UNIDAD V

POSTERIOR DESARROLLO DE LOS NÚMEROS REALES

Módulo 1

Postulados de orden

OBJETIVO

Resolver desigualdades utilizando los postulados de orden.

Recordemos que el conjunto de los números reales es la unión de dos conjuntos: Los Racionales y los Irracionales. O sea, todos los números que hasta la fecha conoces. En la guía de matemáticas I, encontrarás un estudio más profundo sobre los números reales.

En este módulo vamos a estudiar ciertas propiedades que los números reales cumplen y tienen que ver con las desigualdades. Esto es, vamos a ver qué pasa cuando un número “a” es más grande que otro “b” (a > b) y qué sucede cuando a esta desigualdad le sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos por otro número real.

Al conjunto de los números reales junto con estas propiedades se le conoce como **campo ordenado.** Lo de ordenado tiene que ver con las desigualdades, es decir, que siempre podemos decir dados dos números reales quién es mayor. En otras palabras, los podemos ordenar.

Definiciones:

a y b pertenecen a los reales

♣ a es mayor que b, $(a > b)$, si $a - b$ es positivo

♣ a es menor que b, $(a < b)$, si $a - b$ es negativo

Para ejemplificar: si tomamos dos números reales, por ejemplo el 5 y el 2, nosotros sabemos, desde que tenemos conciencia, que el 5 es mayor que 2, (5 > 2). Pero si queremos seguir la definición tenemos que comprobar que 5 – 2 sea positivo. Lo cual es cierto pues 5 – 2 = 3, así ya podemos decir que 5 > 2.

Por el contrario, para decir que 2 es menor que 5, tenemos que ver que la resta: 2 – 5 sea negativo, lo cual es cierto pues 2 – 5 = –3. Así, ya podemos decir que 2 < 5.

Existe una propiedad o ley que cumple cualquier pareja de números reales:

A las propiedades que vamos a ver a continuación se les conoce como **postulados de orden**.

Postulado de la Tricotomía:

"Para cada par de números reales *a* y *b*, es verdadera una, y solamente una, de las proposiciones:

$a < b \qquad a = b \qquad a > b$

Es decir, si pensamos en dos números reales, los que sean, siempre podremos decir si uno es mayor que el otro o tal vez sean iguales.

Propiedades de las desigualdades	
Postulado Transitivo: $\{a,b,c\} \in \mathbb{R};$ $\text{si } a > b \text{ y } b > c, \text{ entonces } a > c$ Ejemplo ilustrativo: $\text{Como } 7 > 3 \text{ y } 3 > 1, \text{ se sigue que } 7 > 1$	**Postulado** Aditivo: $\{a,b,c\} \in \mathbb{R};$ $\text{si } a > b, \text{ entonces } a + c > b + c$ Ejemplo ilustrativo: $\text{Si } 7 > 6, \text{ se sigue que}$ $7 + 5 > 6 + 5 \Leftrightarrow 12 > 11$ O sea, si a una desigualdad le sumamos un número en ambos lados, la desigualdad no cambia.
Postulado Multiplicativo: $\text{si } a > b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac > bc$ Ejemplo ilustrativo: $\text{Si } 9 > 6, \text{ se sigue que}$ $9 \times 2 > 6 \times 2 \Leftrightarrow 18 > 12$ O sea, si a una desigualdad la	**Teorema 1:** $\{a,b,c,d\} \in \mathbb{R};$ $\text{si } a > b \text{ y } c > d, \text{ entonces}$ $(a + c) > (b + d)$ Ejemplo ilustrativo:

