha - \beta)$$ cancelación para suma

y multiplicando ambos miembros de la igualdad por el recíproco de -2 ó sea por $-\frac{1}{2}$ obtenemos

$$\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha - \beta)$$

y por la propiedad simétrica de las igualdades

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Coseno de la diferencia de dos arcos.

Esta igualdad expresa el coseno de una diferencia (resta) en términos de α y de β y como se cumple para todos los valores de $\alpha \in R$ y de $\beta \in R$, es una identidad, por lo que tendrá cuidado de escribirla correctamente $(\equiv)$.

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Ejemplo: Si $\alpha = 2 \quad \beta = \sqrt{3}$

$$\cos(2 - \sqrt{3}) = \cos 2\cos\sqrt{3} + \operatorname{sen} 2\operatorname{sen}\sqrt{3}$$

Ejemplo: Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \beta = -5$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (-5)\right] = \cos\frac{\pi}{2}\cos(-5) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(-5)$$

Ejemplo: Usando la expresión $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ desarrolla $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ y determina su valor sustituyendo los valores exactos de las funciones obtenidas.

Solución:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

nota que $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{15\pi - 2\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

entonces $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 13\frac{\pi}{12}$

por lo que $\cos 13\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

5.2 COFUNCIONES

¿Qué son las cofunciones?

Una simple observación de los nombres de las funciones que está estudiando, le permitirá notar que se pueden agrupar por pares de modo que en cada par el nombre de una de ellas se forme anteponiendo el prefijo "co" al nombre de la otra.

seno, co seno	tangente co tangente	secante co secante

Las funciones así relacionadas son llamadas **cofunciones.**

La función **seno** es la cofunción de la función **coseno,** y **coseno** es la cofunción de **seno** también t **tangente** y **cotangente** son cofunciones cada una de la otra y lo mismo sucede con las funciones **secante** y **cosecante.** Además del nombre, existe una propiedad que relaciona a las cofunciones mediante la cual es posible expresar cualquier función circular de un número real en términos de una función de un número real α tal que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Para mostrárselo partimos de la expresión:

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Si la expresión es válida para todo valor permisible de α y β lo es cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Empleo de la propiedad de las cofunciones.

Entonces:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta$$

dado que

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv 0 \cdot \cos\beta + 1 \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv 0 + \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

Siendo esta igualdad una identidad, se cumple para todo $\beta \in R$, Como $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \in R$, si sustituimos β por $\frac{\pi}{2} - \beta$ obtenemos:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad \text{propiedad de cofunciones}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta\right) \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad -(a - b) = -a + b$$

$$\cos(0 + \beta) \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad a - a = 0$$

$$\cos\beta \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad (2)$$

Consideremos las igualdades (1) y (2), tenemos

(1) $\operatorname{sen}\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ (2) $\cos\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

si dividimos (2) entre (1) resulta

$$\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} \equiv \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \qquad \operatorname{sen}\beta \neq 0$$

por lo que $\cot\beta \equiv \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ (3)

Si ahora dividimos (1) entre (2) resulta

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \equiv \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$$

entonces $\operatorname{tg}\beta \equiv \cot\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ (4)

Sabemos que para todo $a, b \in R$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

$$a = b \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

Es decir si dos números reales distintos de cero son iguales, entonces sus recíprocos también lo son; aplicando esta propiedad de los números reales en los casos particulares (1) y (2) tenemos:

$$\operatorname{sen}\beta \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \quad \text{y} \quad \cos\beta \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \equiv \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\cos\beta} \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$$

o sea $\csc\beta \equiv \sec\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ (5) y $\sec\beta \equiv \csc\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ (6)

De las igualdades (1) a (6) se concluye que:

Una función circular de un número real β es igual a su cofunción de $\frac{\pi}{2}$ menos el número β.

5.2.1 FUNCIONES DE $(-\beta)$ EN TERMINOS DE β

Analicemos que sucede si sustituimos β por $(-\beta)$.

De nuevo consideremos la expresión

$$\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

y hagamos $\alpha = 0$, entonces

$$\cos(0-\beta) \equiv \cos 0 \cos\beta + \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen}\beta$$

dado que $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$ tenemos que

$$\cos(-\beta) \equiv 1 \cdot \cos\beta + 0 \cdot \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(-\beta) \equiv \cos\beta$$

Esto significa que en el caso de la función coseno el número real $(-\beta)$ puede ser sustituido por su negativo β sin afectar el valor de la función.

Determinemos ahora una expresión para $\operatorname{sen}(-\beta)$ en términos de β

$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv \cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\beta)\right]$ propiedad de cofunciones

$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ $-(-a) = a$

$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv \cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$ postulado conmutativo para la suma

$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv \cos\left[\beta-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ $a \equiv -(-a)$

$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv \cos\beta\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

como $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ sustituyendo tenemos

$$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv \cos\beta \cdot 0 + \operatorname{sen}\beta \cdot (-1)$$

$$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv 0 - \operatorname{sen}\beta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(-\beta) \equiv -\operatorname{sen}\beta}$$

Las expresiones del resto de las funciones de $(-\beta)$ en términos de β resultan ahora en forma bastante simple.

$$\operatorname{tg}(-\beta) \equiv \frac{\operatorname{sen}(-\beta)}{\cos(-\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(-\beta) \equiv \frac{-\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(-\beta) \equiv -\operatorname{tg}\beta}$$

$$\cot(-\beta) \equiv \frac{1}{\operatorname{tg}(-\beta)} \equiv \frac{1}{-\operatorname{tg}\beta} \equiv -\cot\beta$$

$$\boxed{\cot(-\beta) \equiv -\cot\beta}$$

$$\sec(-\beta) \equiv \frac{1}{\cos(-\beta)} \equiv \frac{1}{\cos\beta} \equiv \sec\beta$$

$$\boxed{\sec(-\beta) \equiv \sec\beta}$$

$$\csc(-\beta) \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}(-\beta)} \equiv \frac{1}{-\operatorname{sen}\beta} \equiv -\csc\beta$$

$$\boxed{\csc(-\beta) \equiv -\csc\beta}$$

Ejemplo: Usando la propiedad que relaciona a las cofunciones y representando las funciones de $(-\beta)$ en términos de β expresa $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$ como una función de β

Solución:

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi - \beta\right)$	$\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$
$\equiv \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} + (\pi - \beta)\right]$	Agrupando $\pi - \beta$
$\equiv \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \left\langle -(\pi - \beta)\right\rangle\right]$	$\pi - \beta = -\left[-(\pi - \beta)\right]$
$\equiv \cos\left\langle -(\pi - \beta)\right\rangle$	propiedad de cofunciones
$\equiv \cos(\pi - \beta)$	$\cos(-\alpha) \equiv \cos\alpha$
$\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \beta\right)$	$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
$\equiv \cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]$	Agrupando $\frac{\pi}{2} - \beta$
$\equiv \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left\langle -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\rangle\right]$	$\frac{\pi}{2} - \beta \equiv -\left\langle -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\rangle$
$\equiv \operatorname{sen}\ -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$	propiedad de cofunciones
$\equiv -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$	$\operatorname{sen}(-\alpha) \equiv -\operatorname{sen}\alpha$
$\equiv -\cos\beta$	$\cos\beta \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$
$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \equiv -\cos\beta$	transitiva de igualdades

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.– Básandose en la expresión $\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ en los problemas de la a) a la j) desarrolle el coseno de la correspondiente diferencia y determine su valor sustituyendo los valores exactos de las funciones que resulten.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $\cos\left[\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

f) $\cos\left[\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{3\pi}{2}\right]$

g) $\cos\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right)$

h) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$

i) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right)$

j) $\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

2.– Exprese las siguientes funciones en términos de β

a). $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

b). $\csc(\pi - \beta)$

c). $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$

d). $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ NOTA $\beta \equiv -(-\beta)$

e). $\operatorname{sen}(\alpha - \pi)$ NOTA $\alpha - \pi \equiv -(\pi - \alpha)$

3. Verifique las siguientes identidades:

a) $\cos(\pi - \alpha) \equiv -\cos\alpha$

b) $\cos(2\pi - \alpha) \equiv \cos\alpha$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \equiv -\operatorname{sen}\alpha$

d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \equiv \operatorname{sen}\alpha$

e) $\cos(\pi + \alpha) \equiv -\cos\alpha$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv \operatorname{sen}\alpha$

g) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \equiv -\operatorname{sen}\alpha$

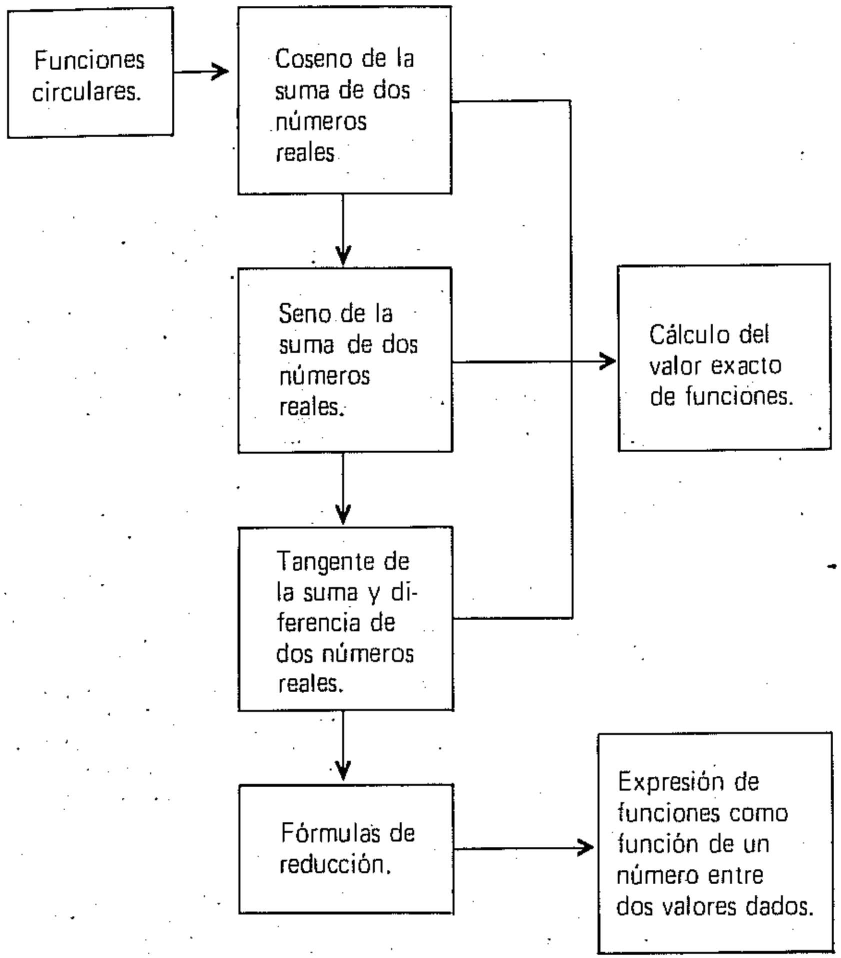
Módulo 6

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Deducirá la expresión para el coseno de la suma de dos números reales.
2. Deducirá la expresión para el seno de la suma de dos números reales.
3. Deducirá las expresiones para la tangente de la suma y la tangente de una diferencia de dos números reales.
4. Calculará el valor exacto de funciones de números reales que puedan ser expresados a su vez como la suma o diferencia de dos números reales.
5. Expresará funciones del tipo $(\alpha + \theta)$ ó $(\alpha - \theta)$ en términos de θ.
6. Expresará funciones circulares de un número real en términos de funciones de otro número entre **0** y π/α utilizando las fórmulas de reducción.

ESQUEMA – RESUMEN



6.1 FUNCIONES CIRCULARES DE LA SUMA DE NUMEROS REALES.

Vamos a determinar expresiones para funciones circulares de la suma o diferencia de dos números reales, que son también una consecuencia de la igualdad $\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ y comenzaremos por el coseno de una suma.

Ahora sumemos dos números reales α y β.

Ya que

$\cos(\alpha+\beta) \equiv \cos[\alpha-(-\beta)]$	$\beta \equiv -(-\beta)$
$\equiv \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$	desarrollo de $\cos(\alpha-\beta)$
$\equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\beta)$	$\cos(-\beta) \equiv \cos\beta$, $\operatorname{sen}(-\beta) \equiv -\operatorname{sen}\beta$
$\equiv \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$a(-b) \equiv -(ab)$
$\boxed{\cos(\alpha+\beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$	propiedad transitiva de las igualdades

La función coseno será. . .

Las expresiones para el seno de la suma y el seno de la diferencia de números reales resultan de las expresiones obtenidas de la función coseno, del concepto de cofunción y de las funciones de $(-\beta)$ en términos de β

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \equiv \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]$	propiedad de cofunciones
$\equiv \cos\left[\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right]$	$-(a-b) \equiv -a+b$
$\equiv \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]$	agrupaciones
$\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta$	desarrollo de $\cos(\alpha-\beta)$
$\equiv \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	sustitución
$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	propiedad transitiva de igualdades

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \equiv \operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

La función seno será. . .

como: $\cos(-\beta) \equiv \cos\beta$, $\operatorname{sen}(-\beta) \equiv -\operatorname{sen}\beta$ Sustituyendo tenemos:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,(-\text{sen}\beta)$$

$$\boxed{\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta}$$

Deduciremos ahora las expresiones para tangente de una suma y tangente de una diferencia:

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos\,(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta + \cos\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta} + \dfrac{\cos\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta}}{\dfrac{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta} - \dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\beta} + \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\,\beta}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}\cdot\dfrac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

La función tangente será. . .

$$\boxed{\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}}$$

De una manera similar a la anterior, concluya usted mismo que:

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$$

Ejemplo 1: Encuentre el valor exacto de: a) $\text{sen}\,\frac{\pi}{12}$

b) $\cos\,\frac{\pi}{12}$ c) $\text{tg}\,\frac{\pi}{12}$

Sustituyendo $\frac{\pi}{12}$ por $\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}$

Solución: a) $\text{sen}\,\frac{\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)$

$$= \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\,\cos\,\frac{7\pi}{4} - \cos\,\frac{11\pi}{6}\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Solución: b) $\cos\,\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)$

$$= \cos\,\frac{11\pi}{6}\,\cos\frac{7\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Solución: c) $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = \text{tg}\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\text{tg}\,\frac{11\pi}{6} - \text{tg}\,\frac{7\pi}{4}}{1 + \text{tg}\frac{11\pi}{6}\,\text{tg}\,\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - (-1)}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-1)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \qquad \therefore \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Ejemplo 2: Si $\cot\alpha = \frac{4}{3}$ y $\sec\beta = \frac{13}{5}$, $P(\alpha)$ no está en el tercer cuadrante y $\frac{3\pi}{2} < \beta \leq 2\pi$ encuentre los valores exactos de:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha+\beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

Solución:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) \equiv \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Estas tres igualdades nos muestran que la respuesta del problema depende de los valores de $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$; determinemos entonces dichos valores.

Dado que

$\cot\alpha \equiv \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$ tenemos que

$\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \equiv \dfrac{4}{3}$ por lo que

$\cos\alpha = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha$ sustituyendo en $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \equiv 1$ tenemos

$(\frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ o bien

$$\frac{16}{9}\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

$$16\operatorname{sen}^2\alpha + 9\operatorname{sen}^2\alpha = 9$$

$$25\operatorname{sen}^2\alpha = 9$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \text{ ó } \operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$$

$\cot\alpha$ es positiva $(\cot\alpha > 0)$ en el primer cuadrante y en el tercero como $P(\alpha)$ no está en el tercer cuadrante entonces está en el primero, en este cuadrante $\operatorname{sen}\alpha > 0$ por lo que descartamos $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$ quedando entonces $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y sustituyendo en $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ tenemos:

$$\cos^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ ó } \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

como $P(\alpha)$ es un punto del primer cuadrante $\cos\alpha$ es positivo por lo que.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Determinemos ahora lo concerniente al arco β; tenemos que $\sec\beta = \frac{13}{5}$ por lo que $\cos\beta = \frac{5}{13}$. Sustituyendo en $\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta = 1$. tenemos

$$\frac{25}{169} + \operatorname{sen}^2\beta = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\beta = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\operatorname{sen}^2\beta = \frac{169-25}{169}$$

$$\text{sen}^2\beta = \frac{144}{169}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{12}{13} \text{ ó } \text{sen}\,\beta = -\frac{12}{13}$$

$\frac{3\pi}{2} \leq \beta \leq 2\pi$, o sea $P(\beta)$ está en el cuarto cuadrante en el que $\text{sen}\,\beta$ es negativo, por ello descartamos $\text{sen}\beta = \frac{12}{13}$ y queda

$$\text{sen}\,\beta = -\frac{12}{13}$$

Hasta aquí hemos determinado:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{sen}\,\beta = -\frac{12}{13}$$

$$\cos\,\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\,\beta = \frac{5}{13}$$

por consecuencia $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ y $\text{tg}\,\beta = -\frac{12}{5}$

Sustituyendo en las expresiones

$\text{sen}\,(\alpha+\beta)$, $\cos\,(\alpha+\beta)$ y $\text{tg}\,(\alpha-\beta)$ tenemos

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{33}{65}$$

$$\cos\,(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$$

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{12}{5}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{36}{20}} = \frac{\frac{63}{20}}{\frac{16}{20}} = -\frac{63}{16}$$

Nota que $\text{sen}(\alpha+\beta) < 0$ y que $\cos(\alpha+\beta) > 0$ por lo que podemos asegurar que $P(\alpha+\beta)$ es un punto en el cuarto cuadrante.

Ejemplo 3. Expresar las siguientes proposiciones en términos de una función circular de θ.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$ b) $\cot\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$

Solución: a) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \equiv \cos\frac{\pi}{6}\cos\,\theta - \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\,\text{sen}\,\theta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\,\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

b) $$\cot\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) \equiv \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$\equiv \frac{1}{\frac{\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} - \text{tg}\,\theta}{1 + \text{tg}\,\frac{3\pi}{4}\,\text{tg}\,\theta}}$$

$$\equiv \frac{1 + \text{tg}\,\frac{3\pi}{4}\,\text{tg}\,\theta}{\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} - \text{tg}\,\theta}$$

$$\equiv \frac{1 + (-1)\,\text{tg}\theta}{-1 - \text{tg}\,\theta}$$

$$\equiv \frac{1 - \text{tg}\theta}{-1 - \text{tg}\theta}$$

$$\equiv \frac{\text{tg}\theta - 1}{\text{tg}\theta + 1}$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) \equiv \frac{\text{tg}\,\theta - 1}{\text{tg}\,\theta + 1}$$

6.2 FORMULAS DE REDUCCION.

En este tema debe aprender a expresar las funciones circulares de un número real en términos de funciones de otro número entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ valiéndose de expresiones conocidas como fórmulas de reducción; para aceptar dichas fórmulas primero debemos entender que si $K \in I$ entonces

Estudiemos ahora las fórmulas de reducción.

$$\text{sen}\,2k\,\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \cos\,2k\,\frac{\pi}{2} = (-1)^k$$

Siendo k un número entero, el punto terminal $P(k\pi)$ del arco $k\pi$ es el punto $A(1, 0)$ ó el punto $B(-1, 0)$ (Ver Figura 4).

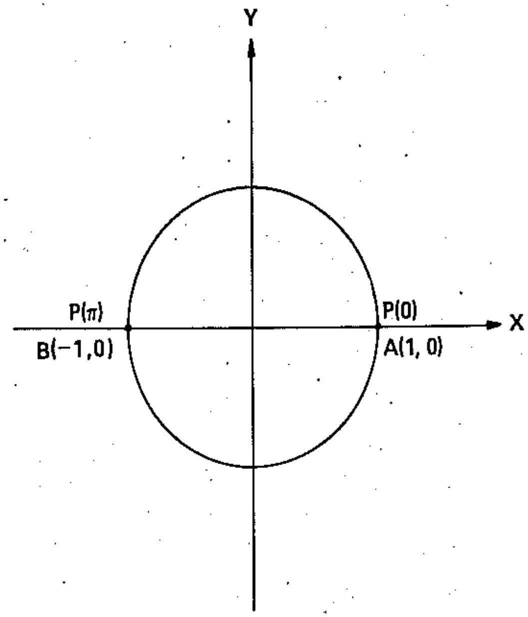


Figura 4

El punto terminal del arco $k\pi$ es el punto $A(1, 0)$ cuando k es un número par ó cero $(P(0), P(2\pi), P(-4\pi), P(-10\pi)$ etc. El punto terminal $P(k\pi)$.

Si k es par, cero ó impar...

coincide con el punto $B(-1, 0)$ si k es un número impar $(P(\pi), P(3\pi), P(-5\pi)$ $P(-11\pi)$, $P(-\pi)$ etc.) en cualquiera de los dos casos anteriores la ordenada del punto terminal es cero por lo que $\operatorname{sen} k\pi = 0, k \in I$ además $\cos (k\pi) = (-1)^k$ ya que si k es par ó cero (el punto terminal coincide con A) $(-1)^k = 1$, mientras que cuando k es impar (el punto terminal coincide con B) $(-1)^k = -1$, por consecuencia

si $k \in I$ $\quad \operatorname{sen} k\pi = 0$ $\quad$ y $\quad \cos k\pi = (-1)^k$

y como $k\pi = 2k\frac{\pi}{2}$ entonces

$$\operatorname{sen} 2k\frac{\pi}{2} = 0 \text{ y } \cos 2k\frac{\pi}{2} = (-1)^k,\ k \in I$$

Ahora bien, si β es un número entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$ entonces

$$\operatorname{sen}\left[2k\frac{\pi}{2} + \beta\right] \equiv \operatorname{sen} 2k\frac{\pi}{2}\cos\beta + \cos 2k\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta$$

$$\equiv 0 \cdot \cos\beta + (-1)^k \operatorname{sen}\beta$$

$$\equiv (-1)^k \operatorname{sen}\beta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\left[2k\frac{\pi}{2} + \beta\right] \equiv (-1)^k \operatorname{sen}\beta} \qquad (1)$$

también

$$\cos\left[2k\frac{\pi}{2} + \beta\right] \equiv \cos 2k\frac{\pi}{2}.\cos\beta - \operatorname{sen} 2k\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta$$

$$\equiv (-1)^k \cos\beta - 0 \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\equiv (-1)^k \cos\beta$$

$$\boxed{\cos\left[2k\frac{\pi}{2} + \beta\right] \equiv (-1)^k \cos\beta} \qquad (2)$$

Estas dos expresiones son utilizadas cuando el número puede representarse como la suma de un múltiplo par de $\frac{\pi}{2}$ más β. Observe que en estos casos la función no cambia, pero el signo que le antecede sí puede alterarse.

El signo puede ser (+) o (−)

Consideremos ahora el caso en que el número puede expresarse como la suma de un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ $\left(\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right]\right)$ y β

$$\operatorname{sen}\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2} + \beta\right] \equiv \operatorname{sen}\left[2k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \beta\right] \quad \text{distributiva a la derecha}$$

$$\equiv \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} + 2k\frac{\pi}{2} + \beta\right] \quad \text{conmutativa}$$

$$\equiv \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} + \left(2k\frac{\pi}{2} + \beta\right)\right] \quad \text{agrupación}$$

$$\equiv \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)+\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

desarrollo del seno de una suma

$$\equiv 1\cdot\cos\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)+0\cdot\operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

$$\equiv \cos\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

$$\equiv (-1)^k\cos\beta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\beta\right]\equiv(-1)^k\cos\beta} \qquad (3)$$

también

$$\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\beta\right]\equiv\cos\left[2k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\beta\right]$$

$$\equiv\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right]$$

$$\equiv\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

$$\equiv 0\quad\cos\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)-1.\operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

$$\equiv-\operatorname{sen}\left(2k\frac{\pi}{2}+\beta\right)$$

$$\equiv(-1)^k\operatorname{sen}\beta$$

ó bien

$$\boxed{\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\beta\right]\equiv(-1)^{k+1}\operatorname{sen}\beta} \qquad (4)$$

También en este caso hay que seguir el signo.

Debe notar que en los casos (3) y (4) en que el número se expresa como un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ más β, la función pasa a su cofunción y el signo que antecede a la función puede cambiar, de positivo a negativo y de negativo a positivo.

Ejemplo 1. Expresar sen **7.2910** como una función de un número entre **0** y $\frac{\pi}{4}$;

$$\pi=3.1416,\ \frac{\pi}{2}=1.5708,\ \frac{\pi}{4}=0.7854$$

Solución: $7.2910=4\cdot\frac{\pi}{2}+1.0078$

como el coeficiente de $\frac{\pi}{2}$ es par, nos valemos de la expresión (1) entonces

$$\operatorname{sen}7.2910=\operatorname{sen}\left(4\frac{\pi}{2}+1.0078\right)$$

$$=(-1)^k\operatorname{sen}1.0078 \qquad \text{como } 2k=4,\ k=2$$

$$2=(-1)^2\operatorname{sen}1.0078$$

$$=\operatorname{sen}1.0078$$

por lo que

$$\operatorname{sen}7.2910=\operatorname{sen}1.0078$$

1.0078 es menor que $\frac{\pi}{2}$ pero se exige que el número sea positivo y menor que $\frac{\pi}{4}$ para lograrlo hacemos uso de la propiedad de cofunciones.

$$\operatorname{sen}1.0078=\cos\left(\frac{\pi}{2}-1.0078\right)$$

$$=\cos(1.5708-1.0078)$$

$$=\cos 0.5630$$

finalmente

$$\operatorname{sen}1.0078=\cos 0.5630$$

Ejemplo 2. Expresar **cos 21.6973** como una función de un número positivo menor que $\frac{\pi}{4}$;

Solución: como en el ejemplo anterior

$$21.6973=13\,(1.5708)+1.2769$$

el coeficiente de $\frac{\pi}{2}$ es **13**, número impar por lo que aplicamos la expresión (4).

$$\cos 21.6973=\cos\left[13\frac{\pi}{2}+1.2769\right]$$

$$= (-1)^{k+1} \text{ sen } 1.2769$$

$$= (-1)^7 \text{ sen } 1.2769$$

$$= - \text{ sen } 1.2769$$

$$= - \cos \left[\frac{\pi}{2} - 1.2769\right]$$

$$= - \cos (1.5708 - 1.2769)$$

$$= - \cos 0.2939$$

$$\cos 21.6937 = - \cos 0.2939$$

Ejemplo 3. Expresar $\cot 7.3284$ como una función de un número positivo menor de

$$\cot 7.3284 = \frac{\cos 7.3284}{\text{sen } 7.3284}$$

$$= \frac{\cos \left[\frac{4\pi}{2} + 1.0542\right]}{\text{sen } \left[\frac{4\pi}{2} + 1.0542\right]}$$

$$= \frac{(-1)^2 \cos 1.0542}{(-1)^2 \text{ sen } 1.0542}$$

$$= \cot 1.0542$$

$$= \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 1.0542\right)$$

$$\cot 7.3284 = \text{tg } 0.5166$$

REACTIVOS DE AUTO-EVALUACION

1. Encuentre el valor exacto de

   $\text{sen } \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ y $\text{tg } \frac{\pi}{12}$ haciendo $\frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}$

2. Encuentre el valor exacto de $\cos \frac{19\pi}{12}$, $\text{sen } \frac{19\pi}{12}$ y $\text{tg } \frac{19\pi}{12}$ haciendo $\frac{19\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}$

3. Encuentre el valor exacto de seno, coseno y tangente de $\frac{5\pi}{12}$ haciendo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

4. Encuentre el valor exacto de seno, coseno y tangente de $\frac{11\pi}{12}$ haciendo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$

5. Si $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos \beta = \frac{24}{25}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ encuentre el valor numérico de:

   a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos (\alpha - \beta)$ c) $\text{tg } (\alpha + \beta)$

   d) $\cos (\alpha + \beta)$ e) $\text{sen } (\alpha - \beta)$ f) $\text{tg } (\alpha - \beta)$

6. Si $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ y $\cot \beta = \frac{40}{9}$, $P(\alpha)$ no está en el tercer cuadrante y $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, encuentre el valor numérico de:

   a) $\text{sen } (\alpha + \beta)$ b) $\text{tg } (\alpha + \beta)$ c) $\cos (\alpha - \beta)$

   d) $\cos (\alpha + \beta)$ e) $\text{sen } (\alpha - \beta)$ f) $\text{tg } (\alpha - \beta)$

7. Si $\csc \alpha = \frac{5}{4}$ y $\sec \beta = \frac{5}{3}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, $\frac{3\pi}{2} \leq \beta \leq 2\pi$, encuentre el valor numérico de:

   a) $\text{sen } (\alpha + \beta)$ b) $\text{tg } (\alpha + \beta)$ c) $\cos (\alpha - \beta)$

   d) $\cos (\alpha + \beta)$ e) $\text{sen } (\alpha - \beta)$ f) $\text{tg } (\alpha - \beta)$

8. Determine en qué cuadrante se localizan los puntos $P(\alpha + \beta)$ y $P(\alpha - \beta)$ de los problemas 5, 6 y 7.

9. Escribe cada una de las expresiones siguientes en términos de θ solamente

a) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$

b) $\text{sen } \left(-\frac{\pi}{4} + \theta\right)$

c) $\text{tg } \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$

d) $\cot \left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$

e) $\sec \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

f) $\csc\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

g) $\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

Verifica las siguientes identidades:

10.

a) $\cot(\alpha - \beta) \equiv \dfrac{1 + \cot\alpha \cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha}$

b) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0$

c) $\operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \equiv \sqrt{3}\ \operatorname{sen}\beta$

d) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \equiv \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \equiv \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

11. Expresa cada una de las siguientes funciones en términos de funciones de un número real α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} = 0.7854$.

a) $\operatorname{sen} 3$

b) $\cos 5.5676$

c) $\operatorname{tg} 12.7060$

d) $\cos 4$

e) $\cos(-4.4331)$

f) $\operatorname{sen}(-4.4337)$

g) $\operatorname{sen}(-10.9080)$

h) $\operatorname{tg}(-17.5322)$

i) $\operatorname{tg} 5.1212$

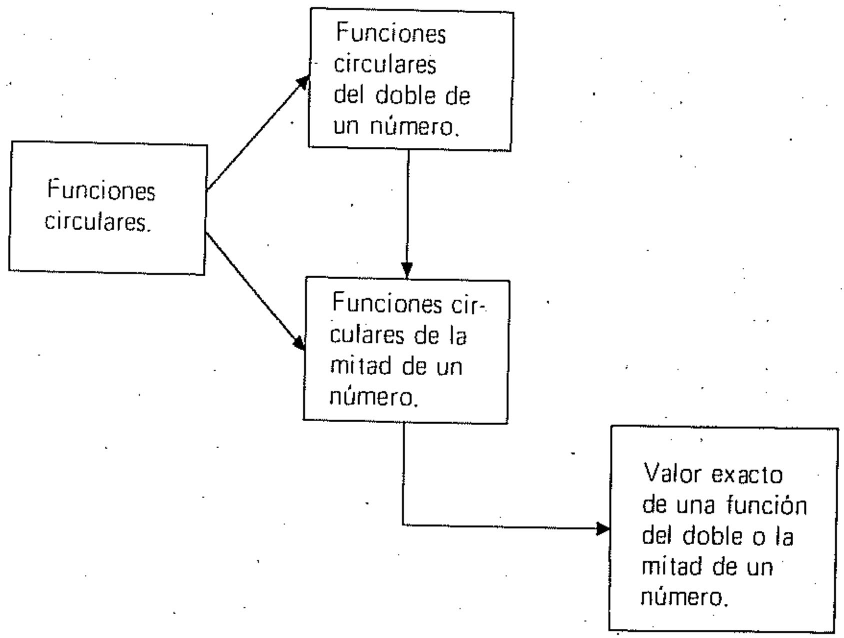
Módulo 7

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Deducirá la expresión para el seno del doble de un número.
2. Deducirá las tres expresiones para el coseno del doble de un número.
3. Deducirá la expresión para la tangente del doble de un número.
4. Deducirá la expresión para el seno de la mitad de un número.
5. Deducirá la expresión para el coseno de la mitad de un número.
6. Deducirá las dos expresiones para la tangente de la mitad de un número.
7. Determinará el valor exacto de una función del doble o la mitad de un número conocida una función de este número y la posición del punto terminal.

ESQUEMA – RESUMEN



7.1 FUNCIONES CIRCULARES DEL DOBLE DE UN NUMERO.

Estudiemos las funciones circulares del doble de un número.

El propósito de este apartado, es derivar y darle a conocer las expresiones más usuales de las funciones del doble de un número en términos de funciones del número, sea α un número real, 2α obviamente es el doble del número α; queremos expresar **sen2α, cos2α** y **tg2α** en términos de funciones de α, entonces:

$$\begin{aligned} \text{sen } 2\alpha &\equiv \text{sen } (\alpha + \alpha) \\ &\equiv \text{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \,\text{sen}\alpha \\ &\equiv \text{sen}\alpha \cos\alpha + \text{sen}\alpha \cos\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{sen } 2\alpha \equiv 2 \,\text{sen}\alpha \cos\alpha}$$

Hay una expresión para el seno de 2α.

ahora,

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &\equiv \cos (\alpha + \alpha) \\ &\equiv \cos\alpha \cos\alpha - \text{sen}\alpha \,\text{sen}\alpha \\ &\equiv \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}$$

Además de esta expresión, es muy útil poder representar **cos2α** en términos de sólo **senα** ó sólo **cosα**, cosa que logramos fácilmente.

$$\text{si } \cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad \text{y} \quad \text{sen}^2\alpha \equiv 1 - \cos^2\alpha$$

sustituyendo tenemos:

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha \equiv 2 \cos^2\alpha - 1}$$

pero también

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad \text{y} \quad \cos 2\alpha \equiv 1 - \text{sen}^2\alpha$$

entonces:

$$\cos 2\alpha \equiv (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha \equiv 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha}$$

Tenemos tres expresiones para el coseno de 2α.

ó bien

$$\boxed{\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \equiv 2\cos^2\alpha - 1 \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha}$$

finalmente

$$\begin{aligned} \text{tg}2\alpha &\equiv \text{tg}(\alpha + \alpha) \\ &\equiv \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\alpha} \\ &\equiv \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{tg}2\alpha \equiv \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}}$$

La tangente de 2α es. . .

7.2 FUNCIONES CIRCULARES DE LA MITAD DE UN NUMERO EN TERMINOS DEL NUMERO.

Ahora veamos las funciones circulares de la mitad de un número.