multiplicamos por un número positivo en ambos lados, la desigualdad no cambia.	De $3 > -3$ y $-2 > -4$ se sigue que $(3+(-2)) > (-3+(-4)) \Leftrightarrow 1 > -7$ O sea, si a una desigualdad le sumamos otra desigualdad lado a lado, la desigualdad no cambia.
Los Postulados anteriores también son válidos si se cambia "**>**" por "**<**"	
Teorema 2: $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ si, y solamente si, $-a < 0$ Ejemplo ilustrativo Como 4 > 0 entonces – 4 < 0. O sea, si un número es positivo entonces su negativo es menor que cero y viceversa.	**Teorema 3:** $\{a,b\} \in \mathbb{R}$ $a > b$ si, y solamente si, $-a < -b$ *"Si se cambia el signo de ambos miembros de una desigualdad, se cambia el sentido de la desigualdad".* Ejemplo ilustrativo Si 4 > 3 entonces –4 < –3. También Si –2 > –6 entonces 2 < 6.
Teorema 4: Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ Ejemplo ilustrativo Como 4 > 3 y – 2 < 0 entonces (4) (– 2) < (3) (– 2). O sea, – 8 < – 6. Es decir, en una desigualdad, al multiplicar por un negativo en ambos lados la desigualdad se invierte.	**Teorema 5:** Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ Ejemplo ilustrativo Como 4 ≠ 0 entonces $(4)^2 > 0$, o sea, 16 > 0. También, como – 5 ≠ 0 entonces $(-5)^2 > 0$, o sea, 25 > 0. Esto es, si un número es positivo o negativo entonces su cuadrado siempre será positivo.
Teorema 6:	**Teorema 7:**

$a > 0$ si, y solamente si, $\frac{1}{a} > 0$	Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
Ejemplo ilustrativo Como 2 > 0 entonces $\frac{1}{2} > 0$. O también si $\frac{1}{3} > 0$ entonces 3 > 0. Esto es, si un número es positivo entonces su recíproco también será positivo.	Ejemplo ilustrativo Como 3 > 2 y 5 > 0 entonces $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$. Esto es, si a una desigualdad la dividimos por un número positivo en ambos lados entonces la desigualdad no cambia.

Teorema 8:

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ | Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Esto es, si a una desigualdad la dividimos por un número negativo en ambos lados entonces la desigualdad se invierte.

Actividades de aprendizaje

1.- De las proposiciones siguientes diga si es falsa o verdadera:

a) 2 < 3
b) – 3 – (- 9) es positivo
c) – 3 – (- 2) es positivo
d) – 4 > – 3
e) 4 – 7 es positivo
f) 7 – 4 es positivo
g) – 2 – (- 3) es positivo

2.- Diga qué postulados representan cada una de las proposiciones siguientes:

a) Sean p, q, r ∈ R. p > q ⇒ p + r > q + r.

b) Sean $p, q, r \in R$. $p > q$ y $q > r \Rightarrow p > r$.

c) Sean $p, q \in R$. $p > q$, $p < q$ o $p = q$.

d) Sean $p, q \in R$, $r > 0$. $p > q \Rightarrow p\,r > q\,r$.

Módulo 2

Los números racionales

OBJETIVO

Conocer el campo de los números racionales. Ordenar números reales y calcular promedios de dos números dados.

El conjunto de los números racionales se define así:

$$D = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{a}{b}, a, b \in E, b \neq 0 \right\}$$

Por difícil que parece su definición, no lo es tanto. Basta con traducir al español lo que se está afirmando con símbolos:

En español dice: El conjunto de los números racionales "D" es el conjunto de todos los números "x" tales que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros "a" y "b" pero con la condición de que "b", o sea el denominador, sea diferente de cero.

A ver si con ejemplos se aclara mejor:

Si escogemos dos números enteros a = 3 y b = 4 y formamos el cociente $\frac{a}{b}$ entonces se está formando el número racional x = $\frac{3}{4}$. Así que para tener un número racional basta con elegir dos números enteros y hacer su cociente (claro, hay que cuidar que el denominador no sea cero).

Otros racionales son los siguientes: $\frac{-2}{7}, \frac{-4}{8}, \frac{1}{2}, \frac{8}{1}, \frac{0}{5}$.

Note que el racional $\frac{8}{1}$ es lo mismo que el entero 8. También el racional $\frac{0}{5}$ es lo mismo que el entero 0. En realidad, todos los números enteros los podemos expresar como racionales. Por ejemplo el entero 2 se puede ver como $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$ o $\frac{6}{3}$ o $\frac{-2}{-1}$ y así sucesivamente.