Ahora, pretendemos proceder a la inversa de como lo hicimos en el tema anterior. Las funciones de un número $\frac{\alpha}{2}$ queremos expresarlas en términos de funciones de α ó **sea las funciones de un número en términos del doble de dicho número.**

Sabemos que $\cos 2\beta \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2\beta$, si hacemos $2\beta \equiv \alpha$ entonces $\beta = \frac{\alpha}{2}$ y sustituimos en la igualdad anterior tenemos:

$$\cos\alpha \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \equiv 1 - \cos\alpha$$

Obtención del seno de $\frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}} \quad \text{ó también} \quad \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}}$$

Obtención del coseno de $\frac{\alpha}{2}$

En esta expresión el signo se elige de acuerdo con el cuadrante donde esté el punto terminal del arco de longitud $\frac{\alpha}{2}$.

Si en la expresión

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

hacemos

$$2\beta = \alpha \text{ y } \beta = \frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos\alpha + 1 = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}} \quad \text{ó también} \quad \boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}}$$

También en este caso, el signo es el correspondiente al cuadrante en que esté ubicado el punto terminal del arco $\frac{\alpha}{2}$.

Para la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ existen dos expresiones que se obtienen usando las identidades

$$2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \quad \text{y} \quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

si en la igualdad

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

se multiplican ambos miembros de la fracción por $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ obtenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

pero como

$$2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \quad \text{y} \quad 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$$

sustituimos y resulta

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

Si en la igualdad

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

multiplicamos los dos miembros de la fracción por $2\cos\frac{\alpha}{2}$ tenemos:

La tangente de $\frac{\alpha}{2}$ tiene dos expresiones, que empleamos.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

también $2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \equiv \text{sen}\,\alpha$ y $2\cos^2\frac{\alpha}{2} \equiv 1 + \cos\alpha$

sustituyendo tenemos

$$\boxed{\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\text{sen}\,\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Si $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ y $P(\alpha)$ está en el segundo cuadrante, determine el valor exacto de las siguientes funciones:

a) $\text{sen}\,2\alpha$ c) $\text{tg}\,2\alpha$ e) $\cos\frac{\alpha}{2}$

b) $\cos 2\alpha$ d) $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$ f) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

2. Si $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ y $P(\alpha)$ está en el tercer cuadrante, encuentre el valor exacto de las siguientes funciones:

a) $\text{sen}\,2\alpha$ c) $\text{tg}\,2\alpha$ e) $\cos\frac{\alpha}{2}$

b) $\cos 2\alpha$ d) $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$ f) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

Verifique las siguientes identidades:

3. $\dfrac{\text{tg}\beta}{1 - \cos^2\beta} \equiv \csc 2\beta$

4. $\text{sen}\,3\theta \equiv 3\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^3\theta$

5. $\text{sen}\,2\alpha\,\text{tg}\alpha + \cos 2\alpha \equiv 1$

6. $\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}\,\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \equiv \sec\theta$

7. $\dfrac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} \equiv \cos 2\alpha$

8. $\left(\cos\frac{\beta}{2} - \text{sen}\,\frac{\beta}{2}\right)^2 \equiv 1 - \text{sen}\beta$

9. $\dfrac{\text{sen}\,4\alpha}{\text{sen}\,2\alpha} \equiv 2\cos 2\alpha$

10. $\text{tg}\,3\beta \equiv \dfrac{3\text{tg}\beta - \text{tg}^3\beta}{1 - 3\,\text{tg}^2\beta}$

11. $\csc\alpha - \cot\alpha \equiv \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

12. $\dfrac{\text{sen}2\theta\,\cos\theta}{(1+\cos 2\theta)(1+\cos\theta)} \equiv \text{tg}\,\frac{\theta}{2}$

13. $\dfrac{\cot\beta - \text{tg}\,\frac{\beta}{2}}{\text{tg}\,\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} \equiv \cos\beta$

14. $\dfrac{\text{sen}\,3\alpha}{\text{sen}\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} \equiv 2$

15. $\dfrac{1 + \text{tg}^2\beta}{2\,\text{tg}\beta} \equiv \csc 2\beta$

16. $\dfrac{\csc^2\alpha}{\cot^2\alpha - 1} \equiv \sec 2\alpha$

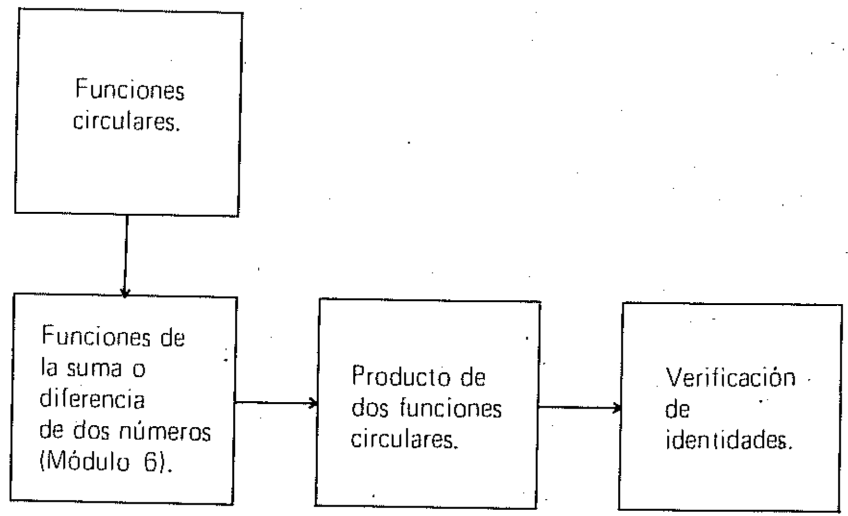
Módulo 8

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Expresará el producto de dos funciones circulares dadas como una suma o diferencia de funciones.
2. Expresará la suma o diferencia de dos funciones dadas como un producto de funciones.
3. Aplicará las transformaciones anteriores en la verificación de identidades.

ESQUEMA – RESUMEN



8.1 TRANSFORMACION DE PRODUCTOS A SUMAS Y VICEVERSA.

El producto de fracciones puede expresarse como suma o diferencia.

Con frecuencia se presenta la necesidad de expresar el producto de dos funciones circulares como una suma o diferencia de funciones, y viceversa; vamos a indicarle cómo afrontar este tipo de problemas. Consideremos las expresiones para el seno de la suma y el seno de la diferencia:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\,\alpha \;\cos\beta + \cos\alpha \;\text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) \equiv \text{sen}\,\alpha \;\cos\beta - \cos\alpha \;\text{sen}\,\beta$$

sumando miembro a miembro las dos igualdades tenemos:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta) \equiv 2\,\text{sen}\,\alpha \;\cos\beta$$

o $$\frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)\right] \equiv \text{sen}\,\alpha \;\cos\beta$$

o bien $$\boxed{\text{sen}\,\alpha \;\cos\beta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)\right]}$$

Quedó expresado un producto en términos de una suma; consideremos de nuevo las expresiones del seno de la suma y el seno de la diferencia y determinemos el resultado de restar $\text{sen}\,(\alpha - \beta)$ á $\text{sen}\,(\alpha + \beta)$

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\,\alpha \;\cos\beta + \cos\alpha \;\text{sen}\,\beta$$
$$-\quad \text{sen}\,(\alpha - \beta) \equiv -\;\text{sen}\,\alpha \;\cos\beta + \cos\alpha \;\text{sen}\,\beta$$
$$\overline{\text{sen}\,(\alpha + \beta) - \text{sen}\,(\alpha - \beta) \equiv 2\cos\alpha \;\text{sen}\,\beta}$$

o $$\frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha + \beta) - \text{sen}\,(\alpha - \beta)\right] \equiv \cos\alpha \;\text{sen}\,\beta$$

o bien $$\cos\alpha \;\text{sen}\,\beta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha + \beta) - \text{sen}\,(\alpha - \beta)\right]$$

Consideremos las expresiones para el coseno de la suma y el coseno de la diferencia.

$$\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta$$

si sumamos miembro a miembro estas dos igualdades, resulta

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \equiv 2\cos\alpha \cos\beta$$

multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos miembros y aplicando la propiedad simétrica de las igualdades tenemos:

$$\cos\alpha \cos\beta \equiv \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

Si en lugar de sumar las expresiones para $\cos(\alpha + \beta)$ $\cos(\alpha - \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ le restamos $\cos(\alpha - \beta)$ tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta$$
$$-\cos(\alpha - \beta) \equiv -\cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta$$
$$\overline{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \equiv -2\,\text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $-\frac{1}{2}$ y aplicando la propiedad simétrica de las igualdades obtenemos:

$$\text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta \equiv -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right]$$

o $$\text{sen}\,\alpha \;\text{sen}\,\beta \equiv \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

En esta forma hemos expresado un producto en términos de una suma:

Ejemplo 1. Expresar los siguientes productos como una suma:

a) $\text{sen}\,5\theta \;\cos 3\theta$

b) $\cos 5\theta \;\text{sen}\,7\theta$

c) $6\cos 2\theta \;\cos 4\theta$

d) $\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} \;\;\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$

Solución: a) En este inciso nos valemos de la expresión

$$\text{sen}\,\alpha \cos\beta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)\right]$$

en las que sustituimos α por $5\,\theta$ y β por $3\,\theta$

$$\text{sen } 5\,\theta \cos 3\,\theta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen } (5\,\theta + 3\,\theta) + \text{sen } (5\,\theta - 3\,\theta)\right]$$

$$\text{sen } 5\,\theta \cos 3\,\theta \equiv \frac{1}{2}\left(\text{sen } 8\,\theta + \text{sen } 2\,\theta\right)$$

b) en este caso $\alpha = 5\,\theta$ y $\beta = 7\,\theta$ y sustituimos en

$$\cos \alpha \text{ sen } \beta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen } (\alpha + \beta) - \text{sen } (\alpha - \beta)\right]$$

queda $\cos 5\,\theta \text{ sen } 7\,\theta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen } 12\,\theta - \text{sen } (-2\,\theta)\right]$

pero como $\text{sen } (-\beta) \equiv -\text{sen } \beta$

resulta $\cos 5\,\theta \text{ sen } 7\,\theta \equiv \frac{1}{2}\left[\text{sen } 12\,\theta + \text{sen } 2\,\theta\right]$

c) La igualdad

$$\cos \alpha \cos \beta \equiv \frac{1}{2}\left[\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)\right]$$

Se multiplica en sus dos miembros por 6, α se sustituye por $2\,\theta$ y β se sustituye por 4θ

$$6 \cos 2\,\theta \cos 4\,\theta \equiv 6\,\frac{1}{2}\left[\cos (2\,\theta + 4\,\theta) + \cos (2\,\theta - 4\,\theta)\right]$$

$$6 \cos 2\,\theta \cos 4\,\theta \equiv 3\left[\cos 6\,\theta + \cos (-2\,\theta)\right]$$

como $\cos (-\beta) \equiv \cos \beta$ entonces

$$6 \cos 2\,\theta \cos 4\,\theta \equiv 3\left[\cos 6\,\theta + \cos 2\,\theta\right]$$

d) $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \equiv -\frac{1}{2}\left[\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)\right]$

o $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \equiv \frac{1}{2}\left[\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)\right]$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} \qquad \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{sen } \frac{2\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left[\cos \pi - \cos \frac{\pi}{3}\right]$$

o $\text{sen } \frac{2\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos \pi\right]$

Para llegar a las expresiones con las que podremos expresar una suma de funciones circulares como un producto, nos basaremos en las cuatro fórmulas que acaba de deducir; creemos conveniente cambiar la notación así que hagamos $\alpha + \beta = \theta$, $\alpha - \beta = \omega$. Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos:

También la suma de funciones puede expresarse como un producto.

(1) $\alpha + \beta = \theta$

(2) $\alpha - \beta = \omega$

$$2\,\alpha = \theta + \omega$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\theta + \omega}{2}}$$

Sustituyendo en (1)

$$\beta = \theta - \frac{\theta + \omega}{2}$$

$$\beta = \frac{2\theta - \theta - \omega}{2}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\theta - \omega}{2}}$$

Estos valores de α y β los sustituimos en las identidades:

a) $\text{sen } (\alpha + \beta) + \text{sen } (\alpha - \beta) \equiv 2 \text{ sen } \alpha \cos \beta$

b) $\text{sen } (\alpha + \beta) - \text{sen } (\alpha - \beta) \equiv 2 \cos \alpha \text{ sen } \beta$

c) $\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \equiv 2 \cos \alpha \cos \beta$

d) $\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) \equiv -2 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta$

y obtenemos:

$\text{sen } \theta + \text{sen } \omega \equiv 2 \text{ sen } \frac{\theta + \omega}{2} \cos \frac{\theta - \omega}{2}$
$\text{sen } \theta - \text{sen } \omega \equiv 2 \cos \frac{\theta + \omega}{2} \text{ sen } \frac{\theta - \omega}{2}$
$\cos \theta + \cos \omega \equiv 2 \cos \frac{\theta + \omega}{2} \cos \frac{\theta - \omega}{2}$
$\cos \theta - \cos \omega \equiv -2 \text{ sen } \frac{\theta + \omega}{2} \text{ sen } \frac{\theta - \omega}{2}$

Ejemplo 2. Exprese $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta + \operatorname{sen} 7\theta$ como un producto.

Solución: Agrupando por pares estos sumandos tenemos:

$$(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}5\theta) + (\operatorname{sen}3\theta + \operatorname{sen}7\theta)$$

y como

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}5\theta \equiv 2\operatorname{sen}\frac{\theta + 5\theta}{2}\cos\frac{\theta - 5\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}3\theta + \operatorname{sen}7\theta \equiv 2\operatorname{sen}\frac{3\theta + 7\theta}{2}\cos\frac{3\theta - 7\theta}{2}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 5\theta) + (\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 7\theta) &\equiv 2 \operatorname{sen} 3\theta \cos(-2\theta) + 2 \operatorname{sen} 5\theta \cos(-2\theta) \\
&\equiv 2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 2\theta \\
&\equiv 2 \cos 2\theta (\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta) \\
&\equiv 2 \cos 2\theta \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{3\theta + 5\theta}{2} \cos \frac{3\theta - 5\theta}{2} \\
&\equiv 2 \cos 2\theta \cdot 2 \operatorname{sen} 4\theta \cos(-\theta) \\
&\equiv 2 \cos 2\theta \cdot 2 \operatorname{sen} 4\theta \cos\theta \\
&\equiv 4 \cos\theta \cdot \cos 2\theta \operatorname{sen} 4\theta \\
\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta + \operatorname{sen} 7\theta &\equiv 4 \cos\theta \cos 2\theta \operatorname{sen} 4\theta
\end{aligned}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.– Exprese cada uno de los siguientes productos como una suma:

a) $\operatorname{sen} 2\theta \cos 3\theta$

b) $\cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}$

c) $\cos 5\theta \cos 7\theta$

d) $\operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 5\theta$

e) $4 \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6}$

f) $2 \operatorname{sen} 7\theta \operatorname{sen} 2\theta$

g) $3 \operatorname{sen}\theta \cos(-2\theta)$

h) $5 \operatorname{sen}(-3\theta) \cos(-\theta)$

2.– Exprese cada una de las siguientes sumas como un producto.

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

b) $\operatorname{sen} 8\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha$

c) $\cos 3\beta + \cos 5\beta$

d) $\cos 5\beta - \cos\beta$

e) $\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen} 4\theta$

f) $\cos 7\theta - \cos\theta$

g) $\operatorname{sen}\frac{5\theta}{3} - \operatorname{sen}\frac{5\theta}{6}$

h) $\cos\theta + \cos 7\theta$

3.– Verifique las siguientes identidades.

a) $\dfrac{\cos5\theta + \cos3\theta}{\operatorname{sen}5\theta + \operatorname{sen}3\theta} \equiv \operatorname{tg}\theta$

b) $\dfrac{\cos8\theta + \cos2\theta}{\operatorname{sen}8\theta + \operatorname{sen}2\theta} \equiv \cot5\theta$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}6\theta - \operatorname{sen}4\theta}{\cos6\theta + \cos4\theta} \equiv \operatorname{tg}\theta$

d) $\dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}3\theta - \operatorname{sen}\theta} \equiv 2\csc\theta$

e) $\dfrac{\cos2\alpha + \cos7\alpha}{\cos3\alpha + \cos6\alpha} + \dfrac{\cos6\alpha - \cos\alpha}{\cos5\alpha - \cos2\alpha} \equiv \dfrac{2\operatorname{sen}4\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}3\theta}{\cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta} \equiv \operatorname{tg}2\theta$

Bibliografía para consulta

Trigonometría Plana y Esférica.
Frank Ayres Jr.
Serie Shaum. Mc. Graw Hill
1976

Introducción a la Matemática Moderna.
Elbridge P. Vance.
Fondo Educativo Interamericano, S. A.
1968.

Paneles de verificación

MODULO 5 – VALIDACION

1.–

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) 0

e) -1

f) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

h) -1

i) -1

j) $-\frac{1}{2}$

2.–

a) $\csc\beta$

b) $\csc\beta$

c) $\operatorname{sen}\beta$

d) $-\cot\beta$

e) $-\operatorname{sen}\alpha$

MODULO 6 – VALIDACION

1. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

2. $\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{12} = -2-\sqrt{3}$

3. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$

4. $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} = -2+\sqrt{3}$

5. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$ $\cos(\alpha-\beta) = \frac{117}{125}$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{4}{3}$

   $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{44}{125}$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{44}{117}$

6. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{92}{533}$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{92}{525}$ $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{435}{533}$

   $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{525}{533}$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{308}{533}$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{308}{435}$

7. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{24}{25}$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{24}{7}$ $\cos(\alpha-\beta) = -1$

   $\cos(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 0$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 0$

8. Problema 5: $P(\alpha+\beta)$ está en el primer cuadrante
   $P(\alpha-\beta)$ está en el primer cuadrante
   Problema 6: $P(\alpha+\beta)$ está en el segundo cuadrante
   $P(\alpha-\beta)$ está en el segundo cuadrante
   Problema 7: $P(\alpha+\beta)$ está en el primer cuadrante
   $P(\alpha-\beta)$ está en el eje X entre el segundo y tercer cuadrantes.

9.

a) $\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\theta}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$

c) $\frac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}$

d) $\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta-1}{\operatorname{tg}\theta+\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{3}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$

11.

a) $\operatorname{sen} 3 = \operatorname{sen} 0.1416$

b) $\cos 5.5676 = \cos 0.7156$

c) $\operatorname{tg} 12.7060 = \operatorname{tg} 0.1396$

d) $\cos 4 = -\operatorname{sen} 0.7124$

e) $\cos(-4.4331) = -\operatorname{sen} 0.2793$

f) $\operatorname{sen}(-4.437) = \cos 0.2787$

g) $\operatorname{sen}(-10.9080) = \cos 0.0866$

h) $\operatorname{tg}(-17.5322) = \cot 0.2534$

i) $\operatorname{tg} 5.1212 = -\cot 0.4088$

MODULO 7 – VALIDACION

1.

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{24}{25}$ c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$ e) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ d) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ f) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$

2.

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{24}{25}$ c) $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$ e) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ d) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ f) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$

MODULO 8 – VALIDACION

1.

a) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen}\theta)$

b) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta)$

c) $\frac{1}{2}(\cos 12\theta + \cos 2\theta)$

d) $-\frac{1}{2}\ (\cos\ 8\theta - \cos\ 2\theta) = \frac{1}{2}\ (\cos\ 2\theta - \cos\ 8\theta)$

e) $2(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6})$

f) $-(\cos 9\theta - \cos 5\theta) = \cos 5\theta - \cos 9\theta$

g) $\frac{3}{2}(\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen}\theta)$

h) $-\frac{5}{2}(\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta)$

2.

a) $2\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{12}$

b) $2\cos 5\alpha\ \operatorname{sen} 3\alpha$

c) $2\cos 4\beta\ \cos\beta$

d) $-2\ \operatorname{sen} 3\beta\ \operatorname{sen} 2\beta$

e) $2\ \operatorname{sen} 6\theta\ \cos 2\theta$

f) $-2\ \operatorname{sen} 4\theta\ \operatorname{sen} 3\theta$

g) $2\cos\frac{5\theta}{4}\ \operatorname{sen}\frac{5\theta}{12}$

h) $2\cos 4\theta\ \cos 3\theta$

UNIDAD XV

FUNCION EXPONENCIAL Y FUNCION LOGARITMICA

Introducción

Para el estudio de las funciones, nos hemos apoyado en la siguiente clasificación: algebraicas y trascendentes. El tratamiento de éstas últimas se hace en el presente curso.

En la unidad que nos ocupa presentamos el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, analizando sus propiedades a partir de su gráfica.

Por otra parte iniciamos el estudio de las progresiones geométricas presentando algunas aplicaciones útiles.

Respecto a la función logarítmica se propone al alumno la obtención de los logaritmos comunes empleando la tabla y su uso en operaciones aritméticas y funciones trigonométricas. También se indica la forma de calcular el logaritmo de un número respecto a cualquier base.

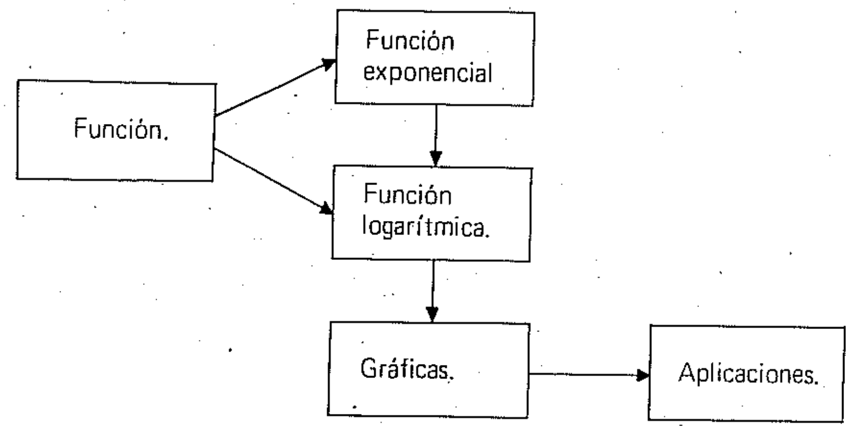
Para terminar incluímos en esta unidad como aplicación, problemas de interés compuesto y ley de crecimiento natural así como la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Identificará las funciones exponencial y logarítmica.
2. Describirá las características de una función exponencial o logarítmica a partir de su gráfica.
3. Empleará los logaritmos comunes en el cálculo de operaciones aritméticas.
4. Utilizará las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica en la simplificación de ecuaciones complicadas.
5. Aplicará la función exponencial y la función logarítmica en la solución de problemas que preveen situaciones futuras.

Diagrama temático estructural



Glosario

Función Exponencial : Función definida por la ecuación $y = f(x) = a^x$

Progresión Geométrica: Sucesión en la cual cada término después del primero se obtiene multiplicando el término precedente por un mismo número fijo, llamado la **razón** o cociente común.

Progresión Geométrica Infinita: Progresión con un número infinito de términos.

Función Logarítmica: Función definida por la ecuación.
$y = \log_a x$,
donde $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$

Logaritmos Comunes: Sistema de logaritmos que tiene a 10 como base.

Característica: Número entero de un logaritmo.

Mantisa: Parte decimal de un logaritmo.

Interés Compuesto: Cuando los intereses que gana el capital se suman al capital prestado a intervalos iguales de tiempo, constituyéndose de ese modo un nuevo capital al final de cada unidad de tiempo.

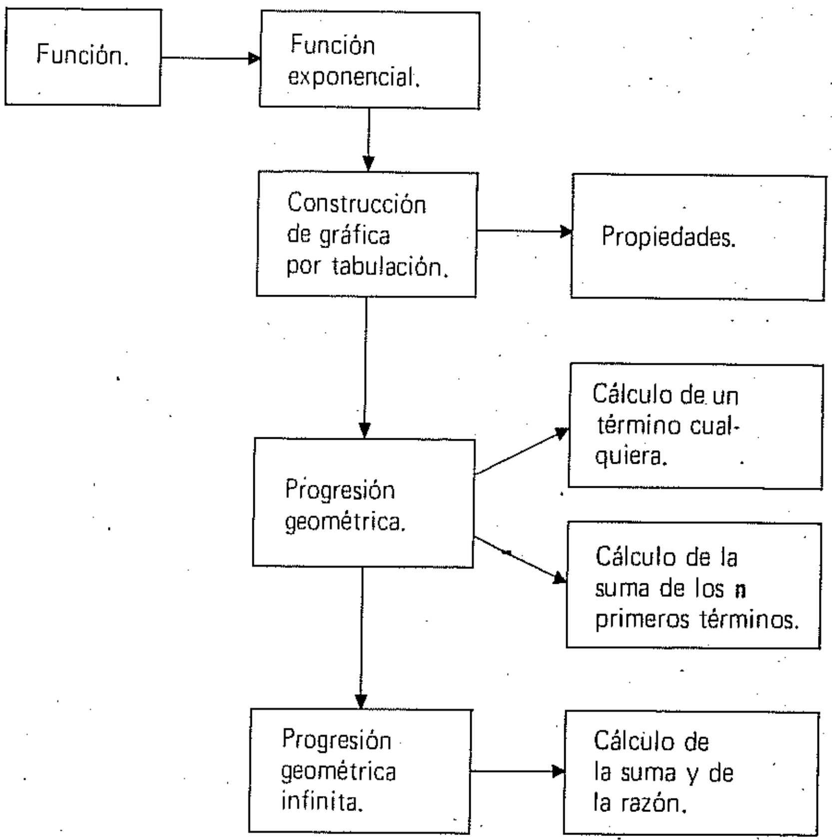
Módulo 9

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Identificará una función exponencial.
2. Construirá la gráfica de una función exponencial usando el método de tabulación.
3. Explicará las propiedades de una función exponencial a partir de su gráfica.
4. Definirá progresión geométrica.
5. Encontrará el valor de un término cualquiera de una progresión geométrica dada.
6. Calculará la suma de los **n** primeros términos de una progresión geométrica dada.
7. Explicará el concepto de progresión geométrica infinita.
8. Encontrará la suma y la razón de una progresión geométrica infinita dada.

ESQUEMA – RESUMEN



9.1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

¿A que llamamos funciones transcendentes?

En unidades anteriores estudió algunos tipos de funciones algebraicas, funciones que se definieron por medio de la ecuación $y = f(x)$, donde y era una función algebraica en x; ; en la unidad XIII estudió un tipo de función que no era una función algebraica llamada, función circular. A las funciones que no son algebraicas se les llama funciones trascendentes de las cuales estudiaremos en esta unidad dos nuevos tipos de ellas llamadas función exponencial y función logarítmica.

9.1.1 FUNCIONES EXPONENCIALES.

Representación de la función exponencial.

La función exponencial más simple es de la forma

$$\boxed{f : x \rightarrow b^x}$$

donde **b** es una constante mayor que cero y diferente de **1**. Podemos notar que esta función implica una potencia; pero la función exponencial difiere de la función con exponente $f : x \rightarrow x^b$ en que el exponente de la primera es variable. Una función exponencial más general es de la forma $f : x \rightarrow b^{ax}$ donde **a, b,** son constantes.

El dominio de este tipo de funciones, es el conjunto de los números reales y la ecuación que la define es $y = f(x) = b^{ax}$.

Gráfica de la función exponencial.

Muchas de las propiedades de la función exponencial se reconocen más fácilmente por medio de su gráfica; construiremos primero la gráfica de la función $y = 2^x$ usando el método de tabulación que ya conoce. (Figura 1).

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

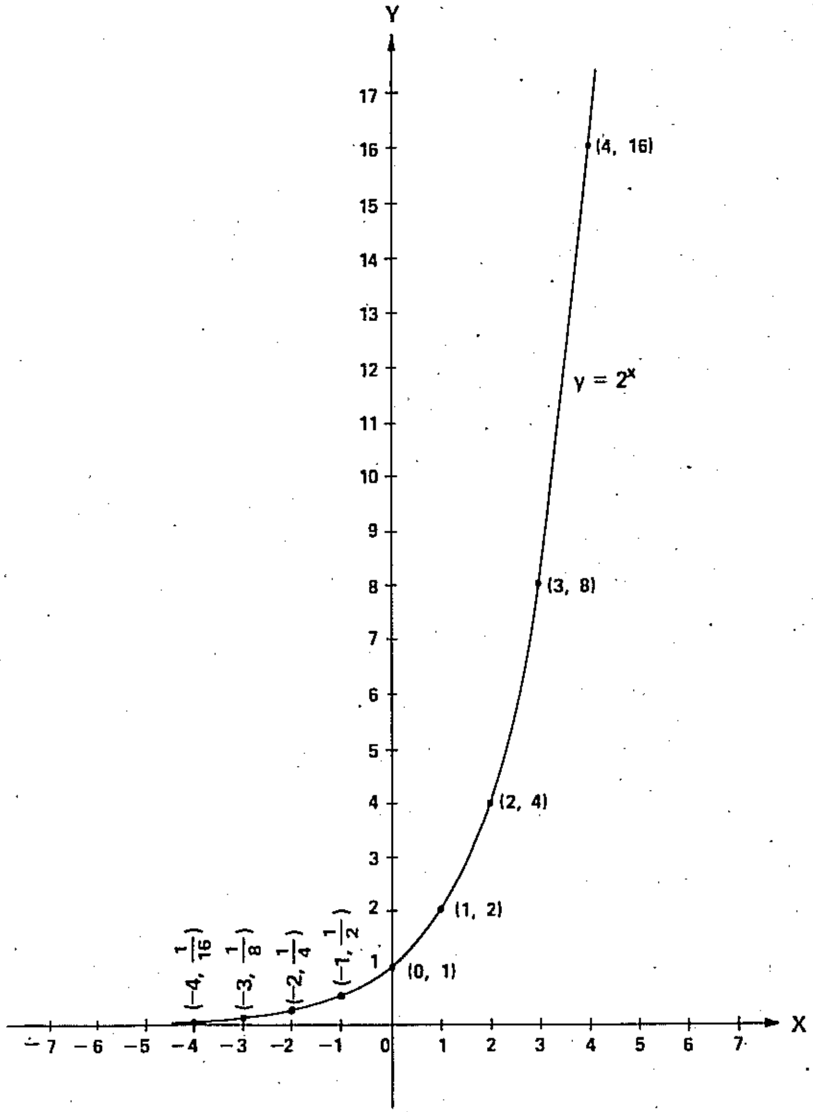


Figura 1

Empleo del método de tabulación.

Construiremos ahora la gráfica de la función, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ usando para ello también el método de tabulación (Figura 2).

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

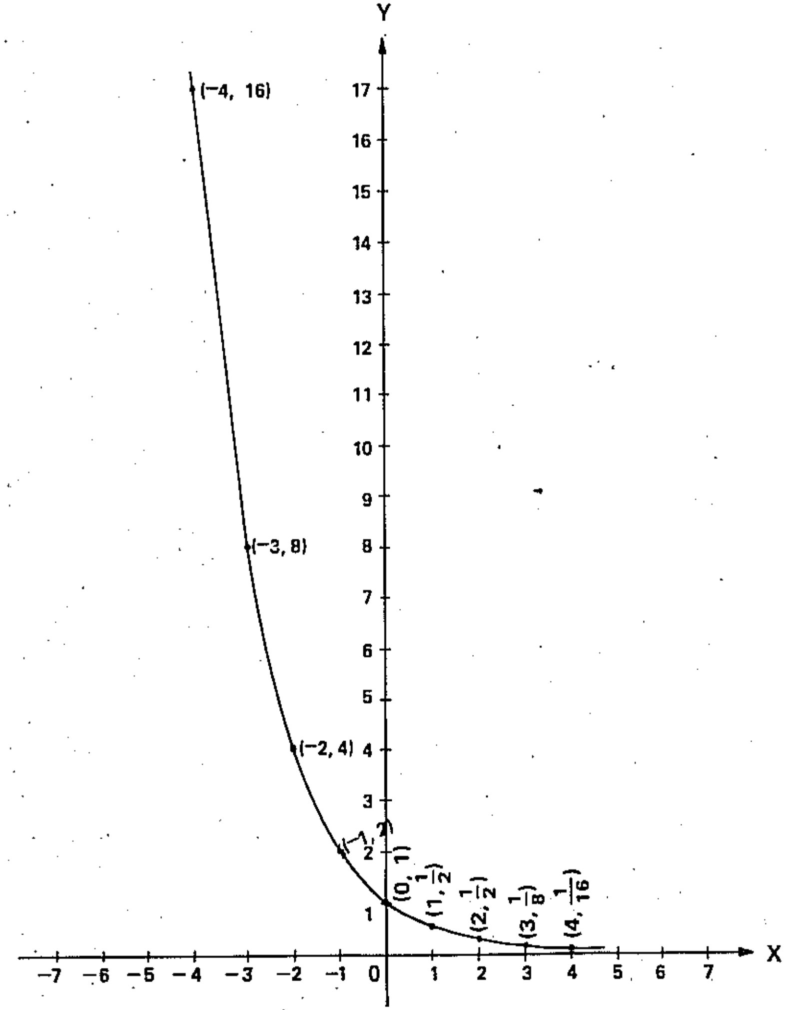


Figura 2

De las dos gráficas anteriores podemos obtener las siguientes propiedades de la función definida por $y = b^x$

Propiedades de la función exponencial.

1. La función es positiva ya que para todos los valores de x la gráfica está sobre el eje X.

2. Para todos los valores de b, $y = 1$ cuando $x = 0$.

3. Si $b > 1$ la función es creciente. Si x crece la función crece y al decrecer la X función se aproxima aunque nunca llega a alcanzar el valor cero.

4. Si $b < 1$ la función es decreciente; si x crece la función decrece y se aproxima aunque nunca llega a alcanzar el valor cero.

5. Si $b > 1$ ó $b < 1$ la función no corta el eje X.

9.2 PROGRESIONES GEOMETRICAS.

¿A qué llamamos sucesión?

Consideremos la función exponencial definida por $y = 3^x$ y hagamos que su dominio sea el conjunto de los enteros positivos; los valores funcionales correspondientes serán $3, 9, 27, 81, \ldots\ldots, 3^n \ldots$ A este conjunto de valores funcionales le llamamos **sucesión,** y en general, decimos que una sucesión es el recorrido de una función cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los enteros positivos. El valor funcional del entero 1 es el primer término de la sucesión; el valor funcional del entero 2 es el segundo término de la sucesión y así sucesivamente. A la sucesión se le llama **infinita** si su dominio es todo el conjunto de los enteros positivos y se le llama **finita** si su dominio consiste en los n primeros enteros positivos. Con esta pequeña introducción de lo que es una sucesión, podemos ahora definir progresión geométrica utilizando la función exponencial b^x.