También, un número racional se puede ver como un decimal pero éste debe ser periódico, por ejemplo: 2.5, 3.3333333…. El 2.5 se puede ver como cociente de dos números $2.5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$. También el 3.33333… es igual a $\frac{10}{3}$.

Los números que no son racionales se llaman irracionales. Por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{10}}{3}$, π son números que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros. Aunque el $\frac{\sqrt{10}}{3}$ es un cociente, no es racional pues el numerador "$\sqrt{10}$" no es un número entero.

Cuando el denominador es cero: $\frac{5}{0}$ esto no representa ningún número. Se entiende que es algo que no está definido.

Dado que el conjunto de los números racionales es un campo ordenado, entonces siempre podremos decir cuando un racional es más grande o más pequeño que otro. La relación de orden que existe es la de desigualdad $>$ o $<$.
Para determinar cuando un racional es más grande o más pequeño que otro se utiliza el truco siguiente.
Por ejemplo, determinar que desigualdad se cumple entre los números: $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$.

Basta con multiplicar el denominador del primero por el numerador del segundo y a su vez el denominador del segundo se multiplica por el numerador del primero:

$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}$

(2) (4), (3) (5) En otras palabras, se realiza el producto cruzado. Para obtener:

8, 15

Dado que 8 < 15, entonces regresando en los pasos, deducimos que $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$.

Otro ejemplo:

Establecer el sentido desigualdad entre:

$\frac{5}{-6}, -\frac{7}{4}$

Realizando el producto cruzado tenemos:

5 (4), (- 6) (- 7) entonces

20, 42. Como 20 < 42 entonces regresando en los pasos tenemos $\frac{5}{-6} < -\frac{7}{4}$

.

La densidad es una propiedad que tienen los números racionales. Esta propiedad dice que siempre entre dos números racionales hay otro número racional.

Uno de estos números es fácil de encontrar si se calcula el **promedio** de los dos números dados. También se conoce como la **media aritmética**:

Si $a, b \in R$ entonces la media aritmética de a y b es $\frac{a+b}{2}$

Por ejemplo:

La media aritmética de – 2 y 9 es $\frac{-2+9}{2}=\frac{7}{2}=3.5$

¿Cuál es la media aritmética o promedio del 5 y – 8?

$$\frac{5+(-8)}{2}=\frac{-3}{2}=-1.5$$

Otro ejemplo:

La media aritmética o promedio del $-\frac{7}{4}$ y $\frac{2}{3}$ es:

$$\frac{-\frac{7}{4}+\frac{2}{3}}{2}=\frac{\frac{-21+8}{12}}{2}=\frac{\frac{-13}{12}}{2}=\frac{\frac{-13}{12}}{\frac{2}{1}}=\frac{-13}{24}$$

Actividades de aprendizaje

1.- De la siguiente lista de números diga si son racionales o irracionales o ninguno de ellos:

a) 4

b) $-\frac{7}{4}$

c) $\sqrt{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $\frac{5}{\sqrt{4}}$

f) $-\pi$

g) $-\frac{0}{7}$

h) $-\frac{7}{0}$

2.- Escriba la desigualdad que se cumple entre las siguientes parejas de números:

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$

b) $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{6}{2}$

c) $\frac{4}{8}$ y $\frac{32}{7}$.

3.- Halle la media aritmética de cada pareja de números que se da:

a) -3 y 9
b) -2 y -10
c) 4 y 27
d) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$
e) $-\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{7}$.

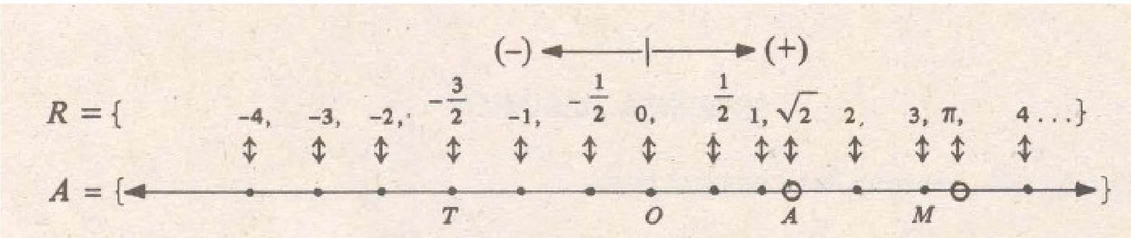
Módulo 3

Representación geométrica de los números reales

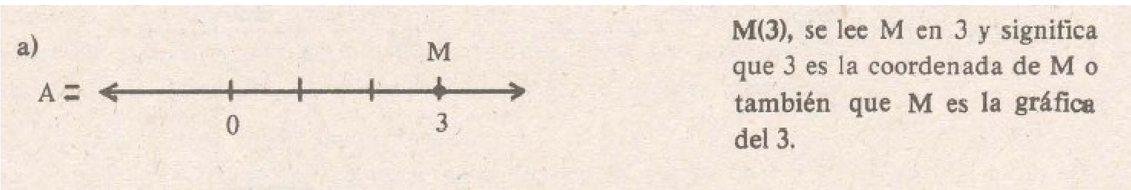
OBJETIVO

Determinar las coordenadas de puntos en la recta real. Definir y calcular la distancia entre dos puntos de la recta.

La recta real es una recta a la cual se le asocia a cada punto un número real. Se define primero la posición del cero y después, a su derecha ubicamos los reales positivos y a su izquierda a los reales negativos. Siguiendo el orden establecido en los números reales, el número más pequeño va a la izquierda del más grande.



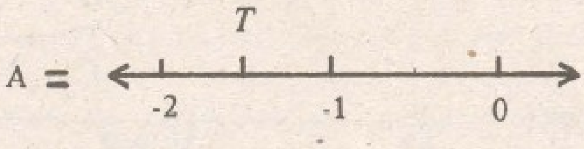
Cuando se quiera localizar un punto en la recta real basta con dar su coordenada. Por ejemplo si el punto se llama M y su coordenada es 3 entonces se localiza el 3 en la recta real y esa es la ubicación del punto M.



Si queremos localizar el punto T cuya coordenada es $-\frac{3}{2}$ entonces se tiene que localizar el $-\frac{3}{2}$. Para empezar, se busca en los negativos. Como es una fracción que equivale al – 1.5, éste se encuentra entre el – 1 y el – 2, exactamente a la mitad:

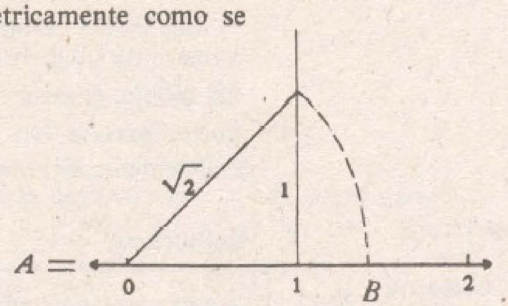
b) La coordenada de T es $-\frac{3}{2}$

entonces $T\left(-\frac{3}{2}\right)$



También se pueden localizar los irracionales, por ejemplo, la raíz cuadrada de 2. Una manera es calculando la raíz de 2 la cual da 1.4142… entonces se busca este decimal en la recta. Otra forma es calculando la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de lado 1, como se ilustra a continuación:

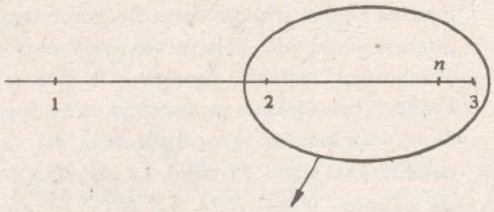
c) $B(\sqrt{2})$. El punto B se puede situar geométricamente como se muestra en el dibujo.