Sucesión infinita es. . .

Definición de progresión geométrica.

> Progresión geométrica es una sucesión en la cual cada término después del primero se obtiene multiplicando el término precedente por un mismo número fijo, llamado razón común.

Otra forma de definirla es expresando que:

> Progresión geométrica es una sucesión en la que la función que la define tiene una ecuación de la forma kB^u, donde u es una expresión lineal en x.

Ejemplo: La sucesión 3, 9, 27, 82,. . . . . . . 3^n,. . . . . . es una progresión geométrica con razón común 3. Esta sucesión está definida por $f(x) = 3x$

Ejemplo: La sucesión $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$ es una progresión geométrica con razón $\frac{1}{2}$. La función que la define es $f(x) = 2^{2-x}$

Notación de una progresión geométrica.

La notación siguiente será la que usaremos para estudiar las progresiones geométricas.

a_1 = Primer término de la progresión
r = razón común
n = número de términos de la progresión
A_n = último o enésimo término de la progresión
S_n = suma de los n primeros términos de la progresión.

Representación de una progresión geométrica.

Puesto que cada término después del primero podemos obtenerlo multiplicando el precedente por la razón común r, una progresión geométrica podemos representarla como:

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4\ \ldots\ldots,\ a\,r^{n-1}$$

donde $a_1\ r^{n-1}$ nos representa el último término así:

$$An = a_1\ r^{n-1} \qquad (1)$$

Ejemplo: Encontrar el séptimo término de la progresión geométrica $-25, -5, -1, \ldots$ En esta progresión conocemos el primer término y el número de términos, pero como no conocemos la razón común, la podemos encontrar haciendo uso de la definición de progresión, así tenemos que

$$(-25)\ r = -5 \text{ entonces } r = \frac{1}{5}$$

luego

$$a_1 = -25$$
$$n = 7$$
$$r = \frac{1}{5}$$

Usando la fórmula para el último término se tiene:

$$a_n = a_1 \ y^{n-1} = (-25)\left(\frac{1}{5}\right)^{7-1} = (-25)\left(\frac{1}{5}\right)^{6} = -\frac{1}{625}$$

Por tanto, el séptimo término de la progresión es $-\frac{1}{625}$.

Ejemplo: Si el primer término de una progresión geométrica es 4, el último es $\frac{1}{8}$ y el número de términos es 6, encontrar la razón común.

Sustituimos estos valores en la fórmula para el último término, quedando

$$\frac{1}{8} = 4 \ (r)^{6-1}$$

$$\frac{1}{8} = 4 \ r^5$$

$$\frac{1}{32} = r^5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = r^5$$

$$\frac{1}{2} = r$$

Luego, la razón común es $\frac{1}{2}$.

En los ejemplos anteriores sólo han intervenido a_1, a_n, r y n por lo que es necesario encontrar una expresión para la suma, lo cual hacemos de la siguiente manera:

Obtención de la suma de términos.

Escribimos primero la suma de n términos de la progresión como

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots\dots\dots + a_1 r^{n-1} \quad \dots\dots \quad (2)$$

multiplicamos ambos miembros de (2) por r.

$$r\,S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots\dots + a_1 r^n \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

a (2) le restamos (3) quedándonos

$$S_n - r\,S_n = a_1 - a_1 r^n$$

ó

$$S_n\ (1-r) = a_1 - a_1 r^n$$

Resolviendo para S_n, tenemos

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1) \qquad (4)$$

$$= \frac{a_1\ (1-r^n)}{1-r}$$

Esta expresión la podemos escribir en otra forma ya que si el último término de la progresión es

$$a_n = a_n\ r^{n-1} \qquad \text{entonces} \quad r\,a_n = a_n\,r^n$$

sustituyendo este valor en (4), tenemos

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \frac{a_1 - r\,a_n}{1-r}, \quad r \neq 1 \ \dots\dots \qquad (5)$$

¿Qué sucede si una progresión geométrica $r = 1$?

Ejemplo: Si en una progresión geométrica $a_1 = -2$, $r = 2$ y $n = 8$ ¿Cuál es el valor de la suma y cuál es el valor del último término?

Primero encontramos el último término cuando la fórmula (1).

$$a_n = a_n\ r^{n-1} = (-2)\ (2)^{8-1} = (-2)\ (2)^7 = (-2)(128) = -256$$

Puesto que conocemos el último término de la progresión geométrica usamos la fórmula (5) para encontrar su suma

$$S_n = \frac{a_1 - r\,a_n}{1-r} = \frac{-2-(2)\ (-256)}{1-2} = \frac{-2+512}{-1} = -510$$

Los términos que hay entre dos términos cualesquiera en una progresión geométrica, se les llama medios geométricos entre esos términos.

9.2.1 PROGRESIONES GEOMETRICAS INFINITAS

Si el número de términos (n) es infinito. . .

En el tema anterior se estudiaron progresiones geométricas en las que el número de términos (n) que se consideran es finito. En este tema estudiaremos otro tipo de progresiones en las que el número de términos crece indefinidamente y $|r|<1$ por ejemplo la progresión

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \cdots\cdots \frac{1}{3^n}$$

es una progresión geométrica infinita, y si consideramos que el número de términos n crece indefinidamente entonces el último término que es $\frac{1}{3^n}$ se hace cada vez más pequeño por lo que podemos concluir que si n es muy grande $\frac{1}{3^n}$ tiende a cero.

En este tipo de progresiones podemos obtener el valor de S_n, de la siguiente forma:

Obtención de la suma de términos.

De la fórmula (4) tenemos

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - r^n)}{1 - r}$$

si $|r|<1$ entonces r^n tiende a cero cuando n crece indefinidamente por lo que se tiene

$$S_n = \frac{a_1 (1 - 0)}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} \qquad (6)$$

Ejemplo: Obtener la suma de la progresión

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots\cdots \frac{1}{3^n}$$

De la progresión tenemos que

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (6) se tiene

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Obtener la suma de la progresión

$$1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \frac{8}{125}, \cdots\cdots \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

De la progresión tenemos que

$$a_1 = 1$$

$$r = \frac{2}{5}$$

Luego, la suma es

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Ejemplo: Se deja caer una pelota desde una altura de 10m. y rebota $\frac{4}{5}$ de la distancia que ha caído. Encontrar la distancia total que recorre antes de quedar en reposo. Solución. En este caso podemos considerar que el número de rebotes que da la pelota antes de quedar en reposo, es muy grande por lo que la progresión que se forma con las distancias que recorre la pelota es una progresión geométrica infinita (Figura 3).

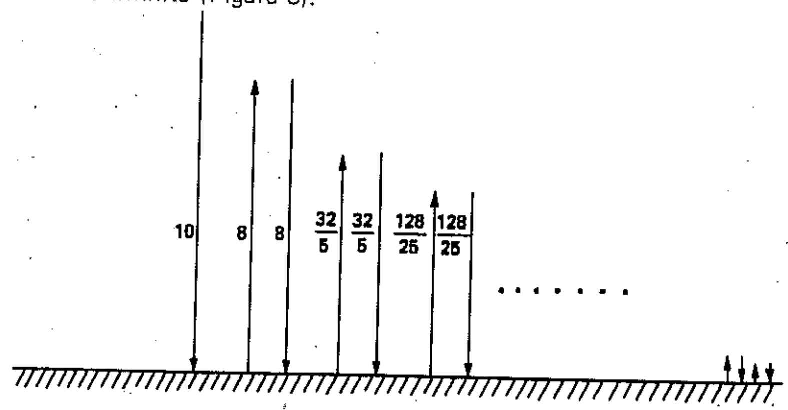


Figura 3

De la figura vemos que a partir del primer rebote se forma una progresión en la que los términos se repiten, por lo que la distancia total recorrida, será 2 veces la suma de los términos de la progresión más los 10m. que recorrió en la caída inicial. Así,

$a_1 = 8$

$r = \frac{4}{5}$

Luego,

$$S_n = \frac{8}{1-\frac{4}{5}} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$$

Distancia total recorrida = $(2)\ (40) + 10 = 90$

REATIVOS DE AUTOEVALUACION

1. En los siguientes problemas construya las gráficas de la función dada.

a) $y = 3^x$

b) $y = 8^x$

c) $y = 3^{-x}$

d) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

2. En los problemas de la a) a la e) escriba los primeros 4 términos de una progresión geométrica si se conoce:

a) $a_1 = 5; \quad r = 2$

b) $a_1 = -3; \quad r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = \frac{3}{2}; \quad r = \frac{2}{3}$

d) $a_1 = -\frac{1}{5}; \quad r = -5$

e) $a_1 = c; \quad r = d$

3. Dados los tres primeros términos: 2, 6, 18, encuentre el octavo tér-

mino y la suma de los 8 términos.

4. Dados los tres primeros términos: 81, −27, 9, encuentre el sexto término y la suma de los 6 términos.

5. Dados los tres primeros términos: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, encuentre el séptimo término y la suma de los 7 términos.

6. Insertar 3 medios geométricos entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{64}{5}$.

7. Inserte 4 medios geométricos entre -4 y $\frac{1}{8}$.

8. En los problemas de la a) a la g) determine los elementos que faltan a_1, r, a_n, n y S_n.

a) $a_1 = 2,\ r = 3,\ n = 6$

b) $a_1 = 5,\ r = 3,\ a_n = 3645$

c) $S_n = -425,\ r = -2,\ a_n = -640$

d) $S_n = 765,\ a_1 = 3,\ a_n = 384$

e) $a_n = 405,\ a_1 = \frac{5}{9},\ S_n = \frac{2735}{9}$

f) $a_1 = 8,\ a_n = \frac{1}{16},\ n = 8$

g) $a_1 = -25,\ n = 7,\ r = -\frac{1}{5}$

9. Una persona invierte \$100.00 al principio de un año; si la inversión rinde 5% de interés compuesto anualmente, ¿cuánto vale su inversión al final de 5 años?

10. Se deja caer una pelota desde una altura de 12 m. En cada rebote se eleva $^2/_3$ de la altura alcanzada en el rebote anterior. ¿Qué distancia recorre en el instante que golpea el suelo por quinta vez?

11. Un automóvil que costó \$100,000.00 se deprecia el 10% cada año. ¿Cuál es su valor final al del 4° año?

12. En los problemas de la a) a la h) encuentre la suma y la razón de la progresión geométrica infinita dada.

a) $1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \frac{64}{125}, \ldots$

b) $\frac{3}{9}, \frac{3}{27}, \frac{3}{81}, \frac{3}{243}, \ldots$

c) $.1, .01, .001, .0001, \ldots$

d) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

e) $-6, -4, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, -\frac{32}{27}, \ldots$

f) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \ldots$

g) $-\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, -\frac{5}{64}, \frac{5}{256}, \ldots$

h) $100, 90, 81, \ldots$

13. La suma de una progresión geométrica infinita es $\frac{25}{2}$ y el primer término es 5. ¿Cuál es su razón común?

14. Los lados de un cuadrado miden 6 cms. Se forma otro cuadrado uniendo los puntos medios del primer cuadrado, después se forma otro uniendo los puntos medios del 2o. cuadrado y así sucesivamente. Encuentre la suma de las áreas de todos los cuadrados que se forman incluyendo la del primero.

15. Encuentre la suma de los perímetros de los cuadrados del problema 10, incluyendo la del primero.

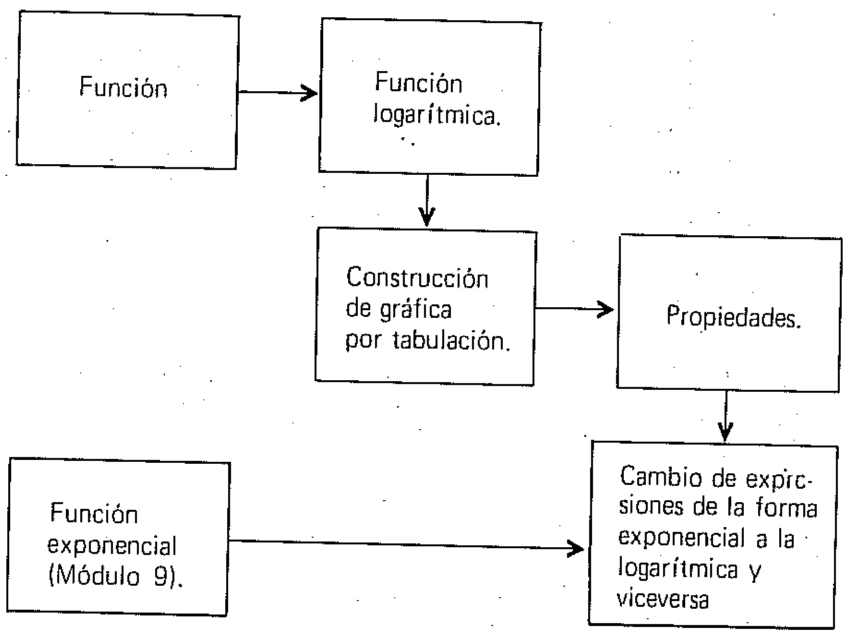
Módulo 10

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá una función logarítmica.
2. Construirá la gráfica de una función logarítmica usando el método de tabulación.
3. Deducirá las propiedades de la función logarítmica expresada como una función exponencial.
4. Cambiará una expresión dada en la forma exponencial a la forma logarítmica.
5. Cambiará una expresión dada en la forma logarítmica a la forma exponencial.

ESQUEMA – RESUMEN



10.1 FUNCION LOGARITMICA

Dados $a \in P$, $a \neq 1$ y $y \in P$, hay un solo valor de y que satisface la ecuación $a^y = x$; resolviendo esta ecuación para y, tenemos que y es el exponente a que se tiene que elevar a para obtener el número x. Con esto obtenemos la siguiente definición:

Definamos logaritmo de un número.

Logaritmo de un número es el exponente y al que tenemos que elevar una base a para que nos dé un número x lo escribimos como:

$$y = \log_a x$$

donde $a, x > 0$ y $a \neq 1$; a y se le llama el logaritmo en base a del número x. Esta ecuación es la que define la función logarítmica y la escribimos como

$$\boxed{f: x \to \log_a x}$$

Representación de la función logarítmica.

La definición anterior la podemos escribir también de la siguiente forma

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

por lo que podemos concluir que $y = \log_a x$ y $a^y = x$ son dos expresiones equivalentes y es muy importante que no olvide esto, ya que a partir de esta equivalencia, se deducirán las propiedades de los logaritmos.

Ejemplos:

$$\log_5 25 = 2 \iff 5^2 = 25$$

$$\log_2 16 = 4 \iff 2^4 = 16$$

$$\log_3 1 = 0 \iff 7^0 = 1$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \iff \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$$

$$\log_6 \frac{1}{36} = -2 \iff 6^{-2} = \frac{1}{36}$$

En seguida construiremos las gráficas de dos funciones logarítmicas cuyas ecuaciones que las definen son $y = \log_3 x$ y $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Lo haremos usando el método de tabulación.

Para la ecuación $y = \log_3 x$ tenemos

$$y = \log_3 x \iff 3^y = x$$

Tabulamos

Gráfica de la función logarítmica.

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
y	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

En este caso le dimos valores a la y y obtuvimos los correspondientes valores para la x.

Con los valores obtenidos construimos la gráfica (Figura 4) (la escala es diferente en cada eje)*.

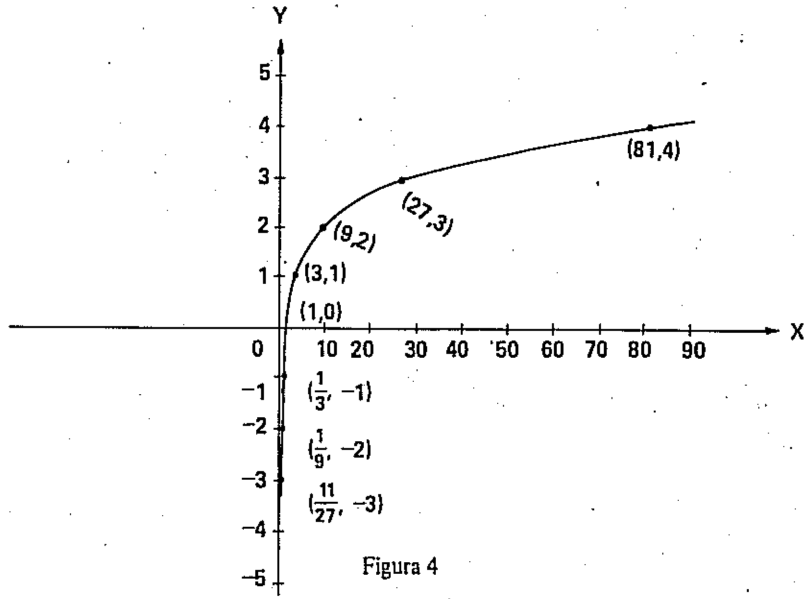


Figura 4

* Conviene hacer ésto por la diferencia tan grande que hay entre los valores que le damos a la X y los valores que toma la Y

Para la ecuación $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ tenemos

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = x$$

Tabulamos

x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

Construimos la gráfica usando escalas diferentes en cada eje (Figura 5).

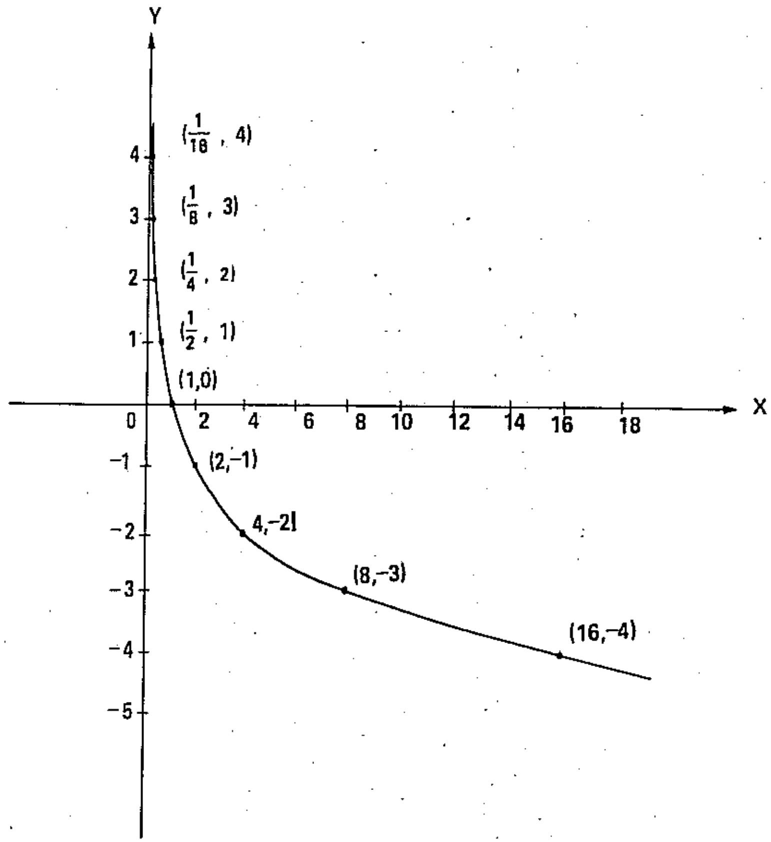


Figura 5

De las figuras 4 y 5 podemos obtener algunas de las propiedades de la función logarítmica.

Propiedades de la función logarítmica.

1. Si $a < 1$, (Figura 4) la función es positiva para toda $x > 1$ y negativa para toda $x < 1$. La función no está definida para valores negativos de x.

2. Si $a > 1$ (Figura 4) la función es siempre creciente. Si x crece la y crece.

3. Si $a < 1$, (Figura 5) la función es negativa para toda $x > 1$ y positiva para toda $x < 1$. La función no está definida para valores negativos de x.

4. Si $a < 1$, (Figura 5) la función es siempre decreciente. Si x crece y decrece.

5. Si $a > 1$ ó $a < 1$, la gráfica intersecta al eje **X** en (1,0). (Figura 4 y 5).

10.1.1. PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMICA.

Algunas de las propiedades de los logaritmos se pueden deducir con facilidad, si consideramos que la función logarítmica la podemos expresar como una función exponencial. Estas propiedades son las siguientes:

La suma de dos logaritmos es. . .

1. **El logaritmo del producto de n números es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los números.**

La demostración de esta propiedad se hará para el producto de 2 números y el alumno, a partir de ella, puede hacer la demostración para el producto de **n** números.

Se desea demostrar que:

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

Utilicemos únicamente dos números m y n.

Demostración:

Sean **M** y **N** dos números positivos cuyos logaritmos son **m** y **n** respectivamente, entonces:

$m = \log_a M \qquad y \qquad n = \log_a N$

$a^m = M \qquad y \qquad a^n = N$

Si multiplicamos los miembros correspondientes de las dos igualdades anteriores, tenemos

$a^m \cdot a^n = M \cdot N$

$a^{m+n} = M \cdot N$ — Leyes de los exponentes

$\log_a M{\cdot}N = m + n$ — Definición de logaritmo

$\log_a M{\cdot}N = \log_a M + \log_a N$ — Sustitución

¿A qué es igual la diferencia de dos logaritmos?

2. **El logaritmo de un cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:**

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demostración:

$m = \log_a M \qquad y \qquad n = \log_a N$

$a^m = M \qquad y \qquad a^n = N$

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{M}{N}$

$a^{m-n} = \frac{M}{N}$ — Leyes de los exponentes

$\log_a \frac{M}{N} = m - n$ — Definición de logaritmo

$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ — Sustitución

Si multiplicamos un número k por el logaritmo de un número...

3. **El logaritmo de un número elevado a una potencia k es igual al producto de k por el logaritmo del número.**

$$\log_a M^k = k \log_a M; \qquad K \in R$$

Demostración:

$m = \log_a M$

$a^m = M$

Elevando ambos miembros de la igualdad a una potencia k, tenemos

$(a^m)^k = M^k$

$a^{km} = M^k$

$\log_a M^k = km$ — Definición de logaritmo

$\log_a M^k = k \log_a M$ — Sustitución

Ejemplo:

$$\log_{10} (30)\,(40) = \log_{10} 30 + \log_{10} 40$$

Ejemplo:

$$\log_5 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{3}\right) = \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{5}{3}$$

Ejemplo:

$$\log_2 \frac{100}{90} = \log_{20} 100 - \log_{20} 90$$

Ejemplo:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{.40}{3.21} = \log_{\frac{1}{2}} .40 - \log_{\frac{1}{2}} 3.21$$

Ejemplo:

$$\log_8 (300)^3 = 3 \log_8 300$$

Ejemplo:

$$\log_4 (28.75)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_4 28.75$$

Ejemplo:

$$\log_{10} \frac{(20)\,(30)^2}{15^{\frac{1}{2}}} = \log_{10} 20 + 2 \log_{10} 30 - \frac{1}{2} \log_{10} 15$$

Ejemplo:

$$\log_{10} \sqrt[4]{728} = \log_{10} (728)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_{10} 728$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. En los problemas siguientes construya la gráfica de la función dada.

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_4 x$

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$

2. En los problemas de la a) a la e) cambie de la forma exponencial a la logarítmica, y en los problemas de la f) a la j) cambie de forma logarítmica a la exponencial.

a) $5^4 = 625$

b) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

c) $10^{-4} = .0001$

d) $6^1 = 6$

e) $3^{-5} = \frac{1}{243}$

f) $\log_3 9 = 2$

g) $\log_{10} 1000 = 3$

h) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

i) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

j) $\log_{.1} 100 = -2$

3. En los problemas de la a) a la d) encuentre por inspección a, m o M.

a) $m = \log_8 64$

b) $\log_a 16 = -4$

c) $\log_6 M = 3$

d) $m = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

4. En los problemas de la a) a la e) escriba el logaritmo de la expresión dada en otra forma equivalente usando las propiedades de los logaritmos.

a) $\log_{15} (36)(84)$

b) $\log_{10} \frac{75}{15}$

c) $\log_{20} (408)^{\frac{1}{2}}$

d) $\log_{10} (93)^{\frac{1}{2}} (18)$

e) $\log_{10} \dfrac{(100)^2 (36.8)^{\frac{1}{3}}}{(45)^{\frac{3}{2}}}$

5. En los problemas de la a) a la e) exprese como un solo logaritmo lo que se le da.

a) $\log_5 20 + \log_5 100 - \log_5 30$

b) $5 \log_{10} 200$

c) $\frac{1}{2} \log_{20} 300 - 2 \log_{20} 500$

d) $\log_{10} 100 - 4 (\log_{10} 20 - \log_{10} 60)$

e) $\log_b (x + 1) - \log_b (x - 1)$

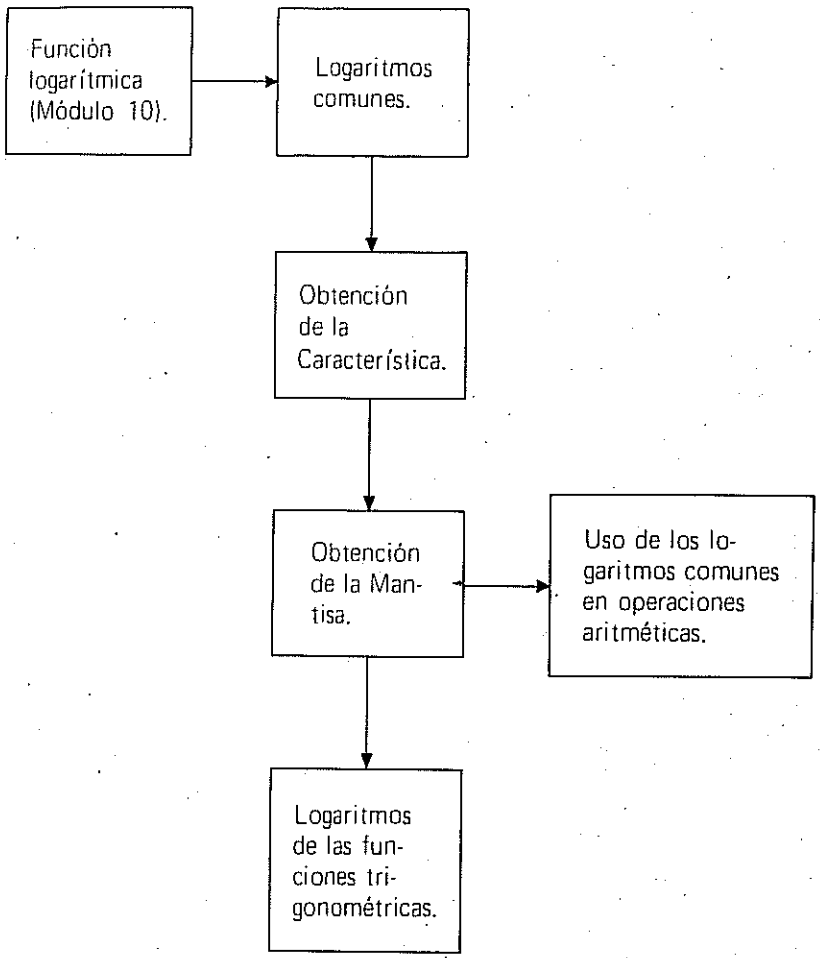
Módulo 11

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Obtendrá la característica del logaritmo de un número en base 10.
2. Obtendrá la mantisa del logaritmo de un número en base 10, usando la tabla.
3. Dado el logaritmo de un número en base 10, obtendrá el número, usando la tabla.
4. Obtendrá el logaritmo de funciones trigonométricas usando la tabla.
5. Efectuará operaciones aritméticas, mediante el empleo de logaritmos comunes.

ESQUEMA-RESUMEN



11.1 LOGARITMOS COMUNES.

Conozcamos dos sistemas de logaritmos.

Si el logaritmo de un número es la potencia a que se tiene que elevar la base para obtener el número, cualquier base positiva diferente de 1 nos podría servir para construir un sistema de logaritmos; sin embargo para usos computacionales, el sistema más usado es el de base 10 y a los logaritmos en esta base se les llaman **logaritmos comunes** o de **Briggs** en honor de Henry Briggs que fue quien por primera vez los usó. Otro sistema de logaritmos que también tiene muchas aplicaciones es el de base **e** ($e = 2.71828.....$) ; a estos logaritmos los llamamos **naturales.**

La ventaja de los logaritmos comunes se irá haciendo más evidente al ir trabajando con ellos.

Hagamos uso de la definición de logaritmo y escribamos los siguientes logaritmos en base 10.

$\log_{10} .0001 = -4 \Rightarrow 10^{-4} = .0001$

$\log_{10} .001 = -3 \Rightarrow 10^{-3} = .001$

$\log_{10} .01 = -2 \Rightarrow 10^{-2} = .01$

$\log_{10} .1 = -1 \Rightarrow 10^{-1} = .1$

$\log_{10} 1 = 0 \Rightarrow 10^{0} = 1$

$\log_{10} 10 = 1 \Rightarrow 10^{1} = 10$

$\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 10^{2} = 100$

$\log_{10} 1000 = 3 \Rightarrow 10^{3} = 1000$

$\log_{10} 10000 = 4 \Rightarrow 10^{4} = 10000$

La lista anterior la podríamos extender indefinidamente para números menores que **.0001** o para números mayores de **10000.**

Los logaritmos de los números que no son potencias enteras de 10, los encontramos haciendo uso de la Tabla

I en la que los logaritmos de los números se han aproximado a 4 cifras decimales.

De la lista de algunos logaritmos de números que son potencias enteras de **10**, podemos ver por ejemplo que todos los números que estén entre **10** y **100** el logaritmo de ellos será entre **1** y **2** y los que estén entre **100** y **1000**, el logaritmo será un número entre **2** y **3**; lo mismo los números que estén entre **.1** y **.01** su logaritmo será un número entre **−1** y **−2** y así sucesivamente.

Partes del logaritmo de un número.

El logaritmo de cualquier número tiene dos partes: una parte entera que puede ser positiva, negativa o cero llamada **característica** y una fracción decimal positiva que es mayor o igual a cero y menor que 1 llamada **mantisa.** La característica del logaritmo de un número depende de la colocación del punto decimal en el número y la mantisa la obtendremos a partir de la Tabla I, ya que el valor de la mantisa no depende de la colocación del punto decimal sino que depende de los dígitos que forman el número como lo veremos en los ejemplos que se darán posteriormente.

11.1.1 REGLA PARA OBTENER LA CARACTERISTICA DEL LOGARITMO DE UN NUMERO.

¿Cómo se obtiene la característica?

Si definimos como **posición de referencia** a la posición que queda entre los primeros dos dígitos significativos que forman el número, por ejemplo para el número **219.1**, la posición de referencia está entre el **2** y el **1**. Para el número **.0843** la posición de referencia está entre el **8** y el **4**. Para el número **.005031** la posición de referencia está entre el **5** y el **0**, entonces la característica del logaritmo de un número en base **10** es el número de dígitos que hay de la posición de referencia al punto decimal del número; es positiva si el punto decimal está a la derecha de la posición de referencia, y negativa si el punto decimal está a la izquierda de la posición de referencia.

Ejemplos: Encontrar la característica de los logaritmos en base **10** para los siguientes números. (Cuando se usa la base **10** se omite escribirla en el logaritmo por lo

que escribiremos solamente **log** y cuando la característica sea negativa se acostumbra escribir el signo negativo sobre la característica.

$\log 311 = 2$
$\log .311 = \bar{1}$
$\log 3.11 = 0.$
$\log .00809 = \bar{3}.$
$\log .0809 = \bar{2}.$
$\log 80.9 = 1.$
$\log 1.16 = 0.$
$\log 1917.8 = 3.$
$\log 3749.43 = 3.$

11.1.2 USO DE LA TABLA PARA OBTENER LA MANTISA DEL LOGARITMO DE UN NUMERO.

Y ahora utilicemos la tabla I.

En la Tabla I podemos ver que en la primera columna están los números del **10** al **99**. Después en la parte superior tiene 10 columnas marcadas del **0** al **9** y por último, **9** columnas más que se llaman **partes proporcionales** y se abrevian como **P.P.**

Para encontrar la mantisa del logaritmo de un número, procedemos de la siguiente manera. Por ejemplo, para encontrar el **log 86.4** nos movemos hacia abajo en la primera columna de la Tabla I hasta el número **86**, y después nos movemos hacia la derecha hasta la columna que tiene marcado en la parte superior **4** y leemos **9365** que viene a ser **.9365** ya que las mantisas serán siempre menores que **1**. Luego, **log 86.4 = 1.9365.**

Ejemplo: Encontrar el **log 193.8**

En la Tabla I nos movemos hacia abajo en la primera columna hasta el número **19**, después a la derecha hasta la columna encabezada con **3** y leemos **2856**, en seguida nos seguimos moviendo por el mismo renglón del número **19** hasta la columna **8** de partes proporcionales y leemos **18** que es el número que se le tiene que sumar al **2856** para obtener la mantisa de **193.8** con lo que obtenemos **2856 + 18 = 2874**, luego, **log 193.8 = 2.2874.**

Ejemplo: Encontrar el logaritmo de **.005716.**

En la Tabla I tenemos que para **571** se lee **7566** y en la columna **6** de **P.P.** se lee **5** por lo que la mantisa es **7566 + 5 = 7571**, luego, $\log .005716 = \bar{3}.7571$.

11.1.3 DADO EL LOGARITMO DE UN NUMERO, OBTENER EL NUMERO.

Uso del antilogaritmo.

En este caso conocemos el logaritmo del número y se busca encontrar el número; para hacerlo usamos la Tabla II en la que podemos ver que la primer columna empieza en **.00** y termina en **0.99**; las demás columnas están dispuestas como en la Tabla I.

Ejemplo: Encontrar **N** si $\log N = 2.8126$, en este caso N = antilog **2.8126**.

Nos movemos en la primer columna de la Tabla II hasta el **.81**, después nos movemos a la derecha hasta la columna **2** y leemos **6486**; nos seguimos moviendo hacia la derecha sobre el mismo renglón del **.81** hasta la columna **6** de **P.P.** y leemos **9** que se lo sumamos al **6486** dándonos **6486 + 9 = 6495**.

Dado que la característica del logaritmo es **2**, el punto decimal está a **2** dígitos a la derecha de la posición de referencia, por lo que si $\log N = 2.8126 \Rightarrow N = 649.5$.

Ejemplo: Encontrar **N** si $\log N = \bar{3}.7168$.

En la Tabla II leemos para **.716** el número **5200** y moviéndonos a la derecha hasta la columna **8** en **P.P.** leemos **10** que se lo sumamos al **5200** dándonos **5200 + 10 = 5210**, luego si $\log N = \bar{3}.7168 \Rightarrow N = .005210$.

11.2 LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

También en trigonometría se emplean logaritmos.

Dado que en Trigonometría muy a menudo se trabaja con operaciones en las que intervienen funciones circulares, con el objeto de simplificar estas operaciones se usan logaritmos de las funciones los que se tabulan en la Tabla III. La forma y el uso de la tabla es semejante a

la Tabla I, sólo que en esta tabla ya se incluye la característica del logaritmo.

Ejemplo: Encontrar el $\log \tan 38°20'$.

En la Tabla ~~III~~ tenemos que IV

$\log \tan 38°20' = \bar{1}.8980$

Ejemplo: Encontrar el $\log \operatorname{sen} 26°47'$.

Ya que en la Tabla no aparece el valor de $\log \operatorname{sen} 26°47'$ va a ser necesario interpolar, lo hacemos de la siguiente manera.

$\log \operatorname{sen} 26°40' = \bar{1}.6521$

$\log \operatorname{sen} 26°50' = \bar{1}6546$

luego,

$$\log \operatorname{sen} 26°47' = \log \operatorname{sen} 26°40' + \frac{7}{10}\,[\log \operatorname{sen} 26°50' - \log \operatorname{sen} 26°40']$$

$$= \bar{1}.6521 + \frac{7}{10}\,[\bar{1}.6546 - \bar{1}.6521]$$

$$= \bar{1}.6521 + \frac{7}{10}\,[.0025]$$

$$= \bar{1}.6521 + .0017$$

$$= \bar{1}.6538$$

Ejemplo: Encontrar el $\log \cos 65°23'$.

Puesto que el ángulo está entre $65°20'$ y $65°30'$ tenemos que

$$\log \cos 65°23' = \log \cos 65°20' - \frac{3}{10}\,[\log \cos 65°20' - \log \cos 65°30']$$

$$= \bar{1}.6205 - \frac{3}{10}\,[\bar{1}.6205 - \bar{1}.6177]$$

$$= \bar{1}.6205 - (.0028)$$

$$= \bar{1}.6205 - .0008$$

$$= \bar{1}.6197$$

Ejemplo: Encontrar el ángulo θ entre $0°$ y $90°$, si $\log \operatorname{sen} \theta = \bar{1}.6887$.

Localizamos el valor **1.6887** en la Tabla III en la columna $\log \operatorname{sen} \theta$ entre $29°10'$ y $29°20'$.

$$10 \left\{ \begin{array}{l} x \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{sen} 29°10' = \bar{1}.6878 \\ \log \operatorname{sen} \theta \quad\quad = \bar{1}.6887 \end{array} \right\} 9 \\ \log \operatorname{sen} 29°20' = \bar{1}.6901 \end{array} \right\} 23$$

luego

$$10 \text{ ———————— } .0023$$

$$x \text{ ———————— } .0009$$

$$x = \frac{(.0009)\ 10}{.0023} \approx 4$$

Por lo que $\theta = 29°10' + 4' = 29°14'$.

11.3 USO DE LOS LOGARITMOS COMUNES EN OPERACIONES ARITMETICAS.

He aquí una aplicación de los logaritmos.

Habiendo estudiado las propiedades de los logaritmos, podemos usarlas en operaciones como la multiplicación, división, elevar a una potencia y extraer raíces, simplificándose todas estas operaciones con el uso de los logaritmos.

En los siguientes ejemplos presentamos cómo usar los logaritmos para efectuar estas operaciones y se recomienda hacerlo con el mayor orden para simplificar y comprobar lo que se haga.

Ejemplo: Efectuar usando logaritmos, la siguiente operación: **(132) (47.8)**

Si hacemos $M = (132)\ (47.8)$ y usamos la propiedad del logaritmo de un producto, tenemos:

$$\log M = \log (132)\ (47.8)$$

$$= \log 132 + \log 47.8$$

Para trabajar más fácilmente hacemos el siguiente arreglo:

$$\log 132 = 2.1206$$

$$\log 478 = \underline{1.6794}$$

$$\log M \quad = 3.8000$$

luego $M = \text{antilog } 3.8000 = 6310$

Por lo que el producto de $(132)\ (47.8) = 6310$ aproximadamente*.

Ejemplo: Efectúe usando logaritmos, la siguiente operación: **(1.816) (.00345)**. Hacemos $M = (1.816)\ (.00345)$

luego, $\log M = \log 1.816 + \log .00345$

$$\log 1.816 = 0.2591$$

$$\log .00345 = \underline{\bar{3}.5378}$$

$$\log M = \bar{3}.7969$$

$$M = \text{antilog } \bar{3}.7969 = .006265$$

Ejemplo: Efectúe usando logaritmos, la siguiente operación: $\dfrac{526.8}{172.4}$

Para efectuar esta operación, hacemos uso de la propiedad de logaritmo de un cociente.

Hacemos $M = \dfrac{526.8}{172.4}$

$$\log M = \log 526.8 - \log 172.4$$

$$\log 526.8 = 2.7217$$

$$\log 172.4 = \underline{2.2365}$$

$$\log M = 0.4852$$

* El que sea aproximadamente se debe a que las tablas de logaritmos que estamos usando tienen solamente 4 cifras decimales.

$$M = \text{antilog } 0.4852 = 3.056$$

Ejemplo: Efectúe $\dfrac{.0753}{28.32}$

Hacemos

$$M = \frac{.0753}{28.32}$$

$$\log M = \log .0753 - \log 28.32$$

$$\log .0753 = \bar{2}.8768$$

$$\log 28.32 = 1.4521$$

$$\log M = \bar{3}.4247$$

$$M = \text{antilog } \bar{3}.4247 = .002659$$

Ejemplo: Efectúe $\dfrac{(3.96)\ (.00817)}{43.5}$

Para efectuar esta operación, consideramos primero al numerador como el producto de dos factores y después el resultado de este producto es lo que se divide por el denominador.

Hacemos

$$M = \frac{(3.96)\ (.00817)}{43.5}$$

$$\log M = \log 3.96 + \log .00817 - \log 43.5$$

$$\log 3.96 = 0.5977$$

$$\log .00817 = \bar{3}.9122$$

logaritmo del numerador $= \bar{2}.5099$

$$\log 43.5 = 1.6385$$

$$\log M = \bar{4}.8714$$

$$M = \text{antilog } \bar{4}.8714 = .0007437$$

Ejemplo: Efectúe $(28.71)^2$

Hacemos

$$M = (28.71)^2$$

$$\log M = 2 \log 28.71$$

$$2 \log 28.71 = 2(1.4581)$$

$$\log M = 2.9162$$

$$M = \text{antilog } 2.9162 = 824.5$$

Ejemplo: Efectúe $(.00976)^3$

Hacemos

$$M = (.00976)^3$$

$$\log M = 3 \log (0.00976)$$

$$3 \log .00976 = 3(\bar{3}.9894)$$

$$\log M = \bar{7}.9682$$

$$M = \text{antilog } \bar{7}.9682 = .0000009294$$

Ejemplo: Efectúe $\sqrt{426.7}$

$\sqrt{426.7}$ se puede escribir como (426.7, y hacemos

$$M = (426.7)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log M = \frac{1}{2} \log 426.7$$

$$\frac{1}{2} \log 426.7 = \frac{1}{2}\ (2.6301)$$

$$\log M = 1.3150$$

$$M = \text{antilog } 1.3150 = 20.65$$

Ejemplo: Efectúe $(.00698)^{\frac{1}{4}}$

Hacemos

$$M = (.00698)^{\frac{1}{4}}$$

$$\log M = \frac{1}{4} \log .00698$$

$$\frac{1}{4} \log .00698 = \frac{1}{4} (\bar{3}.8439) = \frac{\bar{3}.8439}{4}$$

En este caso no podemos efectuar la división de 3.8439 entre 4 en forma directa, ya que la característica es negativa y no divisible entero entre 4, por lo que al intentar hacer la división de 3 entre 4 nos daría una característica fraccionaria, lo cual no puede ser ya que la característica siempre tiene que ser un número entero; para evitar esto lo que hacemos es sumarle y restarle al logaritmo un múltiplo del divisor que haga que la característica sea positiva y después efectuamos la división. En el ejemplo lo hacemos de la siguiente manera:

$$\log M = \frac{\bar{3}.8439}{4} = \frac{1.8439 - 4}{4}$$ se sumó **4** y se restó **4** al numerador

$$= .4609 - 1$$ se efectuó la división

$$= \bar{1}.4609$$

$$\log M = \bar{1}.4609$$

$$M = \text{antilog } \bar{1}.4609 = .2890$$

Ejemplo: Efectúe $\dfrac{(16.21)\ (.0747)^{\frac{1}{2}}}{(5.716)\ (.00818)}$

Hacemos $M = \dfrac{16.21)\ (0.0747)^{\frac{1}{2}}}{(5.716)(.00818)^{\frac{1}{5}}}$

$$\log M = (2 \log 16.21 + \tfrac{1}{2} \log .0747) - (\log 5.716 + \tfrac{1}{5} \log .00818)$$

$$2 \log 16.21 = 2(1.2098) = 2.4196$$

$$\tfrac{1}{2} \log .0747 = \tfrac{1}{2} (2.6733) = \underline{1.4366}$$

logaritmo del numerador $= 1.8562$

$$\log 5.716 = 0.7571$$

$$\log .00818 = (\bar{3}.9128)$$

$$= \frac{\bar{3}.9128}{5} = \frac{2.9128 - 5}{5} = .5825 - 1$$

$$= \bar{1}.5825$$

$$\log 5.716 = 0.7571$$

$$\log .00818 = \underline{\bar{1}.5825}$$

logaritmo del denominador $= 0.3396$

logaritmo del numerador $= 1.8562$

—logaritmo del denominador $= \underline{0.3396}$

$$\log M = 1.5166$$

$$M = \text{antilog } 1.5166 = 32.86$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Usando la Tabla I, en los problemas del 1 al 10 encuentre el logaritmo del número indicado.

1. log 28.6
2. log 324
3. log 8.194
4. log 56.71
5. log 3824
6. log .179
7. log .004621
8. log .0972
9. log .0006718
10. log .3085

Usando la Tabla II, en los problemas del 11 al 20 encuentre N

11. $\log N = 1.8721$
12. $\log N = 2.4624$
13. $\log N = 0.0196$
14. $\log N = 3.5726$
15. $\log N = 4.9731$
16. $\log N = \bar{1}.5924$
17. $\log N = \bar{3}.0057$
18. $\log N = \bar{2}.2836$
19. $\log N = \bar{1}.7824$
20. $\log N = \bar{3}.6101$

Usando la Tabla IV, en los problemas del **21** al **25** encuentra el valor de θ; $0° \leq \theta \leq 90°$. (Interpole si es necesario).

21. $\log \operatorname{sen} 68°40'$
22. $\log \cos 40°36'$
23. $\log \tan 19°54'$
24. $\log \cot 73°45'$
25. $\log \cos 27°22'$

Usando logaritmos, calcule el valor de las siguientes operaciones:

26. $(.00749)\ (36.87)$

27. $(.0935)\ (1.462)\ (31.85)$

28. $\dfrac{494.5}{987.5}$

29. $\dfrac{649.2}{.03581}$

30. $\dfrac{(.3729)\ (.0824)}{(11.19)}$

31. $(19.36)^2\ (.045)^{\frac{1}{3}}$

32. $\dfrac{(.01321)^4\ (47.92)^{\frac{1}{5}}}{(39.26)^2}$

33. $\dfrac{\sqrt[3]{39.26}\ \sqrt{48.91}}{\sqrt[4]{.0081}}$

34. $\left[\dfrac{(.0805)^{\frac{1}{2}}\ (17.39)^2}{(.00905)^2\ (1108)}\right]^2$

35. $\left[\dfrac{(1.001)^3\ (.0339)^2}{(99.9)^{\frac{1}{3}}\ (.0007)^{\frac{1}{4}}}\right]^{\frac{1}{3}}$

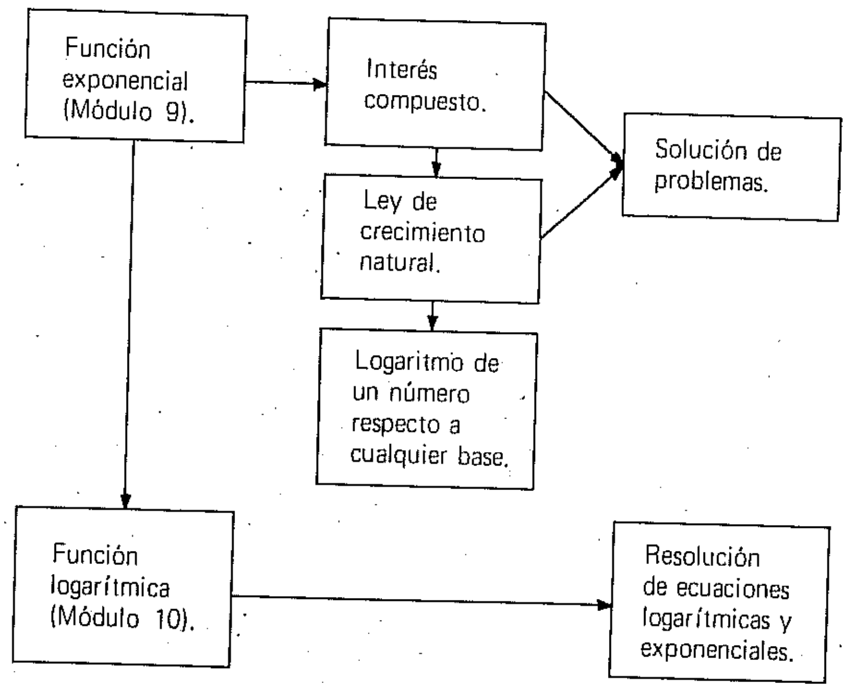
Módulo 12

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Resolverá problemas de interés compuesto aplicando la función exponencial.
2. Resolverá problemas aplicando la "ley del crecimiento natural".
3. Calculará el logaritmo de un número respecto a cualquier base.
4. Resolverá ecuaciones exponenciales mediante el uso de las propiedades de la función exponencial.
5. Resolverá ecuaciones logarítmicas mediante el uso de las propiedades de la función logarítmica.

ESQUEMA – RESUMEN



12. APLICACIONES DE LA FUNCION EXPONENCIAL.

12.1 INTERES COMPUESTO.

¿Qué es el interés compuesto?

Si se invierte una cantidad dada de dinero, que representaremos por **P**, a un interés **r** el cual se expresa como un porcentaje por unidad por año, el interés al cabo de un año será **Pr**, por lo que la cantidad total al final de un año es lo que se invirtió más los intereses ganados, es decir $P + Pr = P(1+r)$. Si esta cantidad $P(1+r)$ gana interés por un segundo año, la cantidad total al final de ese segundo año es:

$$P(1+r) + P(1+r)r = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2, \text{ luego } P(1+r)^2$$

representa la cantidad invertida inicialmente más el interés ganado en dos años; si este proceso se continúa por **n** años, la cantidad total que se tendrá al final de estos **n** años está dada por

$$A = P(1+r)^n \qquad (1)$$

Donde:

P = cantidad invertida inicialmente

r = interés anual

n = número de años

A = acumulación total al final de **n** años

Ejemplo: Si se invierten $1,000.00 al 8% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad total se tiene al final de 5 años?

Se tienen los siguientes datos:

P = $1,000.00

r = 8% = .08

n = 5 años

A = ?

Sustituimos estos valores en

$$\begin{aligned} A &= P(1+r)^n \\ &= 1000\,(1+.08)^5 \\ &= 1000\,(1.08)^5 \\ &= 1000\,(1.469328) \\ &= \$1469.32 \end{aligned}$$

Luego al final de 5 años se tendrán $1,469.32. $(1.08)^5$ se obtuvo de una tabla que trae cualquier libro de cálculos actuariales o se puede obtener usando una calculadora manual o usando logaritmos.

Ejemplo: Encontrar la cantidad total al cabo de 10 años que se obtiene con un capital inicial de $1,200.00 al 10% de interés anual.

Tenemos

P = 1200

r = .10

n = 10

Sustituyendo en la fórmula (1)

$$A = 1200\,(1+.10)^{10} = 1200\,(1.10)^{10}$$

En este ejemplo usamos logaritmos comunes para calcular **A**.

Así

$$\begin{aligned} \log A &= \log 1200\,(1.10)^{10} \\ \log A &= \log 1200 + 10 \log 1.10 \\ \log 1200 &= 3.0792 \\ 10 \log 1.10 &= \underline{\;.4139\;} \\ \log A &\quad 3.4931 \\ A &= \text{antilog } 3.4931 = 3112 \end{aligned}$$

Luego al final de 10 años se tienen $3,112.00

También se puede capitalizar semestralmente, trimestralmente, etc.

Puesto que **n** es el número de años y **r** la tasa de interés anual, se puede considerar a **A** como el resultado debido a cantidades compuestas anualmente, semestralmente, trimestralmente, etc.; si se designa por **s** el número de períodos de capitalización en un año, entonces el número de períodos en **n** años es **ns** y la tasa por período es $\frac{r}{s}$, por lo que **A** se puede expresar como:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{ns} \qquad (2)$$

Ejemplo: Encontrar la cantidad total al cabo de 8 años, que se obtiene con un capital inicial de $600 al 8% de interés anual.

a) Si la capitalización se hace trimestralmente.

En este caso

$s = 4$, luego

$$A = P\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{ns}$$

$$= 600\left(1 + \frac{.08}{4}\right)^{(8)(4)}$$

$$= 600\ (1 + .02)^{32}$$

$$= 600\ (1.02)^{32}$$

$$= 600\ (1.8845)$$

$$= \$1,130.72$$

b) Si la capitalización se hace mensualmente.

En este caso $s = 12$, luego

$$A = 600\left(1 + \frac{.08}{12}\right)^{(8)(12)}$$

$$= 600\left(1 + .006666\right)^{96}$$

$$= 600\left(1.006666\right)^{96}$$

$$= 600\ (1.8924)$$

$$= \$1,135.47$$

12.2 CRECIMIENTO NATURAL.

Otra forma de emplear logaritmos.

Si en la ecuación $A = P\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{ns}$ hacemos que **s** se haga cada vez más grande se obtiene una ecuación que se llama **ley del crecimiento natural***, la cual podemos expresar como

$$A = Pe^{rn} \quad (e = 2.71828.....)$$

que nos representa la cantidad total que se obtiene si **P** se capitaliza continuamente a un interés **r** durante **n** años.

Esta ley del crecimiento natural tiene muchas aplicaciones en Biología, Química, Economía, Estadística, etc.

Ejemplo: La población de una cierta ciudad en el año de 1974 es de 1.000,000 y crece continuamente a una tasa $r = 3.5\%$ anual, de acuerdo con la ley del crecimiento natural. Encontrar la población aproximada que tendrá en 1980, 1990.

a) Para 1980

$P = 1.000,000$

$r = 3.5\% = .035$

$n = 6$

$$A = Pe^{rn}$$

$$= 1.000,000\ e^{(0.035)(6)}$$

$$= 1.000,000\ e^{0.210}$$

* Para la deducción completa de esta Ley véase "Introducción a la Matemática Moderna" de Elbridge P. Vance, págs. 366-367.

$$\log A = \log 1.000{,}000\ e^{.210}$$

$$= \log 1.000{,}000 + .210 \log e \qquad (\log e = .4343)$$

$$\log 1.000{,}000 = 6.0000$$

$$.210 \log e \quad = \underline{\ 0912\ }$$

$$\log A = 6.0912$$

$$A = \text{antilog } 6.0912 = 1.233{,}677 \text{ habitantes}$$

b) para 1990

$P = 1.000{,}000$

$r = 3.5\% = .035$

$n = 16$

$$A = 1.000{,}000\ e^{(.035)(16)}$$

$$= 1.000{,}000\ e^{.56} \qquad (e^{.56} = 1.750671)$$

$$= 1.000{,}000\ (1.75067)$$

$$= 1.750{,}671 \text{ habitantes}$$

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior, decir en cuántos años se doblará la población de dicha ciudad.

En este caso:

$A = 2.000{,}000$

$P = 1.000{,}000$

$r = 3.5\% = .035$

$n = ?$

Sustituyendo en la ecuación de la Ley del crecimiento natural tenemos:

$$2.000{,}000 = 1.000{,}000\ e^{(.035)n}$$

simplificando queda:

$$2 = e^{0.035n}$$

Resolviendo para **n** usando logaritmos, tenemos:

$$\log 2 = \log e^{0.035n}$$

$$\log 2 = .035\ n \log e$$

$$\frac{\log 2}{\log e} = .035\ n$$

$$\frac{\log 2}{.035 \log e} = n$$

$$n = \frac{.3010}{(.035)\ (.4343)}$$

$$n = \frac{.3010}{.0152}$$

$$n = 19.8 \text{ años}$$

Por tanto, la población de tal ciudad se doblará en 19.8 años.

12.3 CALCULO DEL LOGARITMO DE UN NUMERO RESPECTO A CUALQUIER BASE.

Si conocemos el logaritmo de un número en cierta base, algunas veces es necesario calcular el logaritmo del número respecto a una base diferente; hacemos esto en la siguiente forma: Sea

No solamente existen logaritmos de base 10 ó base e.

$y = \log_a N$ entonces

$a^y = N$

Tomando logaritmo en base **b** en ambos miembros de la igualdad, se tiene

$$\log_b a^y = \log_b N$$

$$y \log_b a = \log_b N$$

luego, $y = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

Sustituyendo $y = \log_a N$ en esta última expresión tenemos:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Ejemplo: Encontrar una expresión que relacione los logaritmos de base e ó naturales con los logaritmos de base 10 o comunes.

Usando la expresión que acabamos de deducir tenemos:

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$$

$$= \frac{1}{\log_{10} e} \quad \log_{10} N$$

$$= \frac{1}{.4343} \quad \log_{10} N$$

$$\log_e N = 2.303 \ \log_{10} N = 2.303 \ \log N$$

cuando se trabaja con logaritmos de base e se acostumbra escribir el $\log_e$ como $\ln$, el cual se conoce como logaritmo natural.

Ejemplo: Encontrar $\log_8 326$

$$\log_8 326 = \frac{\log 326}{\log 8}$$

$$= \frac{2.5132}{.9031}$$

$$\log_8 326 = 2.7829$$

12.4 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas hacemos uso de las propiedades de la función exponencial y de la función logarítmica.

Ejemplo: Resolver para x la siguiente ecuación $5^{x+2} = 6^{x+1}$

Tomando logaritmos comunes en ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\log 5^{x+2} = \log 6^{x+1}$$

$$(x+2) \log 5 = (x+1) \log 6$$

$$(x+2) (.6989) = (x+1) (.7782)$$

$$.6989\, x + 1.3978 = .7782\, x + .7782$$

$$.6989\, x - .7782\, x = .7782 - 1.3978$$

$$-.0793\, x = -.6196$$

$$x = \frac{.6196}{.0793}$$

$$x = 7.81$$

Ejemplo: Resolver por x la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_2 (x+1) + \log_2 (x+1) = 2$$

Usando la propiedad del logaritmo de un cociente tenemos:

$$\log_8 \frac{x+1}{x} = 2$$

$$\frac{x+1}{x} = 8^2 \qquad \text{Definición de logaritmo}$$

$$\frac{x+1}{x} = 64$$

$$x + 1 = 64x$$

$$x - 64x = -1$$

$$-63x = -1$$

$$x = \frac{1}{63}$$

Ejemplo: Resolver para x la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 1) = 2.$$

Usando la propiedad del logaritmo de un producto tenemos:

$$\log_2 (x + 1)(x - 1) = 2$$

$$(x + 1)(x - 1) = 2^2 \quad \text{Definición de logaritmo}$$

$$x^2 - 1 = 4$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

Como solución se toma solamente $x = +\sqrt{5}$. ¿Por qué no podemos tomar como solución $x = -\sqrt{5}$?

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Calcular la cantidad compuesta al cabo de 15 años, con un capital inicial de \$5000 al 9% de interés anual. a) Capitalizable anualmente, b) Capitalizable semestralmente, c) Capitalizable continuamente.

2. ¿Qué tiempo se necesita para duplicar \$100, a) con interés anual del 4%, b) con interés compuesto continuamente al 4%?

En los problemas 3, 4 y 5 suponga que rige la Ley del crecimiento natural.

3. La población de una ciudad en 1975 es de 1000,000 y ha estado creciendo continuamente en los últimos 10 años a una tasa de 3.5% anualmente. ¿Cuántos habitantes tendrá el año 2000 si continúa la misma tasa de crecimiento? ¿Cuántos habitantes tenía hace 10 años?

4. En una reacción química, la concentración inicial de .02 aumenta a .05 en 2 minutos. a) ¿Cuál es la velocidad de aumento de la concentración por minuto? b) ¿Cuál será la concentración después de 5 minutos?

5. En un cierto cultivo se tienen inicialmente 500 bacterias y 3 horas después se tienen 5000 bacterias. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de las bacterias por hora?

6. Encuentre los siguientes logaritmos:

a) $\log_6 31$

b) $\log_8 1.86$

c) $\log_{15} 21.7$

d) $\log_9 10.81$

e) $\log_{20} 124$

f) $\log_2 354.1$

7. Resuelva para x las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $5^x = 625$

b) $6^{3x} = 216$

c) $4^{3x-1} = 8^{x+1}$

d) $5(2^{3x}) = 20^{x-2}$

e) $3^{x-2} = 2^{x+3}$

f) $15^{2x+1} = 10^{5x}$

8. Resuelva para x las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_{18} (x+2) + \log_{18} (x-1) = 1$

b) $\log_2 (2x+1) - \log_2 (x+1) = 3$

c) $\log_8 2x + \log_8 10 = 0$

d) $\log_6 (3x-1) - \log_6 (2x+3) = 2$

Bibliografía para consulta

Introducción a la Matemática Moderna.
Elbridge P. Vance.
Fondo Educativo Interamericano, S. A.
1968

Algebra Universitaria.
Earl Swokowski.
Compañía Editora Continental, S. A.
1975

Paneles de verificación

MODULO 9 – VALIDACION

2.
a) $5, 10, 20, 40.$

b) $-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}$

c) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}.$

d) $-\frac{1}{5}, 1, -5, 25.$

e) $c, cd, cd^2, cd^3.$

3. $a_8 = 4374, \quad S_8 = 6560.$

4. $a_6 = -\frac{1}{3}, \quad S_6 = \frac{182}{3}$

5. $a_7 = 8, \quad S_7 = \frac{127}{8}$

6. $\frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5}.$

7.. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}.$

8.
a). $a_6 = 486, \quad S_6 = 728$

b). $n = 7, \quad S_6 = 5465$

c). $a_1 = 5, \quad n = 8$

d). $r = 2, \quad n = 8$

e). $r = -3, \quad n = 7$

f). $r = \frac{1}{2}, \quad S_8 = \frac{255}{16}$

g). $a_n = -\frac{1}{625}, \quad S_7 = -\frac{13021}{625}$

9. $ 127.62815625

10. $50 \frac{14}{27}$ mts.

11. $ 65610

12.

a) $S_n = 5; \quad r = \frac{4}{5}$

b) $S_n = \frac{1}{2}; \quad r = \frac{1}{3}$

c) $S_n = \frac{1}{9}; \quad r = .1$

d) $S_n = 4; \quad r = \frac{1}{2}$

e) $S_n = -18; \; r = \frac{2}{3}$

f) $S_n = \frac{9}{4}; \quad r = -\frac{1}{3}$

g) $S_n = -1; \; r = -\frac{1}{4}$

h) $S_n = 1000; \; r = .9$

13. $r = \frac{3}{5}$

14. Suma de las áreas $= 72$ cms.^{2}

15. Suma de los perímetros $= \dfrac{48}{2 - \sqrt{2}}$ cms.

MODULO 10 – VALIDACION

2.–

a) $\log_5 625 = 4$

b) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

c) $\log_{10} .0001 = -4$

d) $\log_6 6 = 1$

e) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

f) $3^2 = 9$

g) $10^3 = 1000$

h) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125$

i) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

j). $(.1)^{-2} = 100$

3.

a). $m = 2$

b). $a = \frac{1}{2}$

c) $M = 216$

d). $m = 3$

4.

a). $\log_{15} 36 + \log_{15} 84$

b). $\log_{10} 75 - \log_{10} 15$

c). $\frac{1}{2} \log_{20} 408$

d). $\frac{1}{2} \log_{10} 93 + \log_{10} 18$

e). $2 \log_{10} 100 + \frac{1}{3} \log_{10} 36.8 - \frac{3}{2} \log_{10} 45$

5.

a). $\log_5 \dfrac{(20)(100)}{30}$

b) $\log_{10} (200)^5$

c). $\log_{20} \dfrac{300^{\frac{1}{2}}}{500^2}$

d). $\log_{10} \dfrac{(100)(60)^4}{20^4}$

e). $\log_b \dfrac{x + 1}{x - 1}$

MODULO 11 – VALIDACION

1. 1.4564
2. 2.5105
3. 0.9135
4. 1.7537
5. 3.5826
6. $\bar{1}.2529$
7. $\bar{3}.6647$
8. $\bar{2}.9877$
9. $\bar{4}.8272$
10. $\bar{1}.4893$
11. N = 74.49
12. N = 290.0
13. N = 1.046
14. N = 3738
15. N = 93990
16. N = 0.3912
17. N = 0.001014
18. N = 0.01922
19. N = 0.6059
20. N = 0.004075
21. $\bar{1}.9692$
22. $\bar{1}.8804$
23. $\bar{1}.5587$
24. $\bar{1}.4645$
25. $\bar{1}.9485$
26. .2762
27. 4.3538
28. .5007
29. 18120
30. .0027
31. 133.32
32. .00000000004283
33. 366.1
34. 89410
35. .1152

MODULO 12 – VALIDACION

1. a) $ 18,200
   b) $ 18,710
   c) $ 19,287
2. a) 17.7 años
   b) 17.3 años
3. 2'400,000 habitantes; 496,585 habitantes
4. a) r = 45.8% por minuto
   b) .197
5. r 76.7% por hora.
6.

a) 1.9166

b) .2984

c) 1.1364

d) 1.0834

e) 1.6090

f) 8.4687

7.

a) $x = 4$

b) $x = 1$

c) $x = \frac{5}{3}$

d). $x = 8.2937$

e). $x = 10.5462$

f) $x = .4442$

8.

a). $x = 4$

b). no tiene solución

c). $x = \frac{1}{20}$

d). $x = -1.5797$

UNIDAD XVI

RESOLUCION DE TRIANGULOS

Introducción

Esta unidad constituye la aplicación de los conceptos estudiados anteriormente, una vez que el alumno ha estudiado las funciones circulares, puede iniciarse en el manejo de las tablas de funciones circulares, como se indica en la presente unidad, y utilizar también el proceso de interpolación, para determinar el valor de las funciones circulares de ángulos no incluidos en la tabla.

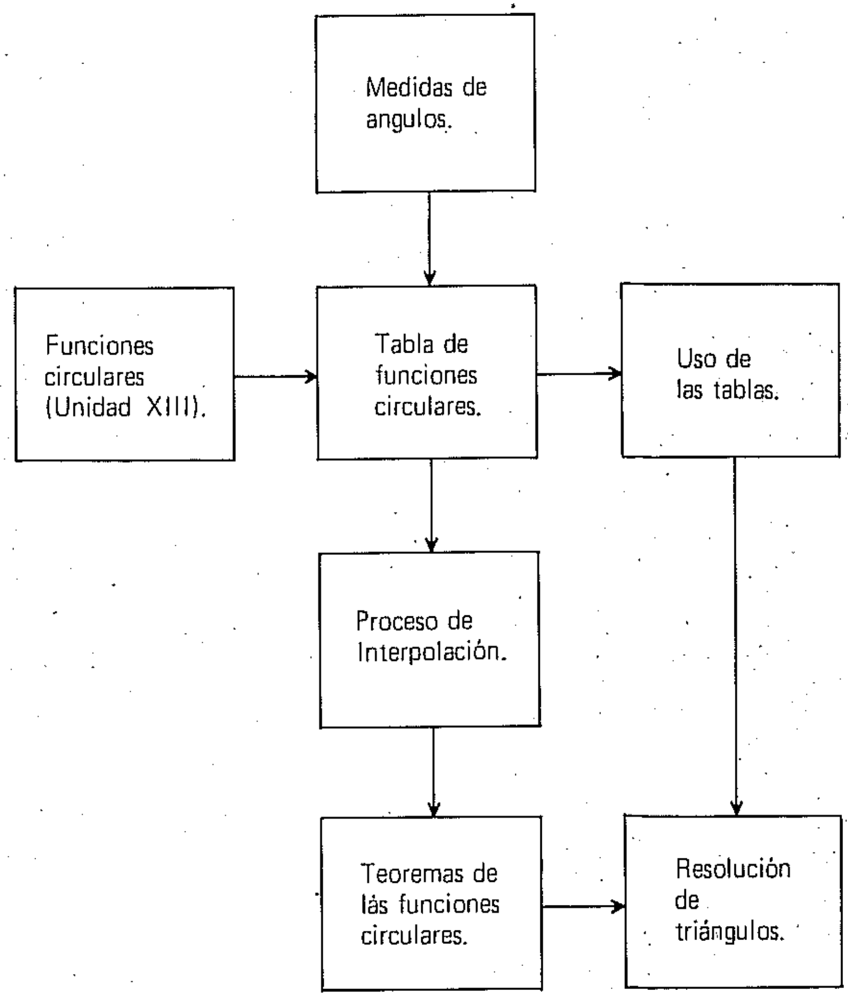
La parte más importante la constituye la resolución de triángulos que se realiza aplicando los teoremas de senos, cosenos y tangentes. Las ecuaciones que corresponden a dichos teoremas se han obtenido por medio de un procedimiento detallado.

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Utilizará las tablas de funciones circulares.
2. Aplicará el proceso de interpolación en la determinación del valor exacto de una función circular.
3. Identificará las medidas más usuales de los ángulos.
4. Aplicará las funciones circulares y sus teoremas en la resolución de triángulos cualesquiera.

Diagrama temático estructural



Glosario

Función circular de un número real: Toda función circular del ángulo cuya medida en radianes es θ, donde $\theta \in R$.