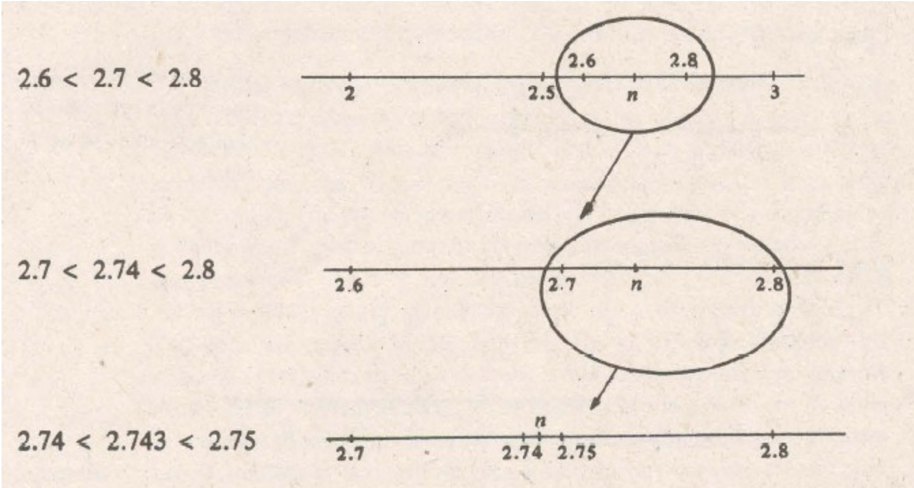
Para localizar otro irracional se hace mediante aproximaciones dependiendo de sus decimales. Por ejemplo:

Localice $n = 2.743...$, número irracional

$1 < 2 < 3$



Primero se localizó el entero 2. Ahora el decimal 7, en seguida el .74 y por último el .743:



VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x, es x si el número es positivo o es – x si el número es negativo o es cero si el número es el cero.

El valor absoluto de un número x se denota con unas barras paralelas $|x|$.
En otras palabras el valor absoluto de un número positivo es él mismo y si el número es negativo, su valor absoluto es el número pero positivo.

Por ejemplo, el valor absoluto del 2 es el mismo 2, $|2| = 2$. Y el valor absoluto del – 2 es también el 2, $|-2| = 2$. Es decir, el valor absoluto deja al número positivo.

Otros ejemplos:

$|4| = 4$

$|-5| = 5$

$\left|\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$

$\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

$\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

$\left|-\pi\right| = \pi$

Se pueden hacer operaciones con el valor absoluto. Por ejemplo:

a) $|2-5| = |-3| = 3$

b) $|4-3| = |1| = 1$

c) $|-4| + |-3| = 4 + 3 = 7$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos cualesquiera A(x) y B(y) es el valor absoluto de la resta de sus coordenadas: $|x-y|$.

Ejemplos:

a) La distancia entre los puntos A(- 3) y B(5), aplicando la fórmula es: $|(-3)-(5)| = |-8| = 8$

b) La distancia entre los puntos A(4) y B(-6), aplicando la fórmula es: $|(4)-(-6)| = |4+6| = |10| = 10$

c) La distancia entre los puntos A(-2) y B(-9), aplicando la fórmula es: $|(-2)-(-9)| = |-2+9| = |7| = 7$

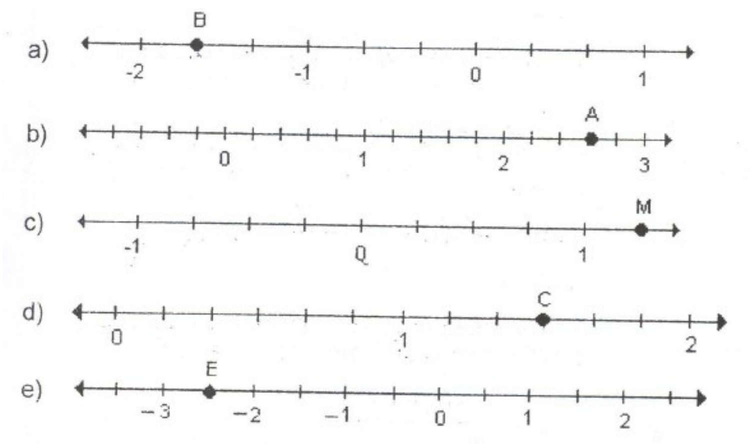
d) La distancia entre los puntos A(-7) y B(-4), aplicando la fórmula es: $|(-7)-(-4)| = |-7+4| = |-3| = 3$

e) La distancia entre los puntos A ($-\frac{3}{2}$) y B ($\frac{4}{5}$), aplicando la fórmula es:

$$\left|\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\right| = \left|\frac{-15-8}{10}\right| = \left|\frac{-23}{10}\right| = \frac{23}{10}$$

Actividades de Aprendizaje

1.- Diga que coordenadas tiene cada punto en cada gráfica.