Teorema de los senos: En todo triángulo de angulos α β y γ y lados opuestos correspondientes a, b y c, se verifica la siguiente relación:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

Teorema de los cosenos: En todo triángulo de ángulos α, β y γ y lados opuestos correspondientes a, b y c, se verifica la siguiente relación:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Teorema de las tangentes: En todo triángulo de angulos α, β y γ y lados opuestos correspondientes a, b y c, se verifica la siguiente relación.

$$\frac{\tan \, {}^1/_2 \, (\alpha - \beta)}{\tan \, {}^1/_2 \, (\alpha + \beta)} = \frac{a - b}{a + b}$$

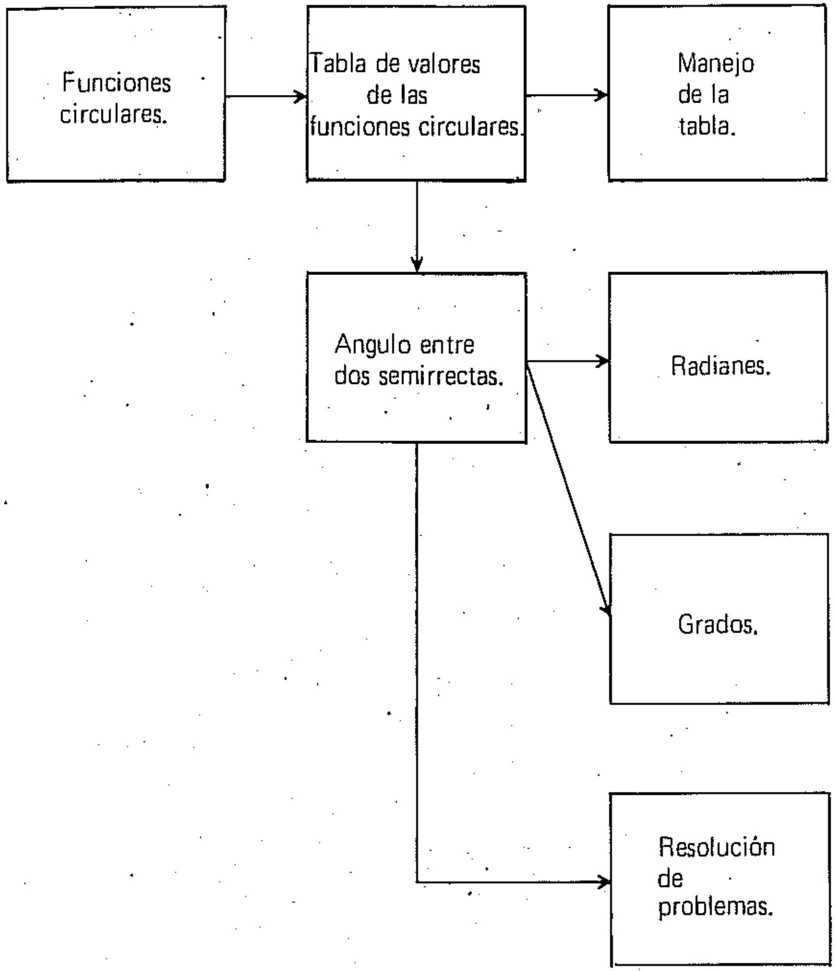
Módulo 13

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará la función circular de un número dado utilizando la tabla, la interpolación y las fórmulas de reducción.
2. Explicará el concepto de ángulo entre dos semirrectas.
3. Describirá la forma en que se miden los ángulos.
4. Dado un ángulo en grados lo expresará en radianes.
5. Dado un ángulo en radianes lo expresará en grados.
6. Resolverá un problema dado en el que se proporcionan suficientes datos referidos a la medida de ángulos.

ESQUEMA – RESUMEN



13.1 VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES DE UN NUMERO REAL CUALQUIERA

También es necesario determinar los valores de las funciones circulares de un número real cualquiera.

En algunas secciones anteriores, ya ha encontrado los valores de funciones circulares para algunos números; por ejemplo $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 0.5$ que es racional en tanto que, $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, son números irracionales que pueden sustituirse por aproximaciones decimales con la precisión que se requiera.

Algunos de estos valores expresados por radicales, son los valores de las funciones circulares de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ y sus múltiplos que usted ya ha manejado. (Figura 1).

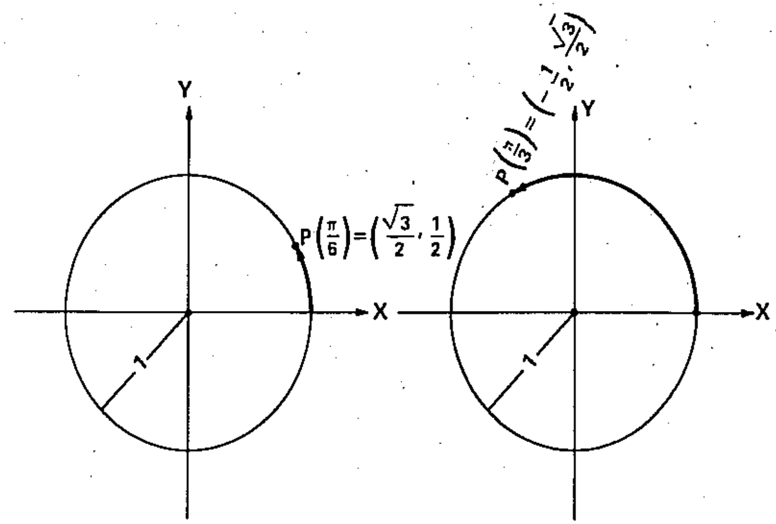


Figura 1

Para determinar los valores de las funciones circulares de un número real β arbitrario, podemos aproximar $|\beta|$ sobre el arco de la circunferencia unitaria a partir de $(1, 0)$ y de esta forma ubicar la posición del punto terminal $P(\beta)$ como se muestra en la Figura 2.

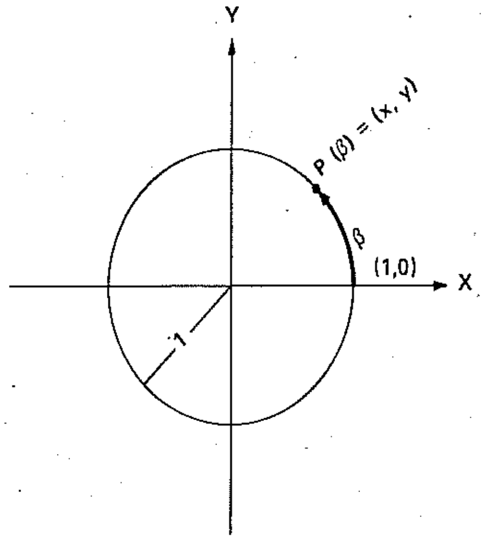


Figura 2

Ahora podemos medir las coordenadas **x** y **y** de **P(β)** y de esta manera determinamos los valores aproximados para las funciones coseno y seno, y con base a éstos, los valores de las funciones circulares restantes.

En la práctica, esta forma de determinar los valores de las funciones no se usa por disponer de tablas que simplifican este trabajo.

El método que usualmente se emplea para determinar los valores de estas funciones con una buena precisión, está fundamentado en conceptos de cálculo y queda fuera del objetivo de este libro. De acuerdo con este método, se determinan ciertos valores de las funciones circulares que se agrupan en lo que se llama una Tabla de Valores de las Funciones Circulares.

13.2 MANEJO DE LA TABLA.

La Tabla III que se muestra en el apéndice, tiene valores con aproximación de cuatro decimales, de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente a intervalos

de aproximadamente **0.0029** para números positivos hasta $\frac{\pi}{2} = 1.5708$.

La tabla III nos da valores con aproximación suficiente.

A partir de estos números dados en la columna encabezada por la palabra **radián** (que definiremos más adelante), se determinan los valores aproximados de las funciones para un número real arbitrario.

Recuerde que la función circular de un número real es igual a la cofunción de $\frac{\pi}{2}$ menos el número. Por ejemplo:

$$\text{sen } 0.5 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - .5\right) = \cos\ 1.0708$$

$$\text{tg } 0.5708 = \cot\left(\frac{\pi}{2} - .5708\right) = \cot\ 1$$

$$\csc\ 1.000 = \sec\left(\frac{\pi}{2} - 1.000\right) = \sec\ 0.5708$$

$$\cot\beta = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \text{ donde } \beta \in \mathbf{R}$$

En base a lo anterior, la Tabla III se ha construido de manera que los números de **0** á $\frac{\pi}{4} = 0.7854$ aparecen a la izquierda en tanto que los números de **0.7854** á **1.5708** están a la derecha. Además las funciones circulares que se indican en la parte superior, corresponden a los números de la izquierda y las indicadas en la parte inferior a los de la derecha.

Es importante notar que usando la Tabla III se pueden determinar los valores de las funciones circulares de un número real cualquiera, hasta $\frac{\pi}{2} = 1.5708$, y para números reales mayores de $\frac{\pi}{2}$ se utilizan fórmulas generales de reducción (o algún método equivalente), las cuales nos permiten expresar las funciones circulares de un número real arbitrario como funciones de un número entre **0** y $\frac{\pi}{2}$, y entonces utilizar la Tabla III.

Debido al hecho anterior, solamente requerimos la Tabla III para números reales hasta $\frac{\pi}{2}$ o sea que el punto terminal **P(β)** está en el primer cuadrante y por consiguiente, las funciones circulares de la Tabla III son positivas.

Manejemos la tabla III.

Enseguida veamos el manejo de la Tabla III con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Determinar **cot 0.1367**

Solución: Puesto que el número **0.1367** se encuentra en la columna de la izquierda, buscamos la función circular en la parte superior y desplazándonos hacia abajo, leeremos su valor correspondiente o sea **cot 0.1367 = 7.2687.** Lo anterior se ilustra en el siguiente esquema:

Grados	Radianes	sen	tg	cot	cos		
	0.1367 →		→	7.2687			

Ejemplo 2: Determinar **tg 1.4515**

Solución: Puesto que el número **1.4515** se encuentra en la columna de la derecha, buscamos la función circular **tg** en la parte inferior y desplazándonos hacia arriba, leeremos su valor correspondiente o sea **tg 1.4515 = 8.3450**, lo cual se ilustra en el siguiente esquema:

				8.3450	←	1.4515	
		cos	cot	tg	sen	Radianes	Grados

Ejemplo 3: Determinar **sen 1.4520**

Solución: Puesto que el valor **1.4520** no está en la tabla, aproximaremos al valor más cercano; esto es:

sen 1.4520 ≈ sen 1.4515 = 0.9929*

luego, **sen 1.4515 ≈ 0.9929**

Ejemplo 4: Determinar **cos 8**

* ≈ Significa aproximadamente igual a.

Solución: Utilizando fórmulas generales de reducción tenemos que

cos 8 = cos [5(1.5708) + 0.1460] = − sen 0.1460

y buscar sus dos soluciones

− sen 0.1460 ≈ − sen 0.1454 ≈ − 0.1449

luego, **cos 8 ≈ − 0.1449**

Otra manera de resolverlo:

El punto terminal **P(8)** se encuentra en el segundo cuadrante y esto nos indica que el valor **cos 8 < 0** o sea negativo. (Figura 3).

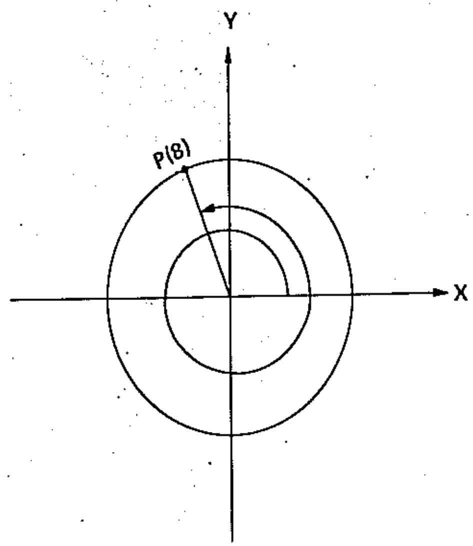


Figura 3

Puesto que **8 = 5(1.5708) + 0.1460**, vemos que su arco reducido* es **1.5708 − 0.1460 ≈ 1.4248**, así que:

cos 8 ≈ −cos 1.4248

lo cual nos conduce igual que las fórmulas de reducción, a **cos 8 ≈ − 0.1449**

* Para toda $\alpha \in R$ el arco reducido es el arco menor que $\frac{\pi}{2}$ limitado por el punto terminal $P(\alpha)$ y el eje **X.**

Ejemplo 5: Determinar el número β entre **0** y $\frac{\pi}{2}$ tal que $\cot\beta = 11.000$

En la columna de cotangente en la Tabla III, encontramos **11.059** que es el valor tabulado más cercano y de este modo $\beta \approx 0.0902$.

Es importante hacer notar que β puede tomar otros valores, pero ninguno en el intervalo requerido. Tal situación se presenta a continuación.

Ejemplo 6: Determinar el número β entre **0** y 2π tal que $\cot\beta = 11.0000$

Solución: En el ejemplo anterior, se encontró que $\beta \approx 0.0902$, y puesto que $\cot\beta > 0$, el punto terminal $P(\beta)$ está en el I o III cuadrantes, así que buscamos un arco en el III cuadrante tal que su arco reducido sea **0.0902**, como se ilustra en la Figura 4.

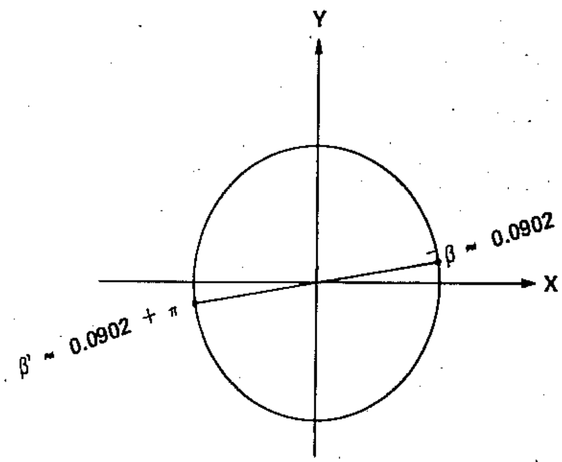


Figura 4

Por tanto $\beta' \approx \pi + 0.0902$ ó $\beta = 3.2318$ Así que la solución tiene dos respuestas:

$\beta \approx 0.0902$

o $\beta \approx 3.2318$

13.3 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES A ANGULOS.

¿Qué se entiende por ángulo?

Estudiará dos importantes aplicaciones de funciones circulares. En una de ellas el número real β es la medida de un ángulo y en la otra, se usan las funciones circulares en la solución de triángulos.

Para estudiar la primera aplicación, necesita recordar algunos conceptos de geometría. Empecemos con la noción de ángulo.

Un ángulo es la unión de dos semirrectas con el mismo punto extremo; a las dos semirrectas se les llama lados del ángulo y a su punto extremo, vértice. (Figura 5).

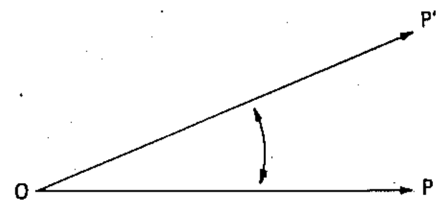
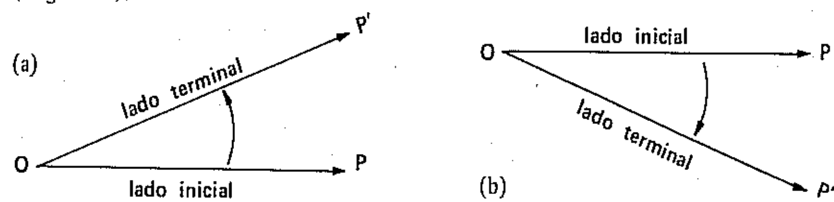


Figura 5

Un ángulo definido así tiene una magnitud que se mide por la rotación necesaria para llevar una semirrecta desde su posición hasta la otra; a la primera le llamamos lado inicial del ángulo y a la segunda lado terminal.

También los ángulos son positivos o negativos.

La medida del ángulo o el ángulo mismo es positivo si el sentido del giro (indicado por una flecha curvilínea) es contrario a como giran las agujas de un reloj, y negativo si el sentido del giro es el mismo de como giran las agujas de un reloj. Los ángulos de las figuras (a) y (c) son positivos, mientras que el de la figura (b) es negativo. (Figura 6).



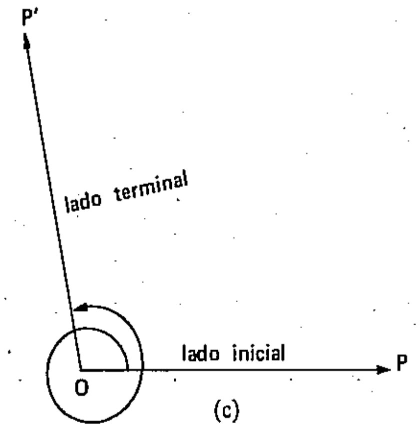


Figura 6

Posición normal de un ángulo.

Un ángulo está en posición normal respecto de un sistema de coordenadas rectangulares, cuando su **vértice,** coincide con el origen y su lado inicial con el sentido positivo del eje **X.** La Figura 7 muestra un ángulo positivo y un ángulo en posición normal con una longitud de arco **S.**

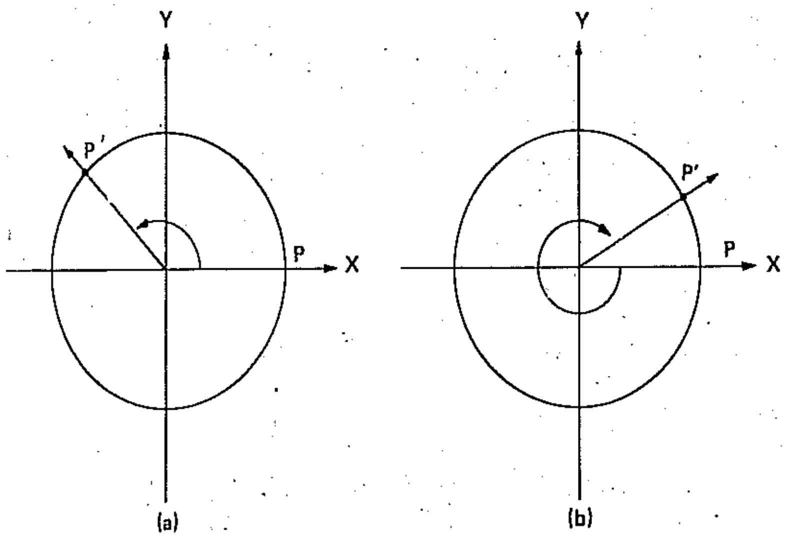


Figura 7

13.4 MEDIDAS DE ANGULOS.

¿Qué es una revolución?

La primera unidad de medida de ángulos que consideraremos, es llamada revolución y se entiende por **revolución**, el número de vueltas que necesita dar el lado inicial para generar el ángulo. Entonces el número de revoluciones correspondientes a un ángulo cualquiera, queda determinado por la razón entre la longitud del arco circular s y la longitud de la circunferencia, por lo que:

$$\text{Angulo en revoluciones} = \frac{s}{2\pi r}$$

Por ejemplo, si un punto **P** en el lado inicial recorre un cuarto de circunferencia, la medida del ángulo generado es un cuarto de revolución. Asimismo, si **P** en el lado inicial recorre tres veces la circunferencia, la medida del ángulo es tres revoluciones.

En dos circunferencias concéntricas con radios r y r', la razón de cada arco circular a la longitud de su circunferencia es la misma, es decir:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{s}{2\pi r'}$$

(Ver Figura 8).

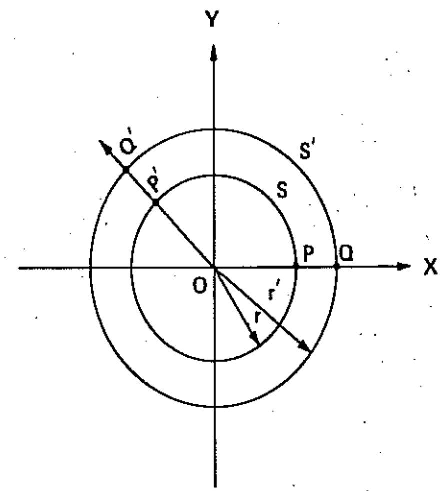


Figura 8

La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados.

Lo anterior nos indica que la magnitud de un ángulo cualquiera es independiente de la longitud de sus lados.

Si bien las revoluciones constituyen la medida natural de ángulos, existen otros sistemas más convenientes. Uno de ellos es el **sistema sexagesimal**, en el cual la unidad de medida es el **grado**. Un ángulo de 360°* equivale a un ángulo de una revolución, (1° = 60′ (minutos) y 1′ = 60″ (segundos)

También los ángulos se miden por grados.

> Definición: **La medida de un ángulo en grados está dada por la expresión**
>
> **Angulo en grados = (número de revoluciones) (360°)**

Ejemplos:

Angulo de media revolución = $\frac{1}{2}(360°) = 180°$

Angulo de un cuarto de revolución = $\frac{1}{4}(360°) = 90°$

Angulo de dos revoluciones = $2\,(360°) = 720°$

. . .y también por radianes.

El sistema más utilizado en Matemática, es el sistema cíclico cuya unidad de medida es el **radián**.

> Definición: **La magnitud de un ángulo medido en radianes se da por la expresión**
>
> **Angulo en radianes = (número de revoluciones) (2π)**

La anterior definición se justifica si recordamos que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π.

* El ° como superíndice se usa para indicar grados.

Ejemplos:

Media revolución es $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ radianes.

Una revolución es $1\,(2\pi) = 2\pi$ radianes.

Un cuarto de revolución es $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ radianes.

De acuerdo con las definiciones anteriores, podemos establecer que:

1 revolución $= 360° = 2\pi$ radianes.

Así: π radianes $= 180°$

1 radián $= \frac{180}{\pi}$

$1° = \frac{\pi}{180}$

Ejemplo 1:

Expresar 120° en radianes.

Solución:

$$120°\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{120°\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$$

Ejemplo 2:

Expresar $\frac{\pi}{3}$ radianes en grados.

Solución: $\frac{\pi}{3}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{\pi\, 180°}{\pi} = 60°$

Ejemplo 3:

Expresar $\frac{3}{4}$ de revolución en grados.

Solución:

$$\frac{3}{4}\text{ revolución}\ \frac{360°}{1\text{ revolución}} = \frac{3\,(360°)}{4} = 270°$$

Ejemplo 4: Expresar el ángulo de 150° 20′ en radianes. En este caso utilizar la Tabla III del Apéndice, donde los ángulos están dados en las dos unidades: grados y radianes. Puesto que

$150° \ 20' = 90° + 60° \ 20'$

De acuerdo con la tabla se tiene que

$150°20' = \frac{\pi}{2} + 1.0530 = 1.5708 + 1.0530$

$150° \ 20' = 2.6238$ **radianes.**

Ejemplo 5: Encontrar la relación de un **ángulo central*** β medido en radianes en una circunferencia de radio r que subtiende un arco de longitud s.

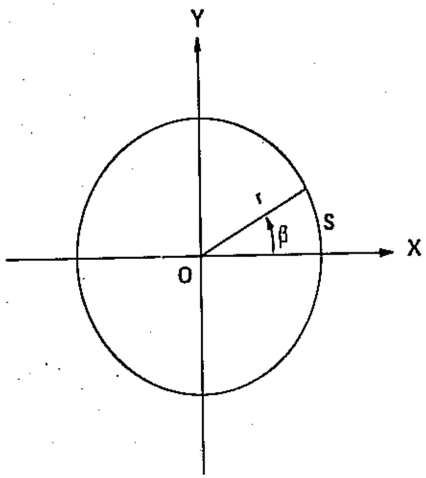
Solución: Si sustituimos el valor de número de revoluciones dado por $\frac{s}{2\pi r}$ en la definición de ángulo medido en radianes, se tiene que:

Angulo en radianes = (número de revoluciones) (2π)

$= \left(\frac{s}{2\pi r}\right) 2\pi = \frac{s}{r}$ Así que

Angulo en radianes $= \beta = \frac{S}{r}$ y de esto se obtiene la relación $s = r\beta$

s es el arco de una circunferencia de radio r con ángulo central β. (Figura 9).



(Figura 9)

* Angulo central es un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia.

donde r y s deben tener las mismas unidades y β es un ángulo medido en radianes.

La tabla III también tiene una columna de radianes.

En la ecuación $s = r\beta$ si $r = 1$ entonces $s = \beta$ es decir si el ángulo central y el arco son iguales entonces la medida de un ángulo en radianes es el número real β para el cual hemos definido todas las funciones circulares. Debido al hecho anterior, podemos utilizar la columna **"radianes"** en la Tabla III del Apéndice cuando queremos encontrar una función circular de un número real cualquiera. Está convenido que cuando en un ángulo no se indique una unidad de medida, ésta será el **radián**.

Ejemplo 6:

a) La longitud del arco determinado por un ángulo central de $\frac{2}{5}$ de radianes en una circunferencia de 10 centímetros de radio es

$s = r\beta = 10\left(\frac{2}{5}\right) = 4$ **cms.**

b) En la misma circunferencia un ángulo central de 60° o sea $\frac{\pi}{3}$ radianes, determina un arco cuya longitud es

$s = r\beta = 10\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$ **cms.**

c) En la misma circunferencia un arco cuya longitud es de 20 centímetros, subtiende un ángulo central:

$\beta = \frac{s}{r} = \frac{20}{10} = 2$ **radianes**

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los problemas de 1 al 8, determinar el valor de cada una de las expresiones dadas, usando la Tabla III. (Usar el valor más próximo de la tabla).

1. sen 1.5
2. cos 0.1018
3. tg 1.3

4. cot 0.96
5. sen 4
6. cos 12
7. tg 30
8. cot 25

En los problemas del 9 al 12, encuentre el número β entre 0 y $\frac{\pi}{2} = 1.5708$, usando la Tabla III (Tomar el valor más cercano de la tabla).

9. $\operatorname{sen}\beta = 0.2810$
10. $\cos\beta = 0.3000$
11. $\operatorname{tg}\beta = 4.1124$
12. $\cot\beta = 5.0650$

En los problemas del 13 al 15, encuentre el número β entre 0 y $2\pi = 6.2832$, usando la Tabla III (Tomar el valor más cercano de la tabla).

13. $\operatorname{sen}\beta = 0.9900$
14. $\cos\beta = 0.9610$
15. $\operatorname{tg}\beta = 1.6$

En los problemas del 16 al 26, ubicar los ángulos dados en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares, indicando los lados inicial y terminal. Utilizar una flecha curva para indicar el sentido en que se mide el ángulo.

16. $\frac{1}{2}$ revolución
17. $\frac{3}{4}$ revolución
18. $-\frac{3}{8}$ revolución
19. $45°$
20. $135°$
21. $-300°$
22. $390°$
23. $\frac{2\pi}{3}$

24. $\frac{3\pi}{2}$
25. $-\frac{5\pi}{6}$
26. $\frac{\pi}{4}$
27. Expresar los ángulos dados en los problemas del 1 al 6 en radianes; dé la respuesta en términos de π.
28. Expresar los ángulos dados en los problemas del 4 al 11, en revoluciones.
29. Expresar los ángulos dados en los problemas del 1 al 3 y del 8 al 11, en grados.

En los problemas del 30 al 34 transformar los ángulos dados a radianes, utilizando si es necesario la Tabla III; tomar el valor más próximo en la tabla.

30. $48°$
31. $75°$
32. $15° \ 40'$
33. $165° \ 13'$
34. $-245° \ 10'$

En los problemas del 35 al 38, transformar los ángulos dados a grados y minutos, aproximando los resultados al minuto más cercano; si es necesario usar la Tabla III.

35. 0.1890
36. 0.2530
37. 2.5008
38. -5

En los problemas del 39 al 42, reducir cada una de las siguientes expresiones a un único ángulo en grados y minutos entre 0' y 59'.

39. $45° \ 15' + 15° \ 50'$
40. $154° \ 45' + 20° \ 38'$
41. $360° - 153° \ 18'$
42. $180° - 76° \ 13'$
43. Determinar el arco que subtiende un ángulo central de 25° en una circunferencia que tiene de radio 5 cm.
44. Si un arco de 80 cm. de longitud subtiende un ángulo central de 20 radianes, determinar el radio de la circunferencia.

45. El minutero de un reloj mide 8 cm. ¿Qué distancia(s) recorre la punta del minutero durante 30 minutos?
46. Una rueda de 120 cm. de diámetro gira a razón de 80 r.p.m. (revoluciones por minuto).
    a) ¿Cuántos radianes gira por segundo?
    b) Encuentre la velocidad con que se mueve un punto del borde de la rueda.
    c) ¿Qué distancia(s) ha recorrido un punto en la periferia de la rueda después de 2 segundos?
47. Un tren se mueve a razón de 12.8 km/hr sobre una vía circular cuyo radio mide 760 metros. ¿Qué ángulo describe en un minuto? Expresarlo en radianes.

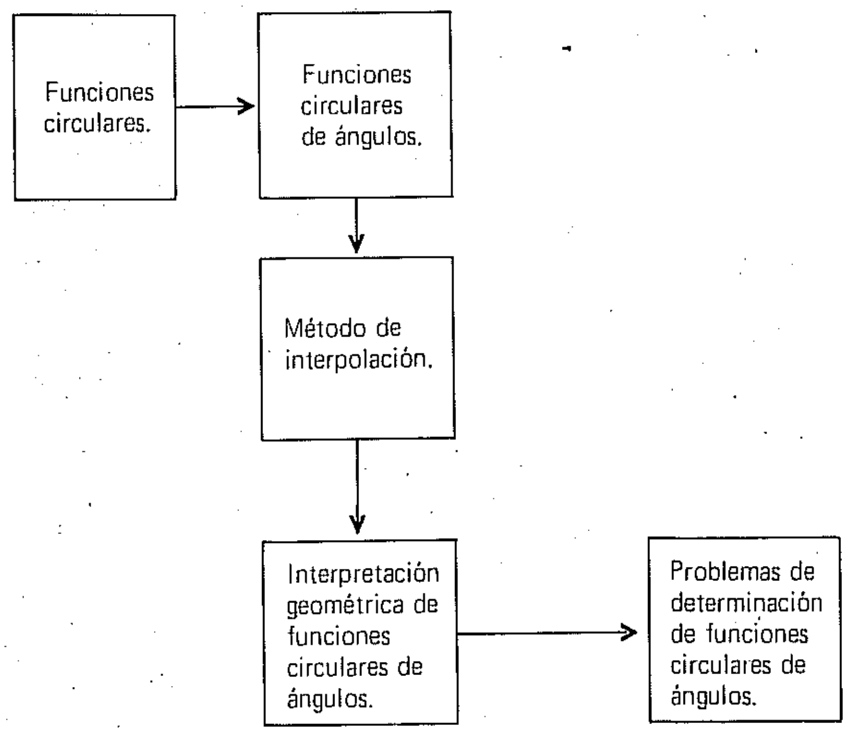
Módulo 14

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará el valor exacto de una función circular de un ángulo dado, usando la tabla y el método de interpolación.
2. Conocido el valor de una de sus funciones expresará en grados o radianes un ángulo, como ángulo agudo positivo, utilizando el método de interpolación.
3. Determinará las funciones circulares de un ángulo dadas las coordenadas de uno de los puntos por donde pasa su lado terminal.

ESQUEMA – RESUMEN



14.1 FUNCIONES CIRCULARES DE ANGULOS.

En la circunferencia unitaria la medida de un arco es igual a. . .

En la relación $s = r\beta$, si $r = 1$ (Circunferencia unitaria), resulta que $s = \beta$; esto significa que la medida de un arco en la circunferencia unitaria, es numéricamente igual a la medida en radianes del ángulo que la subtiende. (Figura 1).

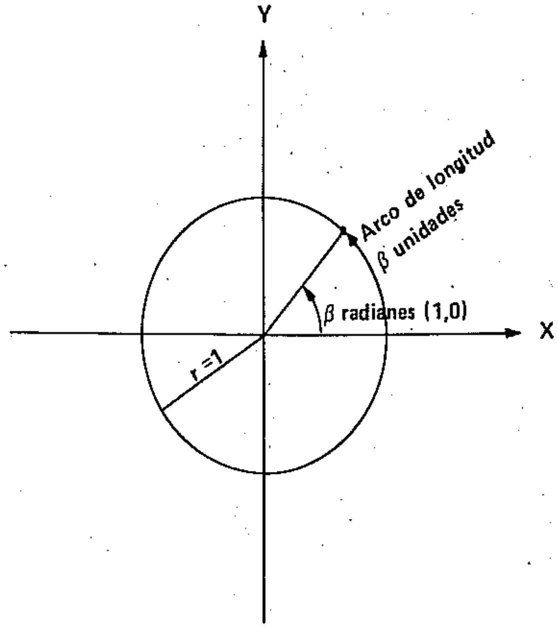


Figura 1

Por esta razón es que al determinar el valor de una función circular de un número real, dicho número real lo buscamos en la columna de radianes y como ya sabe transformar de radianes a grados y viceversa, podrá usar indistintamente las columnas de la Tabla III para determinar los valores de las funciones correspondientes, como lo verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen} 45^\circ$

Solución: $\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo 2: Determinar el valor exacto de $\cos 120^\circ$

Solución: $\cos 120^\circ = \cos 4(30^\circ) = \cos 4\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Ejemplo 3: Determinar el valor exacto de $\operatorname{tg} 135^\circ$.

Solución: $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg} 3(45^\circ) = \operatorname{tg} 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$

En los ejemplos anteriores, se han determinado valores de funciones circulares de ángulos que pueden representarse en forma exacta pero en general, se utiliza la Tabla III del Apéndice para determinar funciones circulares de cualquier valor.

Ejemplo 4: Determinar el valor exacto de $\cot 38^\circ 20'$

Solución: En la Tabla III, buscamos en la columna encabezada "grados" el $38^\circ 20'$ y frente a este valor en la columna cotangente se lee 1.2647 o sea que $\cot 38^\circ 20' = 1.2647$.

Ejemplo 5: Calcular el valor de $\operatorname{sen} 25^\circ 17'$

Solución: Puesto que $25^\circ\ 17'$ no se encuentra en la Tabla III, y dicho valor se encuentra entre $25^\circ\ 10'$ y $25^\circ\ 20'$, utilizaremos el Método de interpolación lineal, el cual supone que si un ángulo queda entre dos valores consecutivos de la Tabla entonces entre los valores de sus funciones circulares existen diferencias proporcionales a los valores de las funciones circulares correspondientes.

La Tabla III nos indica que:

$\operatorname{sen} 25^\circ\ 10' = 0.4253$

$\operatorname{sen} 25^\circ\ 20' = 0.4279$

y nosotros buscamos $\operatorname{sen} 25^\circ\ 17'$. Con los datos anteriores, formemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \beta & & \text{sen } \beta \\ 10\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 25^\circ\ 10' \\ 25^\circ 17' \end{array}\right] \\ 25^\circ\ 20' \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0.4253 \\ \boxed{} \end{array}\right\} x \\ 0.4279 \end{array}\right\} 26 \end{array}$$

En el esquema anterior, los [ ] señalan la diferencia entre los dos valores conocidos. Así, entre $25^\circ\ 10'$ y $25^\circ\ 20'$ hay **10**; entre **0.4253** y **0.4279** hay **26**; entre $25^\circ\ 10'$ y $25^\circ\ 17'$ hay **7** de diferencia, y entre $\boxed{}$ (valor que buscamos) y **0.4253** hay **x**.

La diferencia entre $25^\circ\ 10'$ y $25^\circ\ 17'$ es $\frac{7}{10}$ de la diferencia entre $25^\circ\ 10'$ y $25^\circ\ 20'$; $\text{sen } 25^\circ\ 17'$ debe estar en la misma proporción entre **0.4253** y **0.4279**. Entonces la proporción será:

$\frac{7}{10} = \frac{x}{26}$; así pues

$$x = \frac{7\ (26)}{10} = \frac{182}{10} = 18.2$$

Como la interpolación no puede dar una exactitud mayor que la dada en las tablas, redondeamos el valor de **x** al entero más próximo; esto es, $x \approx 18$ y **añadimos** 18 al valor de **0.4253** y obtenemos como resultado;

$$\text{sen } 25^\circ\ 17' = 0.4271$$

También se puede encontrar el valor de $\text{sen } 25^\circ\ 17'$ mediante el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \beta & & \text{sen } \beta \\ 10\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 25^\circ\ 10' \\ 25^\circ\ 17' \end{array}\right] 3 \\ 25^\circ\ 20' \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} 0.4253 \\ \left.\begin{array}{l} \boxed{} \\ 0.4279 \end{array}\right\} x \end{array}\right\} 26 \end{array}$$

Luego la proporción es:

$$\frac{3}{10} = \frac{x}{26} \Rightarrow x = \frac{3(26)}{10} = \frac{78}{10} = 7.8$$

Redondeando $x = 8$

En este caso, le restamos el valor de $x = 8$ á **0.4279** quedando $\text{sen } 25^\circ 17' = 0.4271$. Como ha observado, se obtiene el mismo valor en ambos casos.

El valor buscado ($\boxed{}$) siempre queda entre dos valores consecutivos de la tabla y si la diferencia **(x)** se establece entre el valor menor conocido y el buscado, la **x** se suma al menor de los valores conocidos y si la diferencia **(x)** se establece entre el valor buscado $\boxed{}$ y el mayor de los valores conocidos, entonces **x** se resta del mayor de los valores conocidos.

Ejemplo 6:

Hallar $\cot 52^\circ\ 13'$.

Solución: $52^\circ\ 13'$, está entre $52^\circ\ 10'$ y $52^\circ\ 20'$. Hagamos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \beta & & \cot \beta \\ 10\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 52^\circ\ 10' \\ 52^\circ\ 13' \end{array}\right] 3 \\ 52^\circ 20' \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0.7766 \\ \boxed{} \end{array}\right\} x \\ 0.7720 \end{array}\right\} 46 \end{array}$$

y formando la proporción

$$\frac{3}{10} = \frac{x}{46}$$

entonces:

$$x = \frac{3(46)}{10} = \frac{138}{10} = 13.8$$

redondeando: $x = 14$

Luego $\cot 52^\circ\ 13' = 0.7766 - 14 = 0.7752$

Ejemplo 7:

Si $\cot\beta = 2.2030$, hallar β, siendo éste un ángulo agudo positivo.

Solución:

Formemos el diagrama:

$$\begin{array}{cc} \beta & \cot\beta \\ 10\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}24^\circ\ 20'\\ \boxed{}\end{array}\right\}x\\ 24^\circ\ 30'\end{array}\right. & \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}2.2113\\ 2.2030\end{array}\right\}83\\ 2.1943\end{array}\right\}170 \end{array}$$

De donde $\frac{x}{10} = \frac{83}{170}$

Entonces: $x = \frac{83(10)}{170} = 4.8$

Redondeando: $x = 5$ y sumando a $24^\circ\ 20'$ resulta

$\beta = 24^\circ\ 25'$

Nota: El mismo proceso se puede usar, cuando el ángulo está dado en radianes.

Ejemplo 8:

Hallar $\cot 0.3765$ usando la Tabla III.

Solución: Formemos el diagrama

$$\begin{array}{cc} \beta & \cot\beta \\ 30\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0.3752\\ 0.3765\end{array}\right\}13\\ 0.3782\end{array}\right. & \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}2.5386\\ \boxed{}\end{array}\right\}x\\ 2.5172\end{array}\right\}214 \end{array}$$

De donde $\frac{x}{214} = \frac{13}{30}$

Entonces $x = \frac{(13)(214)}{30} = 92.7$

Redondeando $x = 93$ y restando $x = 93$ a 2.5386 se tiene:

$\cot 0.3765 = 2.5293$

Ejemplo ilustrativo. $\operatorname{sen} 500^\circ$

Solución:

Podemos aplicar las fórmulas generales de reducción (o un método equivalente: arco reducido) y también las fórmulas especiales de reducción (relaciones entre cofunciones) que se utilizaron para números reales en tema anterior, tomando solamente la equivalencia que se tiene entre grados y radianes; específicamente $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$. (Conviene estudiar de nuevo estos temas).

En el ejemplo, puesto que $500^\circ = 5(90^\circ) + 50^\circ$, se tiene que

$$\operatorname{sen} 500^\circ = \operatorname{sen}\left[5(90^\circ) + 50^\circ\right] = \cos 50^\circ$$

o usando también el ángulo reducido que es $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$, se sigue que:

$\operatorname{sen} 500^\circ = \operatorname{sen} 40^\circ$ (Ver Figura 2).

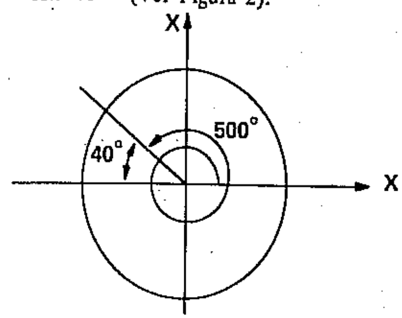


Figura 2

14.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DE FUNCIONES CIRCULARES DE ANGULOS.

También las funciones circulares de ángulos tienen una interpretación geométrica.

En temas anteriores, hemos estudiado funciones circulares de números reales y su interpretación geométrica. Veremos desde ese punto de vista las funciones circulares de ángulos.

Consideremos para ello, un ángulo β en posición normal, que ha sido generado por la rotación de un segmento de recta de longitud r (Figura 3).

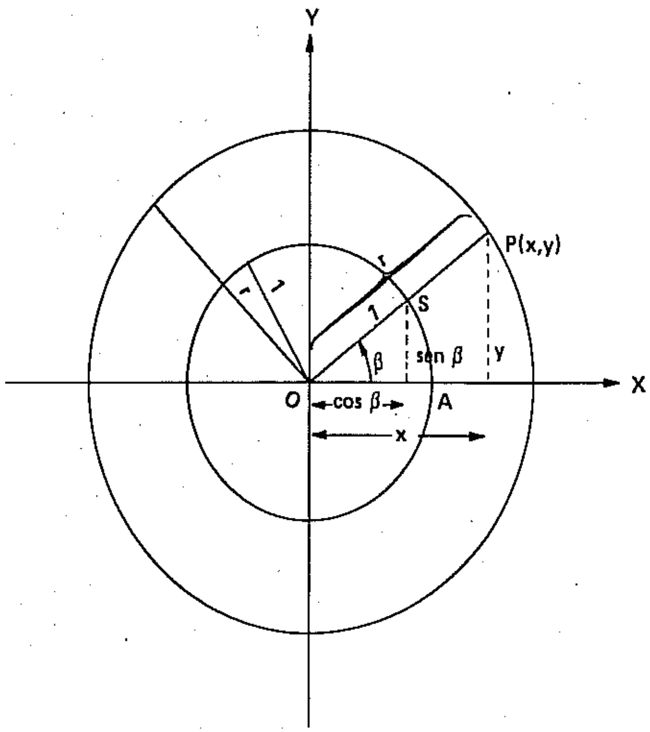


Figura 3

Utilicemos las propiedades de los triángulos semejantes.

Sean (x,y) las coordenadas de P, punto en el lado terminal del ángulo a una distancia r del origen. Al trazar una circunferencia unitaria con centro en O, el punto de intersección de ella con el lado terminal, se representa

por S y la del arco AS por (β) de modo que las coordenadas de S son ($\cos\beta$, $\operatorname{sen}\beta$). Si se bajan perpendiculares desde S y P al eje X, se forman triángulos rectángulos semejantes, de manera que

$$\frac{x}{\cos\beta} = \frac{r}{1}\ ; \quad \frac{y}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{1}$$

Así que

$$x = r\cos\beta \qquad y \qquad y = r\operatorname{sen}\beta$$

Se puede verificar que estas relaciones se cumplen para cualquier cuadrante donde se encuentren P y S. Así podemos establecer que:

Si P(x,y) es un punto situado a una distancia del origen, en el lado terminal de un ángulo β, en posición normal, las coordenadas de P, en términos de r y β, están dadas por las expresiones:,

$$x = r\cos\beta \qquad y \qquad y = r\operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

También podemos concluir a partir de las expresiones anteriores que,

$$\cos\beta = \frac{x}{r} \qquad y \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{y}{r} \quad (r \neq 0) \qquad (2)$$

Si $r = 1$, P(x,y) se encuentra en la circunferencia unitaria y coincide con S.

Si en las ecuaciones dadas por (1) elevamos ambos miembros al cuadrado, y sumamos respectivamente ambos miembros de las coordenadas tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\beta + r^2\cos^2\beta$$

$$= r^2(\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta)$$

$$= r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{de donde} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que es una forma de llegar a la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio = r.

Resumiendo lo anterior, hemos encontrado las coordenadas de un punto P a una distancia r del origen que se encuentra en el lado terminal de un ángulo β en posición normal, en términos de r y β, las cuales son $(r \cos \beta,\ r \text{ sen } \beta)$.

Ejemplo 1:

Sea β un ángulo en posición normal, tal que su lado terminal contiene a $(-4, 3)$. Determine $\text{sen}\beta$, $\cos\beta$, y $\text{tg}\beta$:

Solución:

Pueso que $x = -4$, y $y = 3$, entonces:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5; \text{ por tanto,}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

así que: $\text{sen } \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ y $\text{tg } \beta = -\frac{3}{4}$

Ejemplo 2:

Sea β un ángulo en posición normal, de manera que su lado terminal contiene a $(3,-4)$. Determinar r sen β, $\cos \beta$ y $\sec \beta$.

Solución: como $x = 3$ y $y = -4$ entonces,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

por tanto:

$$\text{sen } \beta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Así que:

$$\text{sen } \beta = -\frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \sec \beta = \frac{5}{3}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Encuentre los valores numéricos exactos de las expresiones dadas en los problemas del 1 al 4.

1. $\text{sen } 330°$
2. $\cos 150°$
3. $\text{tg } 225°$
4. $(\text{sen } 330°)\ (\cos 150°)\ (\text{tg } 225°)$

En los problemas del 5 al 11, determinar β expresándolo en grados entre $0°$ y $360°$ que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones.

5. $\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\text{tg } \beta = -1$
8. $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
9. $\sec \beta = 2$
10. $\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
11. $\csc \beta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

En los problemas del 12 al 16, escribir cada una de las expresiones dadas como función de un ángulo agudo positivo menor que 45°

12. sen 230°

13. cos 620°

14. tg 125°

15. cos (−148°)

16. tg 840°

En los problemas del 17 al 24, determinar el valor numérico de cada una de las expresiones, utilizar la Tabla III. (Utilizar el método de interpolación).

17. sen 54° 22'

18. cos 32° 13'

19. tg 79° 45'

20. cot 50° 57'

21. sen 26°

22. cos 1°54'

23. tg 21°30'

24. cot 1°45'

En los problemas del 25 al 28 determinar β como un ángulo agudo positivo, utilizando el método de interpolación, y expresarlo en grados y minutos.

25. sen $\beta = 0.9468$

26. cos $\beta = 0.1404$

27. tg $\beta = 2.7775$

28. cot $\beta = 0.2315$

En los problemas del 29 al 32 determinar β como un ángulo agudo positivo; expresarlo en radianes, y utilizar el método de interpolación.

29. sen $\beta = 0.5167$

30. cos $\beta = 0.9727$

31. tg $\beta = 4.9131$

32. cot $\beta = 6.6166$

En cada uno de los problemas del 33 al 38, el lado terminal de un ángulo en posición normal contiene a el punto indicado. Determinar las funciones circulares seno, coseno y tangente de cada ángulo.

33. (4,3)

34. (−3,4)

35. (3,0)

36. (12,5)

37. (3,8)

38. (0,5)

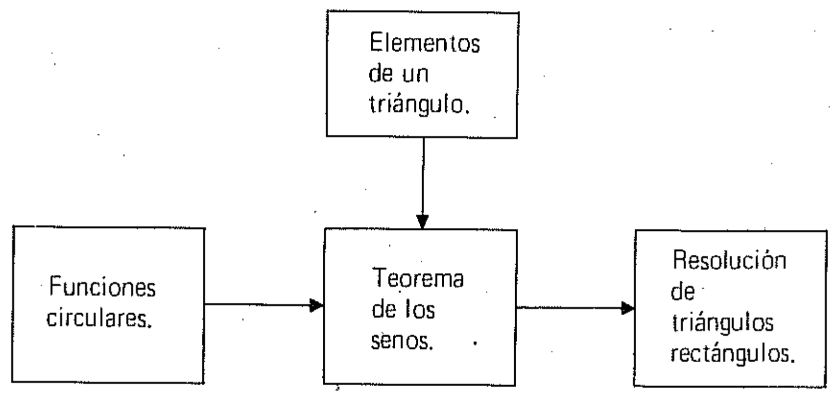
Módulo 15

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Identificará los elementos de un triángulo.
2. Deducirá el "teorema de los senos".
3. Resolverá un triángulo rectángulo dado utilizando las expresiones trigonométricas que relacionan a dos de los elementos conocidos y a uno de los desconocidos.

ESQUEMA – RESUMEN



15. APLICACION DE LAS FUNCIONES CIRCULARES A LA RESOLUCION DE TRIANGULOS.

Elementos de un triángulo.

Ahora veremos cómo las funciones circulares pueden aplicarse a la resolución de triángulos. Es conveniente recordar que un triángulo tiene 6 elementos: tres lados y tres ángulos, y que resolver un triángulo consiste en calcular tres de los elementos cuando se conocen los otros tres, siempre que por lo menos uno de ellos sea un lado.

Consideraremos algunos teoremas utilizados en la resolución de triángulos y aceptaremos que un triángulo puede resolverse cuando se conocen:

1) Dos ángulos y un lado.
2) Dos lados y el ángulo comprendido.
3) Los tres lados.
4) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (en este caso pueden existir hasta dos soluciones).

15.1 TEOREMA DE LOS SENOS.

Está convenido representar los ángulos de un triángulo **ABC** cualquiera, por α, β, γ, respectivamente a los lados opuestos **a, b, y c.** (Figura 1).

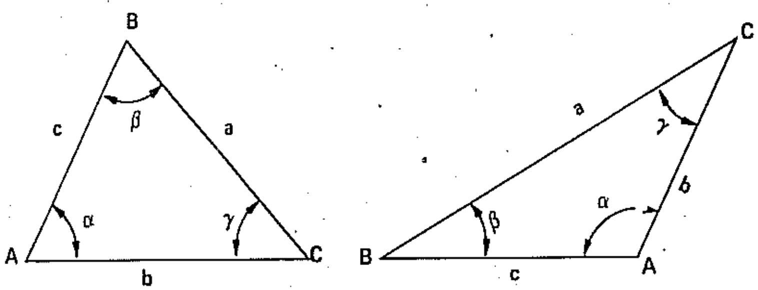
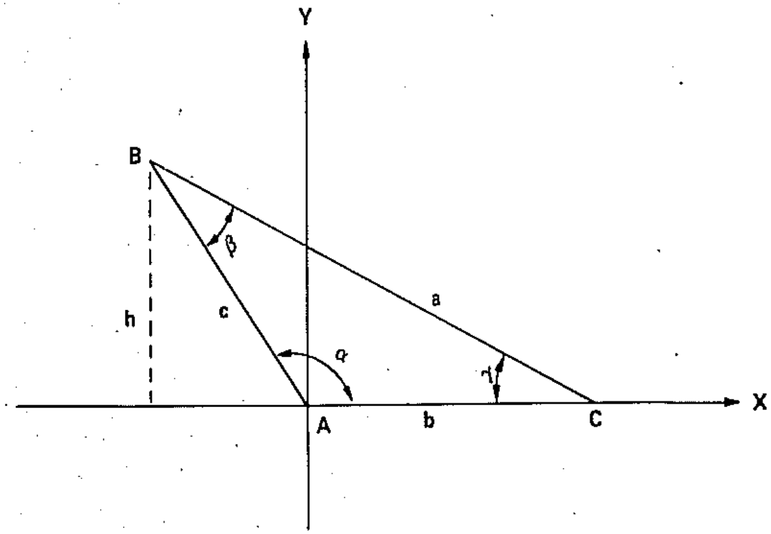


Figura 1

Dibujemos un triángulo en un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que el ángulo α esté en posición normal (Ver Figura 2). Como ya sabe las coordenadas de **B** son **(c cos α, c sen α).**



(Figura 2)

En este caso, la altura **h** del triángulo es **c sen α**; o sea **h = c sen α** y el área del triángulo está dada por

$A = \frac{1}{2}$ (base) (altura), y sustituyendo se tiene que

$$A = \frac{1}{2}\ b\ c\ \operatorname{sen}\alpha \qquad (1)$$

Base por la altura sobre dos.

O sea que el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman. Asimismo, en términos de **a, c** y el ángulo que forma (β).

$$A = \frac{1}{2}\ a\ c\ \operatorname{sen}\beta \qquad (2)$$

Y en términos de **a, b** y el ángulo que forma (γ). (3)

$$A = \frac{1}{2}\ a\ b\ \operatorname{sen}\gamma$$

Si igualamos las expresiones (1) y (2) se tiene que:

$$\frac{1}{2}\ bc\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\ ac\ \operatorname{sen}\beta$$

$$b\ \operatorname{sen}\alpha = a\ \operatorname{sen}\beta$$

de donde

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \qquad (4)$$

De la misma manera, si igualamos las expresiones (2) y (3).

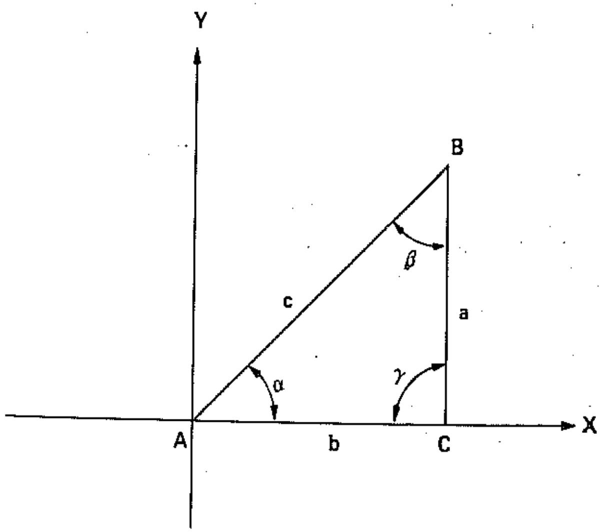
$$\frac{1}{2}\,ac\ \text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\,ab\ \text{sen}\,\gamma\ ; \qquad \text{así que}\ \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \quad (5)$$

Las ecuaciones obtenidas en (4) y (5) se les llama el **teorema de los senos.**

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}} \qquad (6)$$

15.2 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS.

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto.



(Figura 3)

De la Figura 3 tenemos que:

si $\gamma = 90°$, entonces (6) se reduce a:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{1} \qquad \text{de donde}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}; \quad \text{sen}\,\beta = \frac{b}{c} \qquad (7)$$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y $\gamma = 90°$ entonces

$\gamma + \beta = 90°$ ó $\alpha = 90° - \beta$ así que

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= (90° - \beta) \\ &= \cos 90°\ \cos\beta + \text{sen}\ 90°\ \text{sen}\,\beta \\ &= \text{sen}\,\beta \\ \cos\alpha &= \text{sen}\,\beta \end{aligned}$$

Dado que $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{c}$ (8)

de (7) y (8) se obtiene $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b},\ \cos\alpha \neq 0$ (9)

De acuerdo con (7), (8), (9) y Figura 3, podemos afirmar que en todo triángulo rectángulo **ACB**, con $\gamma = 90°$, que

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto á}\ \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente á}\ \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto á}\ \alpha}{\text{cateto adyacente á}\ \alpha}$$

$$\cot\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente á}\ \alpha}{\text{cateto opuesto á}\ \alpha}$$

$$\sec\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente á}\ \alpha}$$

$$\csc\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto á}\ \alpha}$$

Estas expresiones sólo son válidas cuando el triángulo es rectángulo. Al resolver un triángulo rectángulo, es conveniente hacer un dibujo del mismo, de preferencia a escala, encerrar en círculos los elementos dados, escribir las expresiones trigonométricas que relacionan a 2 de los elementos conocidos y a 1 de los desconocidos, y resolver para el elemento no conocido. Este procedimiento se ilustra con los siguientes ejemplos.

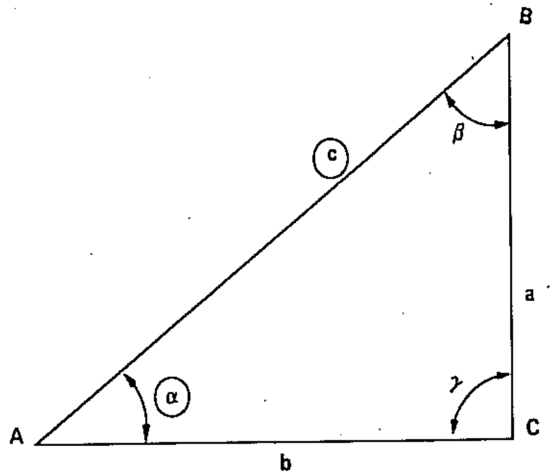
Debemos dibujar el triángulo rectángulo.

Ejemplo 1:

Resuelva el triángulo rectángulo **ACB, si c = 8, α = 50°**

Solución:

Tracemos el triángulo rectángulo **ACB** (Figura 4) y encerremos los datos en círculos:



(Figura 4)

Puesto que $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces $\beta = 40^\circ$

Una función trigonométrica que relaciona los dos elementos conocidos α y **c** con el elemento no conocido **a**, es

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}$$

De donde $a = c \ \text{sen}\,\alpha$

y la función trigonométrica que relaciona α, **c** y **b**, es

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

De donde $b = c \ \cos\alpha$

Sustituyendo valores numéricos en (10) y (11), se tiene que

$$a = 8 \ \text{sen}\ 50^\circ = 8\ (0.7660) = 6.128$$
$$b = 8 \cos 50^\circ = 8\ (0.6428) = 5.1424$$

De esta manera hemos resuelto el triángulo rectángulo, luego

$a = 6.128$ y $b = 5.1424$ y $\beta = 40^\circ$

En el ejemplo 2 ilustraremos ahora la resolución de un triángulo rectángulo, usando las Tablas de Logaritmos (Tabla I) y (Tabla IV).

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo rectángulo **ACB,** dados
$a = 51$, $b = 26$.

Solución:

Tracemos el triángulo **ACB** (Figura 5) y encerremos los datos en círculos.

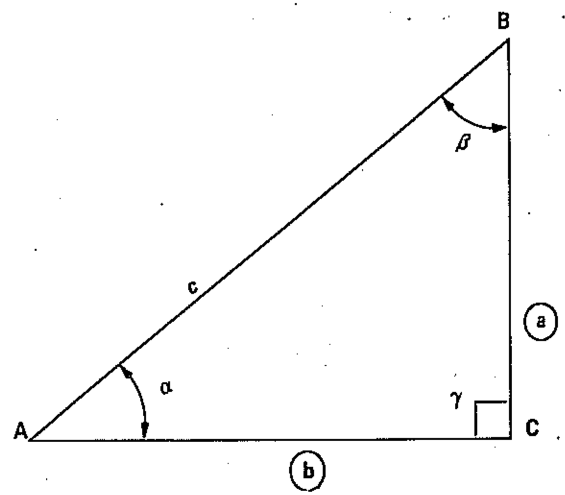


Figura 5

En este caso, da lo mismo cuál de los dos ángulos se determine primero, así que

$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{51}{26}$; tomando logaritmos se tiene:

$$\log\ \text{tg}\,\alpha = \log 51 - \log 26$$

$\log\ tg\,\alpha = 1.7076 - 1.4150$

$\log\ tg\,\alpha = 0.2926$

$\alpha = 63^\circ$ (usando Tabla IV)

Entonces:

$\beta = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$ y c, a, α, pueden relacionarse con

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ de donde

$c = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$; sustituyendo valores numéricos, se tiene que:

$c = \frac{51}{\operatorname{sen} 63^\circ}$ y tomando logaritmos

$\log c = \log 51 - \log \operatorname{sen} 63^\circ$

$= 1.7076 - \bar{1}.9499$ (Tabla II)

$= 1.7577$

$c = 57.2400$

Por tanto, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 27^\circ$ y $c = 57.2400$

Ejemplo 3:

Un camino tiene una pendiente de 10° ¿cuánto asciende el camino por cada kilómetro? (Figura 6).

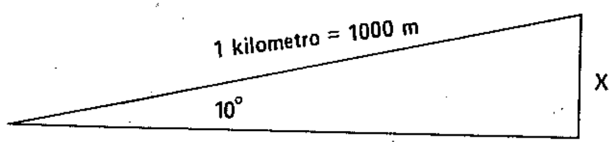


Figura 6

Así se tiene que $\operatorname{sen} 10^\circ = \frac{x}{1000}$

De donde:

$x = 1000 \operatorname{sen} 10^\circ$

$= 1000\ (0.1736)$

$= 173.6$

Respuesta: **173.6** metros por kilómetro.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los problemas del 1 al 7, determinar los ángulos y lados no conocidos para los cuales se tiene en cada caso $\gamma = 90^\circ$.

1. $a = 48.620$; $b = 37.640$
2. $c = 84.725$; $\beta = 41^\circ 42'$
3. $a = 240$; $\alpha = 35^\circ\ 20'$
4. $c = 5.430$ $\beta = 25^\circ\ 17'$
5. $b = 3572$; $c = 4846$
6. $a = 32$ $\alpha = 17^\circ$
7. $a = 37.9$; $b = 57.3$

8. Una escalera de 15 metros está apoyada en una casa de manera que forma un ángulo de 70° con la horizontal. ¿A qué altura está el extremo superior de la escalera?

9. Un parque rectangular mide 30 por 270 metros. Determinar la longitud de la diagonal y el ángulo que ésta forma con el lado mayor.

10. Una antena de televisión está sostenida por tres tirantes de acero sujetos a anclas situadas a 70 metros de la base e igualmente espaciadas alrededor de ella. Encuentre el ángulo que forma cada tirante con el piso y la longitud del mismo, si sus anclas están respectivamente a 70,100 y 125 metros de altura sobre el suelo.

11. Sabiendo que el ángulo de elevación o el ángulo de depresión de un objeto desde el punto de vista de un observador, es el ángulo en el plano vertical del objeto que forman la horizontal y la visual al objeto, encuentre la altura de un árbol si un observador está a 25 metros de su base y el ángulo de elevación es de 30°. (Figura 7).

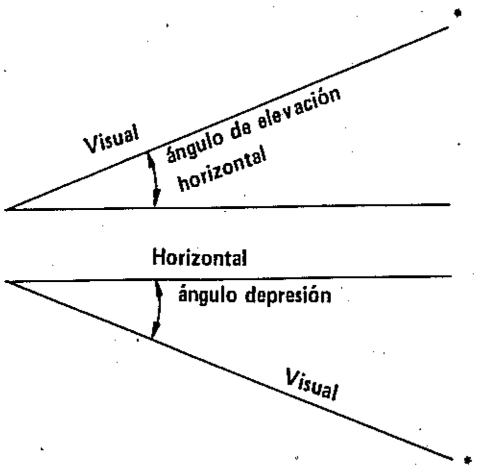


Figura 7

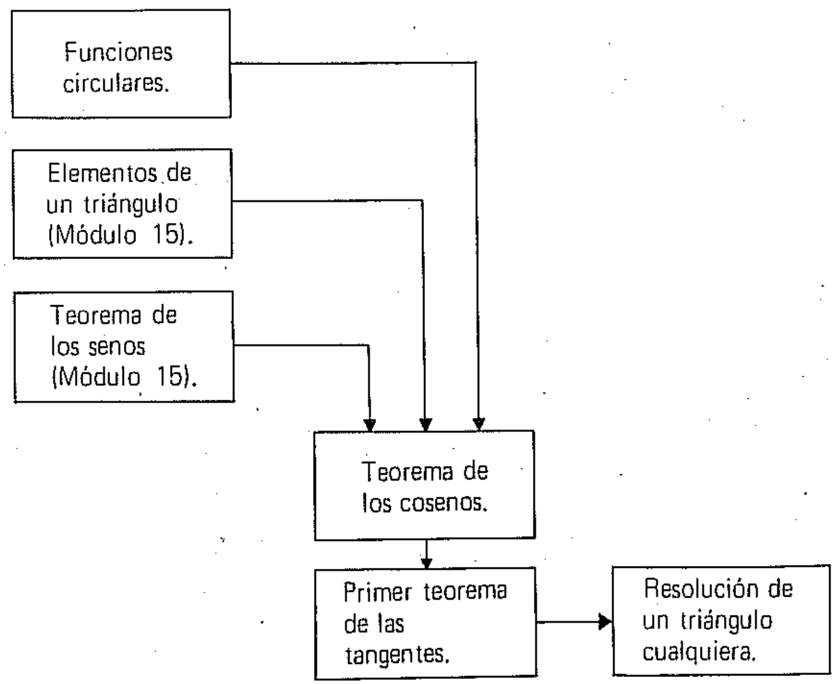
Módulo 16

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Deducirá el "teorema de los cosenos".
2. Resolverá un triángulo oblicuángulo dado aplicando los teoremas de los senos y de los cosenos.
3. Deducirá el "primer teorema de las tangentes".
4. Aplicará el primer teorema de las tangentes a la resolución de un triángulo cualquiera.

ESQUEMA – RESUMEN



Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, entonces. . .

16.1 TEOREMA DE LOS COSENOS.

Cuando se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido, el triángulo no puede resolverse por el **Teorema de los senos.**

Supongamos que se conocen **b, c,** y α, si colocamos el triángulo **ABC** en un sistema de coordenadas cartesianas de manera que el ángulo α esté en posición normal y **AC** coincida con el sentido positivo del eje **X**, entonces las coordenadas de **B** son $(c\cos\alpha,\ c\ \text{sen}\ \alpha)$ (Figura 1).

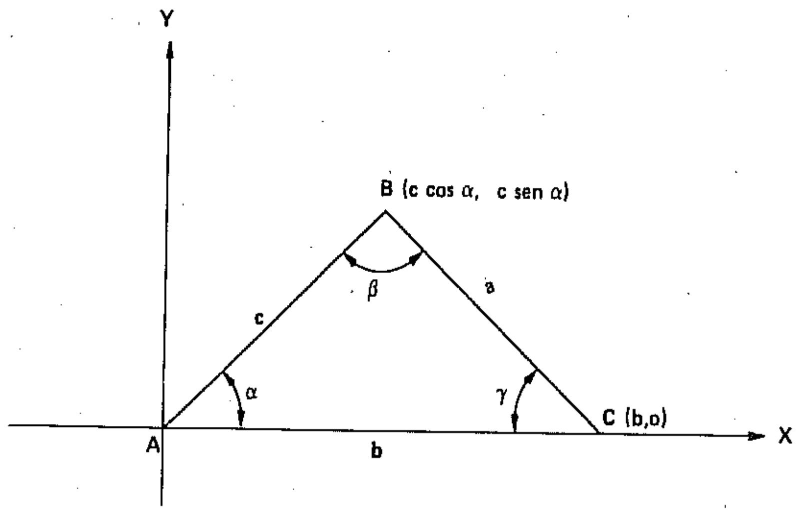


Figura 1

Aquí aplicamos la distancia entre dos puntos.

Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos encontramos **BC,** luego:

$$a^2 = \overline{BC}^2 = (c\cos\alpha - b)^2 + (c\ \text{sen}\alpha - 0)^2$$

$$= c^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + b^2 + c^2\ \text{sen}^2\alpha$$

$$= b^2 + c^2(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc\cos\alpha.$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Esta última expresión se conoce con el nombre de **Teorema de los Cosenos.**

Cuando se conocen **a, c,** y β, se puede escribir el **Teorema de los cosenos** como:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$

y si conocemos **a, b** y γ, como:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

16.1.1 SOLUCION DE TRIANGULOS OBLICUANGULOS.

Triángulo oblicuángulo es aquél que no tiene ningún ángulo recto. En un triángulo oblicuángulo los 3 ángulos son menores de 90°, o uno de ellos es mayor de 90° y menor de 180°. Resolveremos algunos triángulos aplicando los Teoremas de los Senos y de los Cosenos.