2.- Calcule los valores absolutos que se indican.

a) $|5-7| =$

b) $|-4-9| =$

c) $|9-8| =$

d) $|3-(-7)| =$

e) $\left|\frac{2}{3}-\frac{5}{8}\right| =$

Módulo 4

Resolución de inecuaciones. Gráficas e intervalos

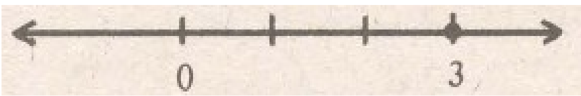
OBJETIVO

Identificar los intervalos abiertos y cerrados. Determinar y graficar la solución de inecuaciones con valor absoluto.

Primero empecemos por recordar que una ecuación es una igualdad donde hay un número que es desconocido, por ejemplo:

La expresión x - 3 = 0 tiene el valor desconocido x. Que si nosotros queremos conocer su valor tenemos que buscar un número que al restarle 3 nos de cero. Y efectivamente, ese valor es el +3 pues +3 – 3 = 0. Así que x = 3 es la solución de la ecuación. Si nosotros quisiéramos graficar esta solución, lo único que tendríamos que hacer es buscar el valor x = 3 en la recta y pintar ese punto:

x



Y eso sería todo.

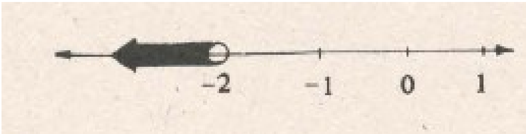
Sin embargo, cuando nos dan una inecuación o sea una expresión donde el valor desconocido participa en una desigualdad por ejemplo x < - 2, tenemos que buscar qué valores para x satisfacen esa desigualdad.

En este caso, en la inecuación x < - 2 se observa que x puede ser cualquier valor menor que – 2, es decir desde el – 2 hasta el menos infinito. Por ejemplo el -2.1, el -2.2, el -3, el -6, así hasta el menos infinito.

Lo anterior lo podemos expresar en términos de conjuntos. Y decimos la solución de la inecuación x < - 2 es el conjunto $\{x \in R / x < -2\}$, lo denotamos así $(-\infty, -2)$ y lo llamamos el intervalo abierto $-\infty, -2$.

En resumen, el intervalo abierto $(-\infty,-2)=\{x\in R/x<-2\}$ es la solución de la inecuación.

La gráfica de este intervalo es la siguiente:

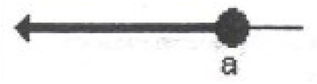


Note que la flecha hacia la izquierda significa que se consideran todos los números reales desde el -2 hasta el $-\infty$. Recuerde que este símbolo es el menos infinito. La bolita sobre el -2 significa que el -2 no se está considerando como parte de la solución de la inecuación ya que el -2 no es menor que el mismo -2. Es por eso que se hace una bolita "hueca" o sea que no se pinta.

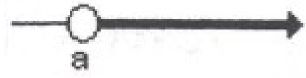
Si se observa, cuando resolvemos una ecuación con un solo valor desconocido la solución es un único punto sobre la recta (como en el ejemplo de arriba) pero si resolvemos una inecuación, la solución es un conjunto de puntos. O sea muchos (una infinidad) de números son solución de la inecuación.

El siguiente dibujo muestra la gráfica de la solución $x<a$ de una inecuación. Como se ve la flecha indica que el conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty,a)$. Le llamamos intervalo abierto porque no se consideran como parte de la solución los números $-\infty$ y "a".