Ejemplo 1:

Resolver el triángulo **ABC** dados

$$\alpha = 25^\circ,\ \beta = 50^\circ,\ c = 57$$

Solución: $\gamma = 180^\circ - (25^\circ + 50^\circ) = 105^\circ$

Conocido γ, podemos aplicar el Teorema de los Senos para encontrar **a, b.**

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

de donde $a = \dfrac{c\ \text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \gamma} = \dfrac{57\ \text{sen}\ 25^\circ}{\text{sen}\ 105^\circ}$

Tomando logaritmos:

$$\log a = \log 57 + \log \text{sen}\ 25^\circ - \log \text{sen}\ 105^\circ$$

$$= 1.7559 + \bar{1}.6259 - \log \text{sen}\ 75^\circ$$
$$= 1.7559 + \bar{1}.6259 - \bar{1}.9849$$
$$= 1.2970$$
$$a = 24.94$$

Asimismo

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

de donde

$$b = \frac{c \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{57 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \log b &= \log 57 + \log \operatorname{sen} 50^\circ - \log \operatorname{sen} 105^\circ \\ &= 1.7559 + \bar{1}.8843 - \bar{1}.9849 \\ &= 1.6553 \\ b &= 45.22 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Resolver el triángulo **ABC**, dados $a = 130$, $b = 220$, $\gamma = 28^\circ$

Solución:

Utilizar el Teorema de los Cosenos para encontrar **c**

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma \\ c^2 &= (130)^2 + (220)^2 - 2\,(130)\,(220) \cos 28^\circ \\ c^2 &= 16900 + 48400 - 50504.60 \\ c^2 &= 14795.3976 \\ c &= 121.64 \end{aligned}$$

Ahora utilizaremos el Teorema de los Senos para encontrar α :

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{130 \operatorname{sen} 28^\circ}{121.64}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0.50175$$

$$\alpha = 30^\circ\ 7'$$

así que $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 58^\circ\ 7'$

$$\beta = 121^\circ\ 53'$$

Para facilitar el cálculo con logaritmos cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido, podemos utilizar el **Primer Teorema de las Tangentes**, ya que el uso del Teorema de los Cosenos es más laborioso.

También es útil emplear otro teorema.

16.2 PRIMER TEOREMA DE LAS TANGENTES.

Del Teorema de los senos, para un triángulo cualquiera tenemos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (1)$$

entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{b} \qquad (2)$$

Sumando 1 a ambos miembros de (2) se tiene:

$$1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a+b}{b} \qquad (3)$$

Restando 1 a ambos miembros de (2), tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} - 1 = \frac{a}{b} - 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a-b}{b} \qquad (4)$$

Dividiendo (4) entre (3)

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta} = \frac{a-b}{a+b}$$

Usando las expresiones para la conversión de sumas a producto, tenemos:

$$\frac{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\cot\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

y como $\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$ tenemos finalmente

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{a-b}{a+b}}$$

Teorema de las Tangentes

Observe que existe en esta expresión una relación entre los ángulos y sus lados opuestos, así:

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} = \frac{c-a}{c+a}}$$

Las restantes relaciones las puede obtener de la misma manera, en caso necesario.

16.3 RESOLUCION DE TRIANGULOS CUALESQUIERA

Ejemplo 3:

Resolver el triángulo **ABC** si $a = 16$, $b = 26$, $c = 34$.

Solución:

Este ejemplo se resuelve aplicando el Teorema de los Cosenos, como sigue:

$$a^2 = (16)^2 = 256 \qquad 2\,ab = 832$$
$$b^2 = (26)^2 = 676 \qquad 2\,ac = 1088$$
$$c^2 = (34)^2 = 1156 \qquad 2\,bc = 1768$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = 0.8914 \Rightarrow \alpha = 27^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} = 0.2353 \Rightarrow \beta = 47^\circ\ 26'$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab} = -0.2692 \Rightarrow \gamma = 105^\circ\ 37'$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\ 3'$$

Ejemplo 4:

Resolver el triángulo **ABC** dados: $a = 66$, $b = 28$, $\gamma = 47^\circ$

Solución:

Utilizamos el Primer Teorema de las Tangentes.

Tenemos que $\alpha + \beta = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$

como $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \dfrac{a-b}{a+b}$ entonces

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Tomando logaritmos

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) &= \log(a-b) - \log(a+b) + \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\\
&= (\log 38 - \log 94) + \log\operatorname{tg} 66^\circ\ 30'\\
&= 1.5798 - 1.9731 + 0.3617\\
&= 0.0315\\
&= \bar{1}.9685\\
\frac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 42^\circ\ 55'\\
\alpha-\beta &= 85^\circ\ 50'
\end{aligned}$$

resolvemos el sistema para α y β, obteniendo

$$\alpha = 109^\circ\ 25' \quad \text{y} \quad \beta = 23^\circ\ 35'$$

Para encontrar **c**, utilizamos el Teorema de los Senos.

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$$

$$= \frac{66 \text{ sen } 47^\circ}{\text{sen } 109^\circ 45'}$$

Tomando logaritmos se tiene:

$$\log c = \log 66 + \log \text{sen } 47^\circ - \log \text{sen } 109^\circ 25'$$

$$= 1.8195 + \bar{1}.8641 - \bar{1}.9737$$

$$= 1.7099$$

$$c = 51.27$$

Ejemplo 5:

Determinar los dos triángulos que se forman dados

$a = 60$, $b = 75$, $\alpha = 44^\circ$

Solución:

En este ejemplo existe la posibilidad de dos soluciones puesto que $\text{sen }(180^\circ - \beta) = \text{sen}\beta$; es decir, que al aplicar el Teorema de los Senos y resolver respecto a β, quedan determinados dos valores, y para cada uno de ellos existen valores correspondientes de γ y c. De esta manera, hay dos soluciones distintas como se muestra en las Figuras 2 y 3.

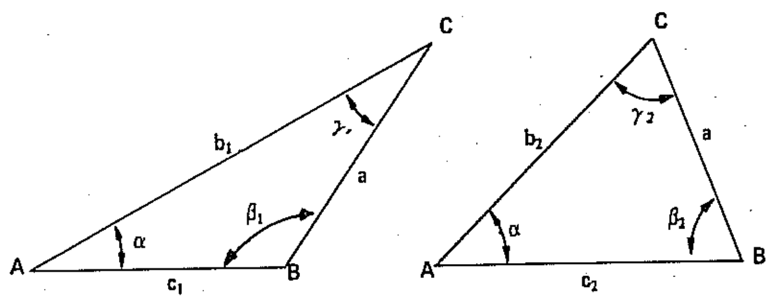


Figura 2

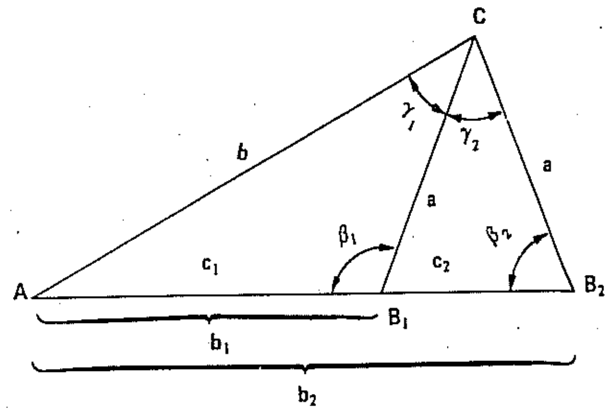


Figura 3

Se encuentra β

$$\frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\alpha}{a}$$

de donde $\text{sen}\beta = \dfrac{b \text{ sen } \alpha}{a}$

$$\log \text{sen } \beta = \log b + \log \text{sen } \alpha - \log a$$

$$= \log 75 + \log \text{sen } 44^\circ - \log 60$$

$$= 1.8751 + \bar{1}.8418 + (1.7782)$$

$$= -0.613$$

$$= \bar{1}.9387$$

$$\beta_1 = 60^\circ 16' \text{ ó } \beta_2 = 119^\circ 44'$$

o sea $\beta_1 = 60^\circ 16'$ y $\beta_2 = 119^\circ 44'$

Así que: $\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) = 180^\circ - (44^\circ + 60^\circ 16')$

$$\gamma_1 = 75^\circ 44'$$

También $\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2) = 180° - (44° + 119°\ 44')$

$$\gamma_2 = 16°\ 16'$$

Ahora encontraremos c_1 y c_2 usando el Teorema de los Senos.

$$c_1 = \frac{a \operatorname{sen} \gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Tomando logaritmos

$$\log c_1 = \log a + \log \operatorname{sen} \gamma_1 - \log \operatorname{sen} \alpha$$

$$= \log 60 + \log \operatorname{sen} 75°\ 44' - \log \operatorname{sen} 44°$$

$$= 1.7782 + \bar{1}.9864 - \bar{1}.8418$$

$$= 1.9228$$

$$c_1 = 83.71$$

Asimismo $c_2 = \dfrac{a \operatorname{sen} \gamma_2}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$\log c_2 = \log a + \log \operatorname{sen} \gamma_2 - \log \operatorname{sen} \alpha$$

$$= \log 60 + \log \operatorname{sen} 16°\ 16' - \log \operatorname{sen} 44°$$

$$= 1.7782 + \bar{1}.4473 - \bar{1}.8418$$

$$= 1.3837$$

$$c_2 = 24.19$$

Este caso recibe el nombre de "ambiguo", en virtud de que puede haber 2 soluciones, una o ninguna.

Veamos las posibilidades que se presentan cuando se conocen **a**, **b**, y α , siendo $\alpha < 90°$. Para ello, nos auxiliamos de las 3 figuras 4a, 4b y 4c, mostradas en la siguiente página

Estas figuras se han trazado en la forma que se indica:

1) Se traza una línea horizontal, en donde quedará el lado **c**.

2) A partir de la línea horizontal, se mide el ángulo α y sobre el lado terminal del ángulo α se mide el lado **b**.

3) Haciendo centro en **c**, y con radio igual a la longitud del lado **a**, el radio **a** cortará o no cortará la línea horizontal para definir el triángulo, de acuerdo con los valores numéricos de **a**, **b**, α.

En este análisis se presentan los casos siguientes:

I) $a < b,\ \operatorname{sen} \alpha$ no hay solución. (Figura 4a).
II) $a = b\ \operatorname{sen} \alpha$ se forma un triángulo rectángulo. (Figura 4b).
III) $b \operatorname{sen}\alpha < a < b$ hay dos soluciones. (Figura 4c).
IV) $a \geq b$ hay una solución. (Figura 5).

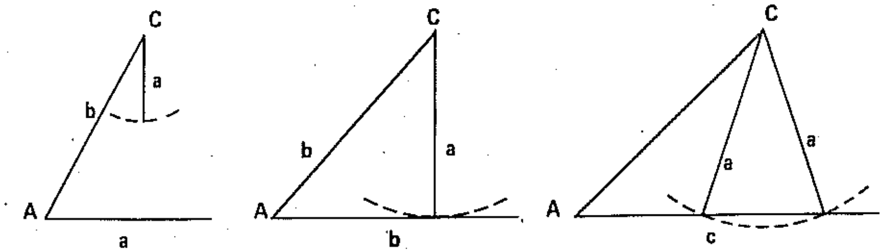


Figura 4

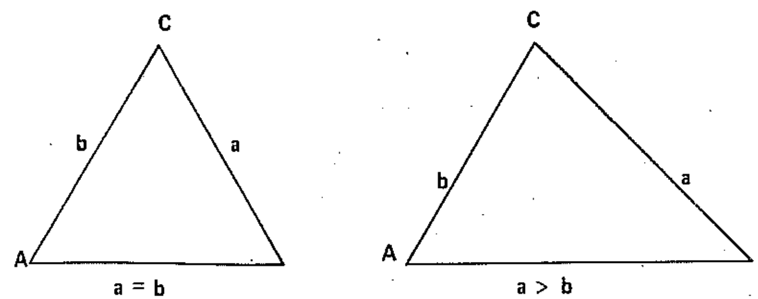


Figura 5

Por otra parte, cuando se conocen **a**, **b**, y α siendo $\alpha > 90^\circ$, se presentan 2 casos:

Si **a** < **b** no hay solución. (Figura 6).

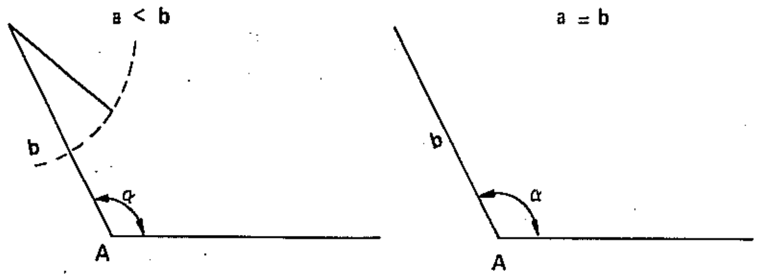


Figura 6

Si **b** < **a** hay una solución (Figura 7).

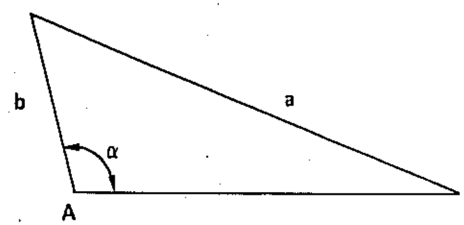


Figura 7

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. En los problemas de la a) a la j) resuelva los triángulos **ABC** dados:

a)	$\alpha = 58^\circ\ 30'$;	$\beta = 80^\circ$;	$a = 140$
b)	$\beta = 82^\circ$;	$\gamma = 56^\circ\ 40'$;	$c = 45$
c)	$\alpha = 46^\circ$;	$\gamma = 120^\circ\ 10'$;	$b = 87.17$

d)	$\beta = 15^\circ$;	$\gamma = 52^\circ\ 50'$;	$b = 8.5$
e)	$a = 6$;	$b = 9$;	$\gamma = 45^\circ$
f)	$b = 25$;	$c = 18$;	$\alpha = 60^\circ$
g)	$\beta = 38^\circ$;	$b = 16$;	$a = 22$
h)	$a = 63$;	$b = 90$;	$\alpha = 32^\circ$
i)	$a = 3$	$b = 4$;	$c = 6.1$
j)	$a = 7$;	$b = 5$;	$c = 7.45$

2. Determinar las longitudes de los lados de un paralelogramo si la diagonal mayor mide 74 metros y forma con los lados, ángulos de 16° y 28° respectivamente.

3. Se va a construir un túnel a través de una montaña desde **A** hasta **B**. Un punto **C** que es visible desde **A** y **B** se encuentra a 390 metros de **A** y 560 metros de **B**. ¿Cuál es la longitud del túnel si el ángulo **ACB** es de 35°?

4. Un poste que se aparta 10° de la vertical hacia la región donde está el sol, proyecta una sombra de 30 metros de longitud, cuando el ángulo de elevación del sol es de 40°. Encuentre la longitud del poste.

Bibliografía para consulta

Trigonometría.
Fred W. Sparks.
Paul K. Rees.
Editorial Reverté Mexicana, S. A.
1976

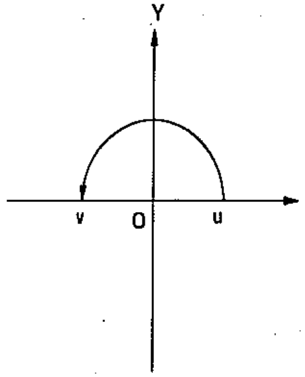
Trigonometría Plana y Esférica
Frank Ayres Jr.
Serie Shaum. Mc. Graw – Hill.
1976

Paneles de verificación

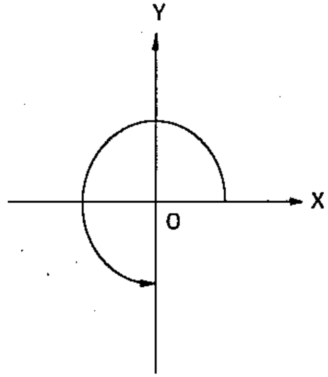
MODULO 13 – VALIDACION

1. **0.9976**
2. **0.9948**
3. **3.6059**
4. **0.7002**
5. **−0.7566**
6. **0.8434**
7. **−6.4348**
8. **−7.428**
9. **0.2851**
10. **1.2654**
11. **1.3323**
12. **0.1949**
13. **1.4283 ó 1.7133**
14. **0.2793 ó 6.0039**
15. **1.0123 ó 4.1539**

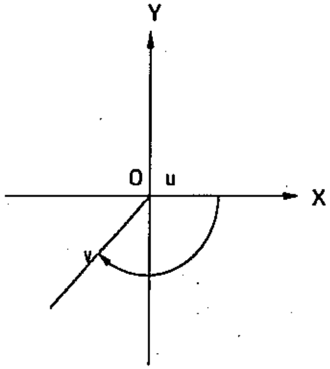
16.



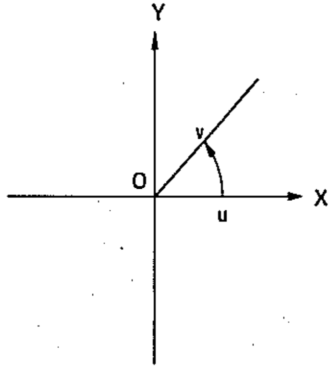
17.



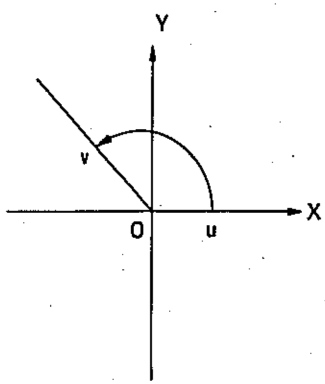
18.



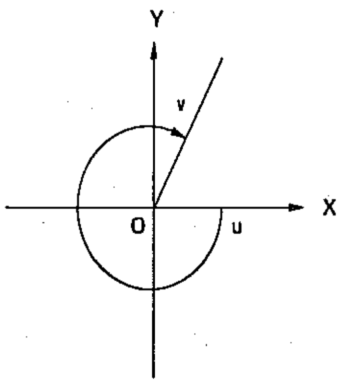
19.



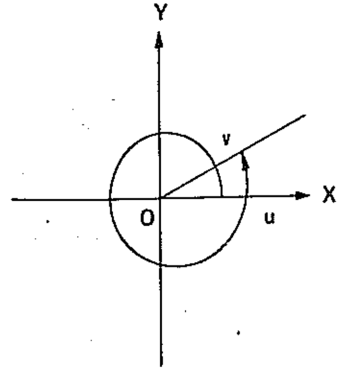
20.



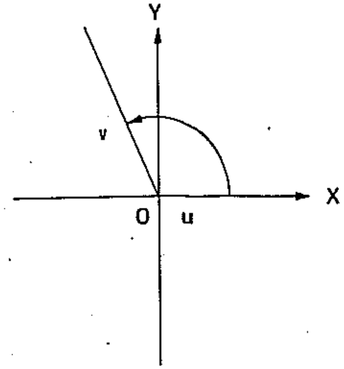
21.



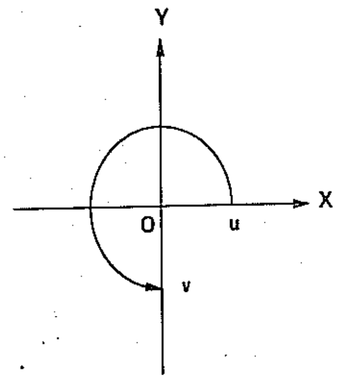
22.



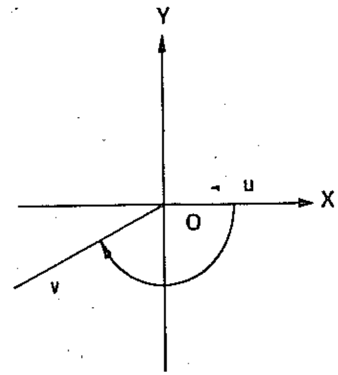
23.



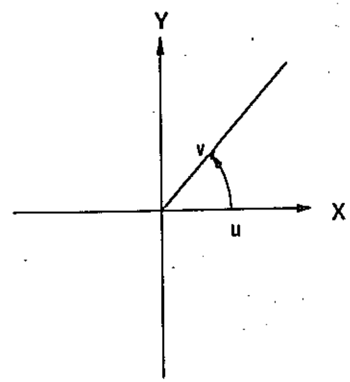
24.



25.



26.



27. π; $\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{3}{4}\pi$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5}{3}\pi$

28. $\frac{1}{8}$ rev; $\frac{3}{8}$ rev; $-\frac{5}{6}$ rev; $\frac{13}{12}$ rev; $\frac{1}{3}$ rev; $\frac{3}{4}$ rev; $-\frac{5}{12}$ rev.

29. 180°; 270°; −135°; 120°; 270°; −150°; 45°

30. 0.8378
31. 1.3090
32. 0.2734
33. 2.8827
34. 4.2790
35. 10°50′
36. 14°30′
37. 143°20′
38. 286°30′
39. 61°5′
40. 175°23′
41. 206°42′
42. 103°47′
43. 2.1817 cms
44. 4 cms.

45. 8π cms = 25.1327 cms

46. a) $\frac{8}{3}\pi \frac{rad}{seg}$ b) $160\pi \frac{cms}{seg}$ c) 320π cms

47. 0.2807 radianes

MODULO 14 – VALIDACION

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. 1
4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
5. 60° ó 120°
6. 150° ó 210°
7. 135° ó 315°
8. 45° ó 315°
9. 60° ó 300°
10. 45° ó 135°
11. 240° ó 300°
12. − cos 40°
13. − sen 10°
14. − ctg 35°
15. − cos 32°
16. − ctg 30°
17. 0.8127
18. 0.8460
19. 5.5304
20. 0.8118
21. 0.4384
22. 0.9994

23. 0.3939
24. 32.7303
25. 71°13′
26. 81°56′
27. 70°12′
28. 76°58′
29. 0.543
30. 0.234
31. 1.3701
32. 0.1524

33. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$
34. $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{3}$
35. 0, 1, 0
36. $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$
37. $\frac{8}{\sqrt{73}}$, $\frac{3}{\sqrt{73}}$, $\frac{8}{3}$
38. 1, 0, no existe

MODULO 15 – VALIDACION

1. c = 61.487; α = 52°15′; β = 37°45′
2. α = 48°18′; b = 56.350; a = 63.27
3. b = 338.55; β = 54°40′; c = 415
4. b = 2.319; a = 4.91; α = 64°45′
5. α = 42°30′; β = 47°30′; a = 3274
6. b = 105; c = 109; β = 73°
7. α = 33°30′; β = 56°30′; c = 68.7
8. 14.1 metros
9. longitud de la diagonal = 271 ángulo 6°20′

10. 45°; 55°; 60°45′; 99, 112.06; 193.27

11. 14.43 metros

MODULO 16 – VALIDACION

1.

a) $b = 161.7$; $c = 108.8$; $\gamma = 58°4'$

b) $b = 53.33$; $a = 35.57$; $\alpha = 41°30'$

c) $b = 315.2$; $a = 262.3$; $\beta = 13°50'$

d) $\alpha = 112°10'$; $a = 30.41$; $c = 26.17$

e) $c = 6.374$; $\alpha = 41°43'$ $\beta = 93°17'$

f) $a = 22.34$; $\beta = 75°44'$ $\gamma = 44°15'$

g) $\alpha_1 = 57°50'$; $\gamma_1 = 84°10'$; $c_1 = 25.85$

$\alpha_2 = 122°10'$; $\gamma_2 = 19°50'$; $c_2 = 8.81$

h) $\beta_1 = 49°12'$; $\gamma_1 = 98°48'$; $c_1 = 117.5$

$\beta_2 = 130°48'$; $\gamma_2 = 17°12'$; $c_2 = 35.16$

i) $\alpha = 25°$; $\beta = 34°18'$; $\gamma = 120°18'$

j) $\alpha = 65°$; $\beta = 40°14'$; $\gamma = 74°46'$

2. 29.36; 50.00

3. 328.4 metros

4. 30 metros.

Apéndice

Tabla I. Logaritmos de los números

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla I. Logaritmos de los números

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla II. Antilogaritmos de los números

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1431	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1478	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2789	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla II. Antilogaritmos de los números

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	2	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	4724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	3169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	6272	5284	5297	5309	4321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9683	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla III, Valores de Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	Sen	Tg	Ctg	Cos		
0° 00′	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00′
10′	.0029	.0029	.0029	343.77	1.0000	1.5679	50′
20′	.0058	.0058	.0058	171.89	1.0000	1.5650	40′
30′	.0087	.0087	.0087	114.59	1.0000	1.5621	30′
40′	.0116	.0116	.0116	85.940	.9999	1.5592	20′
50′	.0145	.0145	.0145	68.750	.9999	1.5563	10′
1° 00′	.0175	.0175	.0175	57.290	.9998	1.5533	89° 00′
10′	.0204	.0204	.0204	49.104	.9998	1.5504	50′
20′	.0233	.0233	.0233	42.964	.9997	1.5475	40′
30′	.0262	.0262	.0262	38.188	.9997	1.5446	30′
40′	.0291	.0291	.0291	34.368	.9996	1.5417	20′
50′	.0320	.0320	.0320	31.242	.9995	1.5388	10′
2° 00′	.0349	.0349	.0349	28.636	.9994	1.5359	88° 00′
10′	.0378	.0378	.0378	26.432	.9993	1.5330	50′
20′	.0407	.0407	.0407	24.542	.9992	1.5301	40′
30′	.0436	.0436	.0437	22.904	.9990	1.5272	30′
40′	.0465	.0465	.0466	21.470	.9989	1.5243	20′
50′	.0495	.0494	.0495	20.206	.9988	1.5213	10′
3° 00′	.0524	.0523	.0524	19.081	.9986	1.5184	87° 00′
10′	.0553	.0552	.0553	18.075	.9985	1.5155	50′
20′	.0582	.0581	.0582	17.169	.9983	1.5126	40′
30′	.0611	.0610	.0612	16.350	.9981	1.5097	30′
40′	.0640	.0640	.0641	15.605	.9980	1.5068	20′
50′	.0669	.0669	.0670	14.924	.9978	1.5039	10′
4° 00′	.0698	.0698	.0699	14.301	.9976	1.5010	86° 00′
10′	.0727	.0727	.0729	13.727	.9974	1.4981	50′
20′	.0756	.0756	.0758	13.197	.9971	1.4952	40′
30′	.0785	.0785	.0787	12.706	.9969	1.4923	30′
40′	.0814	.0814	.0816	12.251	.9967	1.4893	20′
50′	.0844	.0843	.0846	11.826	.9964	1.4864	10′
5° 00′	.0873	.0872	.0875	11.430	.9962	1.4835	85° 00′
10′	.0902	.0901	.0904	11.059	.9959	1.4806	50′
20′	.0931	.0929	.0934	10.712	.9957	1.4777	40′
30′	.0960	.0958	.0963	10.385	.9954	1.4748	30′
40′	.0989	.0987	.0992	10.078	.9951	1.4719	20′
50′	.1018	.1016	.1022	9.7882	.9948	1.4690	10′
6° 00′	.1047	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.4661	84° 00′
10′	.1076	.1074	.1080	9.2553	.9942	1.4632	50′
20′	.1105	.1103	.1110	9.0098	.9939	1.4603	40′
30′	.1134	.1132	.1139	8.7769	.9936	1.4573	30′
40′	.1164	.1161	.1169	8.5555	.9932	1.4544	20′
50′	.1193	.1190	.1198	8.3450	.9929	1.4515	10′
7° 00′	.1222	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.4486	83° 00′
10′	.1251	.1248	.1257	7.9530	.9922	1.4457	50′
20′	.1280	.1276	.1287	7.7704	.9918	1.4428	40′
30′	.1309	.1305	.1317	7.5958	.9914	1.4399	30′
40′	.1338	.1334	.1346	7.4287	.9911	1.4370	20′
50′	.1367	.1363	.1376	7.2687	.9907	1.4341	10′
8° 00′	.1396	.1392	.1405	7.1154	.9903	1.4312	82° 00′
10′	.1425	.1421	.1435	6.9682	.9899	1.4283	50′
20′	.1454	.1449	.1465	6.8269	.9894	1.4254	40′
30′	.1484	.1478	.1495	6.6912	.9890	1.4224	30′
40′	.1513	.1507	.1524	6.5606	.9886	1.4195	20′
50′	.1542	.1536	.1554	6.4348	.9881	1.4166	10′
9° 00′	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81° 00′
		Cos	Ctg	Tg	Sen	Radianes	Grados

Tabla III. Valores de Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	Sen	Tg	Ctg	Cos		
9° 00′	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81° 00′
10′	.1600	.1593	.1614	6.1970	.9872	1.4108	50′
20′	.1629	.1622	.1644	6.0844	.9868	1.4079	40′
30′	.1658	.1650	.1673	5.9758	.9863	1.4050	30′
40′	.1687	.1679	.1703	5.8708	.9858	1.4021	20′
50′	.1716	.1708	.1733	5.7694	.9853	1.3992	10′
10° 00′	.1745	.1736	.1763	5.6713	.9848	1.3963	80° 00′
10′	.1774	.1765	.1793	5.5764	.9843	1.3934	50′
20′	.1804	.1794	.1823	5.4845	.9838	1.3904	40′
30′	.1833	.1822	.1853	5.3955	.9833	1.3875	30′
40′	.1862	.1851	.1883	5.3093	.9827	1.3846	20′
50′	.1891	.1880	.1914	5.2257	.9822	1.3817	10′
11° 00′	.1920	.1908	.1944	5.1446	.9816	1.3788	79° 00′
10′	.1949	.1937	.1974	5.0658	.9811	1.3759	50′
20′	.1978	.1965	.2004	4.9894	.9805	1.3730	40′
30′	.2007	.1994	.2035	4.9152	.9799	1.3701	30′
40′	.2036	.2022	.2065	4.8430	.9793	1.3672	20′
50′	.2065	.2051	.2095	4.7729	.9787	1.3643	10′
12° 00′	.2094	.2079	.2126	4.7046	.9781	1.3614	78° 00′
10′	.2123	.2108	.2156	4.6382	.9775	1.3584	50′
20′	.2153	.2136	.2186	4.5736	.9769	1.3555	40′
30′	.2182	.2164	.2217	4.5107	.9763	1.3526	30′
40′	.2211	.2193	.2247	4.4494	.9757	1.3497	20′
50′	.2240	.2221	.2278	4.3897	.9750	1.3468	10′
13° 00′	.2269	.2250	.2309	4.3315	.9744	1.3439	77° 00′
10′	.2298	.2278	.2339	4.2747	.9737	1.3410	50′
20′	.2327	.2306	.2370	4.2193	.9730	1.3381	40′
30′	.2356	.2334	.2401	4.1653	.9724	1.3352	30′
40′	.2385	.2363	.2432	4.1126	.9717	1.3323	20′
50′	.2414	.2391	.2462	4.0611	.9710	1.3294	10′
14° 00′	.2443	.2419	.2493	4.0108	.9703	1.3265	76° 00′
10′	.2473	.2447	.2524	3.9617	.9696	1.3235	50′
20′	.2502	.2476	.2555	3.9136	.9689	1.3206	40′
30′	.2531	.2504	.2586	3.8667	.9681	1.3177	30′
40′	.2560	.2532	.2617	3.8208	.9674	1.3148	20′
50′	.2589	.2560	.2648	3.7760	.9667	1.3119	10′
15° 00′	.2618	.2588	.2679	3.7321	.9659	1.3090	75° 00′
10′	.2647	.2616	.2711	3.6891	.9652	1.3061	50′
20′	.2676	.2644	.2742	3.6470	.9644	1.3032	40′
30′	.2705	.2672	.2773	3.6059	.9636	1.3003	30′
40′	.2734	.2700	.2805	3.5656	.9628	1.2974	20′
50′	.2763	.2728	.2836	3.5261	.9621	1.2945	10′
16° 00′	.2793	.2756	.2867	3.4874	.9613	1.2915	74° 00′
10′	.2822	.2784	.2899	3.4495	.9605	1.2886	50′
20′	.2851	.2812	.2931	3.4124	.9596	1.2857	40′
30′	.2880	.2840	.2962	3.3759	.9588	1.2828	30′
40′	.2909	.2868	.2994	3.3402	.9580	1.2799	20′
50′	.2938	.2896	.3026	3.3052	.9572	1.2770	10′
17° 00′	.2967	.2924	.3057	3.2709	.9563	1.2741	73° 00′
10′	.2996	.2952	.3089	3.2371	.9555	1.2712	50′
20′	.3025	.2979	.3121	3.2041	.9546	1.2683	40′
30′	.3054	.3007	.3153	3.1716	.9537	1.2654	30′
40′	.3083	.3035	.3185	3.1397	.9528	1.2625	20′
50′	.3113	.3062	.3217	3.1084	.9520	1.2595	10′
18° 00′	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72° 00′
		Cos	Ctg	Tg	Sen	Radianes	Grados

Tabla III. Valores de Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	Sen	Tg	Ctg	Cos		
18° 00′	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72° 00′
10′	.3171	.3118	.3281	3.0475	.9502	1.2537	50′
20′	.3200	.3145	.3314	3.0178	.9492	1.2508	40′
30′	.3229	.3173	.3346	2.9887	.9483	1.2479	30′
40′	.3258	.3201	.3378	2.9600	.9474	1.2450	20′
50′	.3287	.3228	.3411	2.9319	.9465	1.2421	10′
19° 00′	.3316	.3256	.3443	2.9042	.9455	1.2392	71° 00′
10′	.3345	.3283	.3476	2.8770	.9446	1.2363	50′
20′	.3374	.3311	.3508	2.8502	.9436	1.2334	40′
30′	.3403	.3338	.3541	2.8239	.9426	1.2305	30′
40′	.3432	.3365	.3574	2.7980	.9417	1.2275	20′
50′	.3462	.3393	.3607	2.7725	.9407	1.2246	10′
20° 00′	.3491	.3420	.3640	2.7475	.9397	1.2217	70° 00′
10′	.3520	.3448	.3673	2.7228	.9387	1.2188	50′
20′	.3549	.3475	.3706	2.6985	.9377	1.2159	40′
30′	.3578	.3502	.3739	2.6746	.9367	1.2130	30′
40′	.3607	.3529	.3772	2.6511	.9356	1.2101	20′
50′	.3636	.3557	.3805	2.6279	.9346	1.2072	10′
21° 00′	.3665	.3584	.3839	2.6051	.9336	1.2043	69° 00′
10′	.3694	.3611	.3872	2.5826	.9325	1.2014	50′
20′	.3723	.3638	.3906	2.5605	.9315	1.1985	40′
30′	.3752	.3665	.3939	2.5386	.9304	1.1956	30′
40′	.3782	.3692	.3973	2.5172	.9293	1.1926	20′
50′	.3811	.3719	.4006	2.4960	.9283	1.1897	10′
22° 00′	.3840	.3746	.4040	2.4751	.9272	1.1868	68° 00′
10′	.3869	.3773	.4074	2.4545	.9261	1.1839	50′
20′	.3898	.3800	.4108	2.4342	.9250	1.1810	40′
30′	.3927	.3827	.4142	2.4142	.9239	1.1781	30′
40′	.3956	.3854	.4176	2.3945	.9228	1.1752	20′
50′	.3985	.3881	.4210	2.3750	.9216	1.1723	10′
23° 00′	.4014	.3907	.4245	2.3559	.9205	1.1694	67° 00′
10′	.4043	.3934	.4279	2.3369	.9194	1.1665	50′
20′	.4072	.3961	.4314	2.3183	.9182	1.1636	40′
30′	.4102	.3987	.4348	2.2998	.9171	1.1606	30′
40′	.4131	.4014	.4383	2.2817	.9159	1.1577	20′
50′	.4160	.4041	.4417	2.2637	.9147	1.1548	10′
24° 00′	.4189	.4067	.4452	2.2460	.9135	1.1519	66° 00′
10′	.4218	.4094	.4487	2.2286	.9124	1.1490	50′
20′	.4247	.4120	.4522	2.2113	.9112	1.1461	40′
30′	.4276	.4147	.4557	2.1943	.9100	1.1432	30′
40′	.4305	.4173	.4592	2.1775	.9088	1.1403	20′
50′	.4334	.4200	.4628	2.1609	.9075	1.1374	10′
25° 00′	.4363	.4226	.4663	2.1445	.9063	1.1345	65° 00′
10′	.4392	.4253	.4699	2.1283	.9051	1.1316	50′
20′	.4422	.4279	.4734	2.1123	.9038	1.1286	40′
30′	.4451	.4305	.4770	2.0965	.9026	1.1257	30′
40′	.4480	.4331	.4806	2.0809	.9013	1.1228	20′
50′	.4509	.4358	.4841	2.0655	.9001	1.1199	10′
26° 00′	.4538	.4384	.4877	2.0503	.8988	1.1170	64° 00′
10′	.4567	.4410	.4913	2.0353	.8975	1.1141	50′
20′	.4596	.4436	.4950	2.0204	.8962	1.1112	40′
30′	.4625	.4462	.4986	2.0057	.8949	1.1083	30′
40′	.4654	.4488	.5022	1.9912	.8936	1.1054	20′
50′	.4683	.4514	.5059	1.9768	.8923	1.1025	10′
27° 00′	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63° 00′
		Cos	Ctg	Tg	Sen	Radianes	Grados

Tabla III. Valores de Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	Sen	Tg	Ctg	Cos		
27° 00′	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63° 00′
10′	.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	1.0966	50′
20′	.4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	1.0937	40′
30′	.4800	.4617	.5206	1.9210	.8870	1.0908	30′
40′	.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	1.0879	20′
50′	.4858	.4669	.5280	1.8940	.8843	1.0850	10′
28° 00′	.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.0821	62° 00′
10′	.4916	.4720	.5354	1.8676	.8816	1.0792	50′
20′	.4945	.4746	.5392	1.8546	.8802	1.0763	40′
30′	.4974	.4772	.5430	1.8418	.8788	1.0734	30′
40′	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	1.0705	20′
50′	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	1.0676	10′
29° 00′	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.0647	61° 00′
10′	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617	50′
20′	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	1.0588	40′
30′	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	1.0559	30′
40′	.5178	.4950	.5696	1.7556	.8689	1.0530	20′
50′	.5207	.4975	.5735	1.7437	.8675	1.0501	10′
30° 00′	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472	60° 00′
10′	.5265	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443	50′
20′	.5294	.5050	.5851	1.7090	.8631	1.0414	40′
30′	.5323	.5075	.5890	1.6977	.8616	1.0385	30′
40′	.5352	.5100	.5930	1.6864	.8601	1.0356	20′
50′	.5381	.5125	.5969	1.6753	.8587	1.0327	10′
31° 00′	.5411	.5150	.6009	1.6643	.8572	1.0297	59° 00′
10′	.5440	.5175	.6048	1.6534	.8557	1.0268	50′
20′	.5469	.5200	.6088	1.6426	.8542	1.0239	40′
30′	.5498	.5225	.6128	1.6319	.8526	1.0210	30′
40′	.5527	.5250	.6168	1.6212	.8511	1.0181	20′
50′	.5556	.5275	.6208	1.6107	.8496	1.0152	10′
32° 00′	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00′
10′	.5614	.5324	.6289	1.5900	.8465	1.0094	50′
20′	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0065	40′
30′	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0036	30′
40′	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20′
50′	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10′
33° 00′	.5760	.5446	.6494	1.5399	.8387	.9948	57° 00′
10′	.5789	.5471	.6536	1.5301	.8371	.9919	50′
20′	.5818	.5495	.6577	1.5204	.8355	.9890	40′
30′	.5847	.5519	.6619	1.5108	.8339	.9861	30′
40′	.5876	.5544	.6661	1.5013	.8323	.9832	20′
50′	.5905	.5568	.6703	1.4919	.8307	.9803	10′
34° 00′	.5934	.5592	.6745	1.4826	.8290	.9774	56° 00′
10′	.5963	.5616	.6787	1.4733	.8274	.9745	50′
20′	.5992	.5640	.6830	1.4641	.8258	.9716	40′
30′	.6021	.5664	.6873	1.4550	.8241	.9687	30′
40′	.6050	.5688	.6916	1.4460	.8225	.9657	20′
50′	.6080	.5712	.6959	1.4370	.8208	.9628	10′
35° 00′	.6109	.5736	.7002	1.4281	.8192	.9599	55° 00′
10′	.6138	.5760	.7046	1.4193	.8175	.9570	50′
20′	.6167	.5783	.7089	1.4106	.8158	.9541	40′
30′	.6196	.5807	.7133	1.4019	.8141	.9512	30′
40′	.6225	.5831	.7177	1.3934	.8124	.9483	20′
50′	.6254	.5854	.7221	1.3848	.8107	.9454	10′
36° 00′	.6283	.5878	.7265	1.3764	.8090	.9425	54° 00′
		Cos	Ctg	Tg	Sen	Radianes	Grados

Tabla III. Valores de Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	Sen	Tg	Ctg	Cos		
36° 00′	.6283	.5378	.7265	1.3764	.8090	.9425	54° 00′
10′	.6312	.5901	.7310	1.3680	.8073	.9396	50′
20′	.6341	.5925	.7355	1.3597	.8056	.9367	40′
30′	.6370	.5948	.7400	1.3514	.8039	.9338	30′
40′	.6400	.5972	.7445	1.3432	.8021	.9308	20′
50′	.6429	.5995	.7490	1.3351	.8004	.9279	10′
37° 00′	.6458	.6018	.7536	1.3270	.7986	.9250	53° 00′
10′	.6487	.6041	.7581	1.3190	.7969	.9221	50′
20′	.6516	.6065	.7627	1.3111	.7951	.9192	40′
30′	.6545	.6088	.7673	1.3032	.7934	.9163	30′
40′	.6574	.6111	.7720	1.2954	.7916	.9134	20′
50′	.6603	.6134	.7766	1.2876	.7898	.9105	10′
38° 00′	.6632	.6157	.7813	1.2799	.7880	.9076	52° 00′
10′	.6661	.6180	.7860	1.2723	.7862	.9047	50′
20′	.6690	.6202	.7907	1.2647	.7844	.9018	40′
30′	.6720	.6225	.7954	1.2572	.7826	.8988	30′
40′	.6749	.6248	.8002	1.2497	.7808	.8959	20′
50′	.6778	.6271	.8050	1.2423	.7790	.8930	10′
39° 00′	.6807	.6293	.8098	1.2349	.7771	.8901	51° 00′
10′	.6836	.6316	.8146	1.2276	.7753	.8872	50′
20′	.6865	.6338	.8195	1.2203	.7735	.8843	40′
30′	.6894	.6361	.8243	1.2131	.7716	.8814	30′
40′	.6923	.6383	.8292	1.2059	.7698	.8785	20′
50′	.6952	.6406	.8342	1.1988	.7679	.8756	10′
40° 00′	.6981	.6428	.8391	1.1918	.7660	.8727	50° 00′
10′	.7010	.6450	.8441	1.1847	.7642	.8698	50′
20′	.7039	.6472	.8491	1.1778	.7623	.8668	40′
30′	.7069	.6494	.8541	1.1708	.7604	.8639	30′
40′	.7098	.6517	.8591	1.1640	.7585	.8610	20′
50′	.7127	.6539	.8642	1.1571	.7566	.8581	10′
41° 00′	.7156	.6561	.8693	1.1504	.7547	.8552	49° 00′
10′	.7185	.6583	.8744	1.1436	.7528	.8523	50′
20′	.7214	.6604	.8796	1.1369	.7509	.8494	40′
30′	.7243	.6626	.8847	1.1303	.7490	.8465	30′
40′	.7272	.6648	.8899	1.1237	.7470	.8436	20′
50′	.7301	.6670	.8952	1.1171	.7451	.8407	10′
42° 00′	.7330	.6691	.9004	1.1106	.7431	.8378	48° 00′
10′	.7359	.6713	.9057	1.1041	.7412	.8348	50′
20′	.7389	.6734	.9110	1.0977	.7392	.8319	40′
30′	.7418	.6756	.9163	1.0913	.7373	.8290	30′
40′	.7447	.6777	.9217	1.0850	.7353	.8261	20′
50′	.7476	.6799	.9271	1.0786	.7333	.8232	10′
43° 00′	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47° 00′
10′	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174	50′
20′	.7563	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145	40′
30′	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116	30′
40′	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087	20′
50′	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058	10′
44° 00′	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46° 00′
10′	.7709	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999	50′
20′	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970	40′
30′	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941	30′
40′	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912	20′
50′	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883	10′
45° 00′	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00′
		Cos	Ctg	Tg	Sen	Radianes	Grados

Tabla IV. Logaritmos de Funciones Trigonométricas

Grados	Log Sen	Log Tg	Log Ctg	Log Cos	
0° 00′					90° 00′
10′	.4637 − 3	.4637 − 3	2.5363	.0000	50′
20′	.7648 − 3	.7648 − 3	2.2352	.0000	40′
30′	9408 − 3	.9409 − 3	2.0591	.0000	30′
40′	.0658 − 2	.0658 − 2	1.9342	.0000	20′
50′	.1627 − 2	.1627 − 2	1.8373	.0000	10′
1° 00′	.2419 − 2	.2419 − 2	1.7581	.9999 − 1	89° 00′
10′	.3088 − 2	.3089 − 2	1.6911	.9999 − 1	50′
20′	.3668 − 2	.3669 − 2	1.6331	.9999 − 1	40′
30′	.4179 − 2	.4181 − 2	1.5819	.9999 − 1	30′
40′	.4637 − 2	.4638 − 2	1.5362	.9998 − 1	20′
50′	.5050 − 2	.5053 − 2	1.4947	.9998 − 1	10′
2° 00′	.5428 − 2	.5431 − 2	1.4569	.9997 − 1	88° 00′
10′	.5776 − 2	.5779 − 2	1.4221	.9997 − 1	50′
20′	.6097 − 2	.6101 − 2	1.3899	.9996 − 1	40′
30′	.6397 − 2	.6401 − 2	1.3599	.9996 − 1	30′
40′	.6677 − 2	.6682 − 2	1.3318	.9995 − 1	20′
50′	.6940 − 2	.6945 − 2	1.3055	.9995 − 1	10′
3° 00′	.7188 − 2	.7194 − 2	1.2806	.9994 − 1	87° 00′
10′	.7423 − 2	.7429 − 2	1.2571	.9993 − 1	50′
20′	.7645 − 2	.7652 − 2	1.2348	.9993 − 1	40′
30′	.7857 − 2	.7865 − 2	1.2135	.9992 − 1	30′
40′	.8059 − 2	.8067 − 2	1.1933	.9991 − 1	20′
50′	.8251 − 2	.8261 − 2	1.1739	.9990 − 1	10′
4° 00′	.8436 − 2	.8446 − 2	1.1554	.9989 − 1	86° 00′
10′	.8613 − 2	.8624 − 2	1.1376	.9989 − 1	50′
20′	.8783 − 2	.8795 − 2	1.1205	.9988 − 1	40′
30′	.8946 − 2	.8960 − 2	1.1040	.9987 − 1	30′
40′	.9104 − 2	.9118 − 2	1.0882	.9986 − 1	20′
50′	.9256 − 2	.9272 − 2	1.0728	.9985 − 1	10′
5° 00′	.9403 − 2	.9420 − 2	1.0580	.9983 − 1	85° 00′
10′	.9545 − 2	.9563 − 2	1.0437	.9982 − 1	50′
20′	.9682 − 2	.9701 − 2	1.0299	.9981 − 1	40′
30′	.9816 − 2	.9836 − 2	1.0164	.9980 − 1	30′
40′	.9945 − 2	.9966 − 2	1.0034	.9979 − 1	20′
50′	.0070 − 1	.0093 − 1	.9907	.9977 − 1	10′
6° 00′	.0192 − 1	.0216 − 1	.9784	.9976 − 1	84° 00′
10′	.0311 − 1	.0336 − 1	.9664	.9975 − 1	50′
20′	.0426 − 1	.0453 − 1	.9547	.9973 − 1	40′
30′	.0539 − 1	.0567 − 1	.9433	.9972 − 1	30′
40′	.0648 − 1	.0678 − 1	.9322	.9971 − 1	20′
50′	.0755 − 1	.0786 − 1	.9214	.9969 − 1	10′
7° 00′	.0859 − 1	.0891 − 1	.9109	.9968 − 1	83° 00′
10′	.0961 − 1	.0995 − 1	.9005	.9966 − 1	50′
20′	.1060 − 1	.1096 − 1	.8904	.9964 − 1	40′
30′	.1157 − 1	.1194 − 1	.8806	.9963 − 1	30′
40′	.1252 − 1	.1291 − 1	.8709	.9961 − 1	20′
50′	.1345 − 1	.1385 − 1	.8615	.9959 − 1	10′
8° 00′	.1436 − 1	.1478 − 1	.8522	.9958 − 1	82° 00′
10′	.1525 − 1	.1569 − 1	.8431	.9956 − 1	50′
20′	.1612 − 1	.1658 − 1	.8342	.9954 − 1	40′
30′	.1697 − 1	.1745 − 1	.8255	.9952 − 1	30′
40′	.1781 − 1	.1831 − 1	.8169	.9950 − 1	20′
50′	.1863 − 1	.1915 − 1	.8085	.9948 − 1	10′
9° 00′	.1943 − 1	.1997 − 1	.8003	.9946 − 1	81° 00′
	Log Cos	Log Ctg	Log Tg	Log Sen	Grados

Tabla IV. Logaritmos de Funciones Trigonométricas

Grados	Log Sen	Log Tg	Log Ctg	Log Cos	
9° 00′	.1943 − 1	.1997 − 1	.8003	.9946 − 1	81° 00′
10′	.2022 − 1	.2078 − 1	.7922	.9944 − 1	50′
20′	.2100 − 1	.2158 − 1	.7842	.9942 − 1	40′
30′	.2176 − 1	.2236 − 1	.7764	.9940 − 1	30′
40′	.2251 − 1	.2313 − 1	.7687	.9938 − 1	20′
50′	.2324 − 1	.2389 − 1	.7611	.9936 − 1	10′
10° 00′	.2397 − 1	.2463 − 1	.7537	.9934 − 1	80° 00′
10′	.2468 − 1	.2536 − 1	.7464	.9931 − 1	50′
20′	.2538 − 1	.2609 − 1	.7391	.9929 − 1	40′
30′	.2606 − 1	.2680 − 1	.7320	.9927 − 1	30′
40′	.2674 − 1	.2750 − 1	.7250	.9924 − 1	20′
50′	.2740 − 1	.2819 − 1	.7181	.9922 − 1	10′
11° 00′	.2806 − 1	.2887 − 1	.7113	.9919 − 1	79° 00′
10′	.2870 − 1	.2953 − 1	.7047	.9917 − 1	50′
20′	.2934 − 1	.3020 − 1	.6980	.9914 − 1	40′
30′	.2997 − 1	.3085 − 1	.6915	.9912 − 1	30′
40′	.3058 − 1	.3149 − 1	.6851	.9909 − 1	20′
50′	.3119 − 1	.3212 − 1	.6788	.9907 − 1	10′
12° 00′	.3179 − 1	.3275 − 1	.6725	.9904 − 1	78° 00′
10′	.3238 − 1	.3336 − 1	.6664	.9901 − 1	50′
20′	.3296 − 1	.3397 − 1	.6603	.9899 − 1	40′
30′	.3353 − 1	.3458 − 1	.6542	.9896 − 1	30′
40′	.3410 − 1	.3517 − 1	.6483	.9893 − 1	20′
50′	.3466 − 1	.3576 − 1	.6424	.9890 − 1	10′
13° 00′	.3521 − 1	.3634 − 1	.6366	.9887 − 1	77° 00′
10′	.3575 − 1	.3691 − 1	.6309	.9884 − 1	50′
20′	.3629 − 1	.3748 − 1	.6252	.9881 − 1	40′
30′	.3682 − 1	.3804 − 1	.6196	.9878 − 1	30′
40′	.3734 − 1	.3859 − 1	.6141	.9875 − 1	20′
50′	.3786 − 1	.3914 − 1	.6086	.9872 − 1	10′
14° 00′	.3837 − 1	.3968 − 1	.6032	.9869 − 1	76° 00′
10′	.3887 − 1	.4021 − 1	.5979	.9866 − 1	50′
20′	.3937 − 1	.4074 − 1	.5926	.9863 − 1	40′
30′	.3986 − 1	.4127 − 1	.5873	.9859 − 1	30′
40′	.4035 − 1	.4178 − 1	.5822	.9856 − 1	20′
50′	.4083 − 1	.4230 − 1	.5770	.9853 − 1	10′
15° 00′	.4130 − 1	.4281 − 1	.5719	.9849 − 1	75° 00′
10′	.4177 − 1	.4331 − 1	.5669	.9846 − 1	50′
20′	.4223 − 1	.4381 − 1	.5619	.9843 − 1	40′
30′	.4269 − 1	.4430 − 1	.5570	.9839 − 1	30′
40′	.4314 − 1	.4479 − 1	.5521	.9836 − 1	20′
50′	.4359 − 1	.4527 − 1	.5473	.9832 − 1	10′
16° 00′	.4403 − 1	.4575 − 1	.5425	.9828 − 1	74° 00′
10′	.4447 − 1	.4622 − 1	.5378	.9825 − 1	50′
20′	.4491 − 1	.4669 − 1	.5331	.9821 − 1	40′
30′	.4533 − 1	.4716 − 1	.5284	.9817 − 1	30′
40′	.4576 − 1	.4762 − 1	.5238	.9814 − 1	20′
50′	.4618 − 1	.4808 − 1	.5192	.9810 − 1	10′
17° 00′	.4659 − 1	.4853 − 1	.5147	.9806 − 1	73° 00′
10′	.4700 − 1	.4898 − 1	.5102	.9802 − 1	50′
20′	.4741 − 1	.4943 − 1	.5057	.9798 − 1	40′
30′	.4781 − 1	.4987 − 1	.5013	.9794 − 1	30′
40′	.4821 − 1	.5031 − 1	.4969	.9790 − 1	20′
50′	.4861 − 1	.5075 − 1	.4925	.9786 − 1	10′
18° 00′	.4900 − 1	.5118 − 1	.4882	.9782 − 1	72° 00′
	Log Cos	Log Ctg	Log Tg	Log Sen	Grados

Tabla IV. Logaritmos de Funciones Trigonométricas

Grados	Log Sen	Log Tg	Log Ctg	Log Cos	
18° 00'	.4900 − 1	.5118 − 1	.4882	.9782 − 1	72° 00'
10'	.4939 − 1	.5161 − 1	.4839	.9778 − 1	50'
20'	.4977 − 1	.5203 − 1	.4797	.9774 − 1	40'
30'	.5015 − 1	.5245 − 1	.4755	.9770 − 1	30'
40'	.5052 − 1	.5287 − 1	.4713	.9765 − 1	20'
50'	.5090 − 1	.5329 − 1	.4671	.9761 − 1	10'
19° 00'	.5126 − 1	.5370 − 1	.4630	.9757 − 1	71° 00'
10'	.5163 − 1	.5411 − 1	.4589	.9752 − 1	50'
20'	.5199 − 1	.5451 − 1	.4549	.9748 − 1	40'
30'	.5235 − 1	.5491 − 1	.4509	.9743 − 1	30'
40'	.5270 − 1	.5531 − 1	.4469	.9739 − 1	20'
50'	.5306 − 1	.5571 − 1	.4429	.9734 − 1	10'
20° 00'	.5341 − 1	.5611 − 1	.4389	.9730 − 1	70° 00'
10'	.5375 − 1	.5650 − 1	.4350	.9725 − 1	50'
20'	.5409 − 1	.5689 − 1	.4311	.9721 − 1	40'
30'	.5443 − 1	.5727 − 1	.4273	.9716 − 1	30'
40'	.5477 − 1	.5766 − 1	.4234	.9711 − 1	20'
50'	.5510 − 1	.5804 − 1	.4196	.9706 − 1	10'
21° 00'	.5543 − 1	.5842 − 1	.4158	.9702 − 1	69° 00'
10'	.5576 − 1	.5879 − 1	.4121	.9697 − 1	50'
20'	.5609 − 1	.5917 − 1	.4083	.9692 − 1	40'
30'	.5641 − 1	.5954 − 1	.4046	.9687 − 1	30'
40'	.5673 − 1	.5991 − 1	.4009	.9682 − 1	20'
50'	.5704 − 1	.6028 − 1	.3972	.9677 − 1	10'
22° 00'	.5736 − 1	.6064 − 1	.3936	.9672 − 1	68° 00'
10'	.5767 − 1	.6100 − 1	.3900	.9667 − 1	50'
20'	.5798 − 1	.6136 − 1	.3864	.9661 − 1	40'
30'	.5828 − 1	.6172 − 1	.3828	.9656 − 1	30'
40'	.5859 − 1	.6208 − 1	.3792	.9651 − 1	20'
50'	.5889 − 1	.6243 − 1	.3757	.9646 − 1	10'
23° 00'	.5919 − 1	.6279 − 1	.3721	.9640 − 1	67° 00'
10'	.5948 − 1	.6314 − 1	.3686	.9635 − 1	50'
20'	.5978 − 1	.6348 − 1	.3652	.9629 − 1	40'
30'	.6007 − 1	.6383 − 1	.3617	.9624 − 1	30'
40'	.6036 − 1	.6417 − 1	.3583	.9618 − 1	20'
50'	.6065 − 1	.6452 − 1	.3548	.9613 − 1	10'
24° 00'	.6093 − 1	.6486 − 1	.3514	.9607 − 1	66° 00'
10'	.6121 − 1	.6520 − 1	.3480	.9602 − 1	50'
20'	.6149 − 1	.6553 − 1	.3447	.9596 − 1	40'
30'	.6177 − 1	.6587 − 1	.3413	.9590 − 1	30'
40'	.6205 − 1	.6620 − 1	.3380	.9584 − 1	20'
50'	.6232 − 1	.6654 − 1	.3346	.9579 − 1	10'
25° 00'	.6259 − 1	.6687 − 1	.3313	.9573 − 1	65° 00'
10'	.6286 − 1	.6720 − 1	.3280	.9567 − 1	50'
20'	.6313 − 1	.6752 − 1	.3248	.9561 − 1	40'
30'	.6340 − 1	.6785 − 1	.3215	.9555 − 1	30'
40'	.6366 − 1	.6817 − 1	.3183	.9549 − 1	20'
50'	.6392 − 1	.6850 − 1	.3150	.9543 − 1	10'
26° 00'	.6418 − 1	.6882 − 1	.3118	.9537 − 1	64° 00'
10'	.6444 − 1	.6914 − 1	.3086	.9530 − 1	50'
20'	.6470 − 1	.6946 − 1	.3054	.9524 − 1	40'
30'	.6495 − 1	.6977 − 1	.3023	.9518 − 1	30'
40'	.6521 − 1	.7009 − 1	.2991	.9512 − 1	20'
50'	.6546 − 1	.7040 − 1	.2960	.9505 − 1	10'
27° 00'	.6570 − 1	.7072 − 1	.2928	.9499 − 1	63° 00'
	Log Cos	Log Ctg	Log Tg	Log Sen	Grados

Tabla IV. Logaritmos de Funciones Trigonométricas

Grados	Log Sen	Log Tg	Log Ctg	Log Cos	
27° 00'	.6570 − 1	.7072 − 1	.2928	.9499 − 1	63° 00'
10'	.6595 − 1	.7103 − 1	.2897	.9492 − 1	50'
20'	.6620 − 1	.7134 − 1	.2866	.9486 − 1	40'
30'	.6644 − 1	.7165 − 1	.2835	.9479 − 1	30'
40'	.6668 − 1	.7196 − 1	.2804	.9473 − 1	20'
50'	.6692 − 1	.7226 − 1	.2774	.9466 − 1	10'
28° 00'	.6716 − 1	.7257 − 1	.2743	.9459 − 1	62° 00'
10'	.6740 − 1	.7287 − 1	.2713	.9453 − 1	50'
20'	.6763 − 1	.7317 − 1	.2683	.9446 − 1	40'
30'	.6787 − 1	.7348 − 1	.2652	.9439 − 1	30'
40'	.6810 − 1	.7378 − 1	.2622	.9432 − 1	20'
50'	.6833 − 1	.7408 − 1	.2592	.9425 − 1	10'
29° 00'	.6856 − 1	.7438 − 1	.2562	.9418 − 1	61° 00'
10'	.6878 − 1	.7467 − 1	.2533	.9411 − 1	50'
20'	.6901 − 1	.7497 − 1	.2503	.9404 − 1	40'
30'	.6923 − 1	.7526 − 1	.2474	.9397 − 1	30'
40'	.6946 − 1	.7556 − 1	.2444	.9390 − 1	20'
50'	.6968 − 1	.7585 − 1	.2415	.9383 − 1	10'
30° 00'	.6990 − 1	.7614 − 1	.2386	.9375 − 1	60° 00'
10'	.7012 − 1	.7644 − 1	.2356	.9368 − 1	50'
20'	.7033 − 1	.7673 − 1	.2327	.9361 − 1	40'
30'	.7055 − 1	.7701 − 1	.2299	.9353 − 1	30'
40'	.7076 − 1	.7730 − 1	.2270	.9346 − 1	20'
50'	.7097 − 1	.7759 − 1	.2241	.9338 − 1	10'
31° 00'	.7118 − 1	.7788 − 1	.2212	.9331 − 1	59° 00'
10'	.7139 − 1	.7816 − 1	.2184	.9323 − 1	50'
20'	.7160 − 1	.7845 − 1	.2155	.9315 − 1	40'
30'	.7181 − 1	.7873 − 1	.2127	.9308 − 1	30'
40'	.7201 − 1	.7902 − 1	.2098	.9300 − 1	20'
50'	.7222 − 1	.7930 − 1	.2070	.9292 − 1	10'
32° 00'	.7242 − 1	.7958 − 1	.2042	.9284 − 1	58° 00'
10'	.7262 − 1	.7986 − 1	.2014	.9276 − 1	50'
20'	.7282 − 1	.8014 − 1	.1986	.9268 − 1	40'
30'	.7302 − 1	.8042 − 1	.1958	.9260 − 1	30'
40'	.7322 − 1	.8070 − 1	.1930	.9252 − 1	20'
50'	.7342 − 1	.8097 − 1	.1903	.9244 − 1	10'
33° 00'	.7361 − 1	.8125 − 1	.1875	.9236 − 1	57° 00'
10'	.7380 − 1	.8153 − 1	.1847	.9228 − 1	50'
20'	.7400 − 1	.8180 − 1	.1820	.9219 − 1	40'
30'	.7419 − 1	.8208 − 1	.1792	.9211 − 1	30'
40'	.7438 − 1	.8235 − 1	.1765	.9203 − 1	20'
50'	.7457 − 1	.8263 − 1	.1737	.9194 − 1	10'
34° 00'	.7476 − 1	.8290 − 1	.1710	.9186 − 1	56° 00'
10'	.7494 − 1	.8317 − 1	.1683	.9177 − 1	50'
20'	.7513 − 1	.8344 − 1	.165[illegible]	.9169 − 1	40'
30'	.7531 − 1	.8371 − 1	.1629	.9160 − 1	30'
40'	.7550 − 1	.8398 − 1	.1602	.9151 − 1	20'
50'	.7568 − 1	.8425 − 1	.1575	.9142 − 1	10'
35° 00'	.7586 − 1	.8452 − 1	.1548	.9134 − 1	55° 00'
10'	.7604 − 1	.8479 − 1	.1521	.9125 − 1	50'
20'	.7622 − 1	.8506 − 1	.1494	.9116 − 1	40'
30'	.7640 − 1	.8533 − 1	.1467	.9107 − 1	30'
40'	.7657 − 1	.8559 − 1	.1441	.9098 − 1	20'
50'	.7675 − 1	.8586 − 1	.1414	.9089 − 1	10'
36° 00'	.7692 − 1	.8613 − 1	.1387	.9080 − 1	54° 00'
	Log Cos	Log Ctg	Log Tg	Log Sen	Grados

Tabla IV. Logaritmos de Funciones Trigonométricas

Grados	Log Sen	Log Tg	Log Ctg	Log Cos	
36° 00′	.7692 − 1	.8613 − 1	.1387	.9080 − 1	54° 00′
10′	.7710 − 1	.8639 − 1	.1361	.9070 − 1	50′
20′	.7727 − 1	.8666 − 1	.1334	.9061 − 1	40′
30′	.7744 − 1	.8692 − 1	.1308	.9052 − 1	30′
40′	.7761 − 1	.8718 − 1	.1282	.9042 − 1	20′
50′	.7778 − 1	.8746 − 1	.1255	.9033 − 1	10′
37° 00′	.7795 − 1	.8771 − 1	.1229	.9023 − 1	53° 00′
10′	.7811 − 1	.8797 − 1	.1203	.9014 − 1	50′
20′	.7828 − 1	.8824 − 1	.1176	.9004 − 1	40′
30′	.7844 − 1	.8850 − 1	.1150	.8995 − 1	30′
40′	.7861 − 1	.8876 − 1	.1124	.8985 − 1	20′
50′	.7877 − 1	.8902 − 1	.1098	.8975 − 1	10′
38° 00′	.7893 − 1	.8928 − 1	.1072	.8965 − 1	52° 00′
10′	.7910 − 1	.8954 − 1	.1046	.8955 − 1	50′
20′	.7926 − 1	.8980 − 1	.1020	.8945 − 1	40′
30′	.7941 − 1	.9006 − 1	.0994	.8935 − 1	30′
40′	.7957 − 1	.9032 − 1	.0968	.8925 − 1	20′
50′	.7973 − 1	.9058 − 1	.0942	.8915 − 1	10′
39° 00′	.7989 − 1	.9084 − 1	.0916	.8905 − 1	51° 00′
10′	.8004 − 1	.9110 − 1	.0890	.8895 − 1	50′
20′	.8020 − 1	.9165 − 1	.0865	.8884 − 1	40′
30′	.8035 − 1	.9161 − 1	.0839	.8874 − 1	30′
40′	.8050 − 1	.9187 − 1	.0813	.8864 − 1	20′
50′	.8066 − 1	.9212 − 1	.0788	.8853 − 1	10′
40° 00′	.8081 − 1	.9238 − 1	.0762	.8843 − 1	50° 00′
10′	.8096 − 1	.9264 − 1	.0736	.8832 − 1	50′
20′	.8111 − 1	.9289 − 1	.0711	.8821 − 1	40′
30′	.8125 − 1	.9315 − 1	.0686	.8810 − 1	30′
40′	.8140 − 1	.9341 − 1	.0659	.8800 − 1	20′
50′	.8155 − 1	.9366 − 1	.0634	.8789 − 1	10′
41° 00′	.8169 − 1	.9392 − 1	.0608	.8778 − 1	49° 00′
10′	.8184 − 1	.9417 − 1	.0583	.8767 − 1	50′
20′	.8198 − 1	.9443 − 1	.0557	.8756 − 1	40′
30′	.8213 − 1	.9468 − 1	.0532	.8745 − 1	30′
40′	.8227 − 1	.9494 − 1	.0506	.8733 − 1	20′
50′	.8241 − 1	.9519 − 1	.0481	.8722 − 1	10′
42° 00′	.8255 − 1	.9544 − 1	.0456	.8711 − 1	48° 00′
10′	.8269 − 1	.9570 − 1	.0430	.8699 − 1	50′
20′	.8283 − 1	.9595 − 1	.0405	.8688 − 1	40′
30′	.8297 − 1	.9621 − 1	.0379	.8676 − 1	30′
40′	.8311 − 1	.9646 − 1	.0354	.8665 − 1	20′
50′	.8324 − 1	.9671 − 1	.0329	.8653 − 1	10′
43° 00′	.8338 − 1	.9697 − 1	.0303	.8641 − 1	47° 00′
10′	.8351 − 1	.9722 − 1	.0278	.8629 − 1	50′
20′	.8365 − 1	.9747 − 1	.0253	.8618 − 1	40′
30′	.8378 − 1	.9772 − 1	.0228	.8606 − 1	30′
40′	.8391 − 1	.9798 − 1	.0202	.8594 − 1	20′
50′	.8405 − 1	.9823 − 1	.0177	.8582 − 1	10′
44° 00′	.8418 − 1	.9848 − 1	.0152	.8569 − 1	46° 00′
10′	.8431 − 1	.9874 − 1	.0126	.8557 − 1	50′
20′	.8444 − 1	.9899 − 1	.0101	.8545 − 1	40′
30′	.8457 − 1	.9924 − 1	.0076	.8532 − 1	30′
40′	.8469 − 1	.9949 − 1	.0051	.8520 − 1	20′
50′	.8482 − 1	.9975 − 1	.0025	.8507 − 1	10′
45° 00′	.8495 − 1	.0000	.0000	.8495 − 1	45° 00′
	Log Cos	Log Ctg	Log Tg	Log Sen	Grados

Matemáticas IV, Libro
se terminó de imprimir y encuadernar en el mes de Marzo de 2009 en Grupo Gráfico Editorial, S.A. de C.V., Calle B No. 8, Parque Industrial Puebla 2000; C.P. 72220, Puebla, Puebla.

Se tiraron 6,000 ejemplares
Mas sobrantes para reposición