El siguiente dibujo muestra la gráfica de la solución $x\leq a$ de una inecuación. Como se ve, la flecha indica que el conjunto solución es el intervalo semiabierto o semicerrado $(-\infty,a]$. Le llamamos intervalo semiabierto o semicerrado porque no se considera el $-\infty$ como parte de la solución pero si el "a" ya que la solución dice que deben tomarse todos los número menores o iguales que "a", así que el número "a" ahora si es parte de la solución. Y en la gráfica, la bolita "rellena" significa que el número "a" si se considera.



El siguiente dibujo muestra la gráfica de la solución $x > a$ de una inecuación. Como se ve la flecha indica que el conjunto solución es el intervalo abierto (a,∞). La flecha indica que se consideran como parte de la solución todos los números reales mayores que el número "a" hasta el ∞ .



El siguiente dibujo muestra la gráfica de la solución $x \geq a$ de una inecuación. Como se ve, la flecha indica que el conjunto solución es el intervalo semiabierto o semicerrado $[a,\infty)$. Le llamamos intervalo semiabierto o semicerrado porque no se considera el ∞ como parte de la solución pero si el "a" ya que la solución dice que deben tomarse todos los número mayores o iguales que "a", así que el número "a" ahora si es parte de la solución. Y en la gráfica, la bolita "rellena" significa que el número "a" si se considera.

El siguiente dibujo muestra la gráfica de la solución $a < x < b$ de una inecuación. Como se ve, aquí no hay flecha. La flecha sólo la usamos cuando nos referimos al infinito o al menos infinito. Lo que se pinta es el segmento comprendido entre los números "a" y "b" y se denota por el **intervalo abierto** (a,b). Y se entiende que la solución son todos los números reales mayores que a y menores que b. Los números a y b no se incluyen en la solución pues el valor x debe ser mayor que a y lo mismo para b, el número x debe ser menor que b. Es por esta razón que en el dibujo se pintan bolitas vacías sobre a y b.

El siguiente dibujo muestra la gráfica de la solución $a \leq x \leq b$ de una inecuación. Lo que se pinta es el segmento comprendido entre los números "a" y "b" y se denota por el **intervalo cerrado** $[a,b]$. Y se entiende que la solución son todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b. Los números a y b ahora si se incluyen en la solución pues el valor x debe ser mayor o igual que a y lo mismo para b, el número x debe ser menor o igual que b. Es por esta razón que en el dibujo se pintan bolitas "rellenas" sobre a y b.

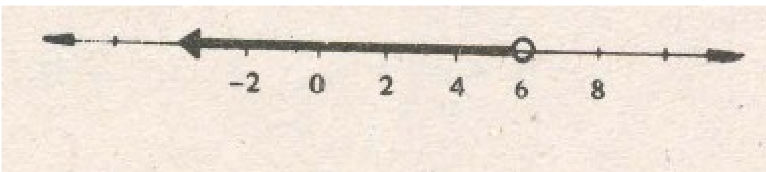
Con ejemplos lo anterior queda más claro.

Ejemplo 1. Hallar la gráfica para x < 6

Primero hallamos el conjunto solución de esta inecuación. En este caso es muy fácil pues basta tomar todos los números reales menores que 6. En notación de conjuntos queda así:

$$(-\infty, 6) = \{x \in R / x < 6\}$$

Y su gráfica así:



Ejemplo 2. Hallar la gráfica para $x \leq -1$.

Primero hallamos el conjunto solución de esta inecuación. En este caso es muy fácil pues basta tomar todos los números reales menores o iguales que -1. En notación de conjuntos queda así:

$$(-\infty,-1) = \{x \in R / x \leq -1\}$$

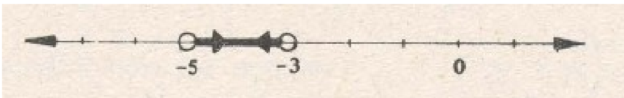
Y su gráfica así:

Ejemplo 3. Hallar la gráfica para – 5 < x < – 3

Primero hallamos el conjunto solución de esta inecuación. En este caso todos los números reales menores que – 3 pero mayores que el – 5 son los que forman el conjunto solución. Lo denotamos con el intervalo abierto:

$$(-5,-3) = \{x \in R / -5 < x < -3\}$$

Y su gráfica queda así:

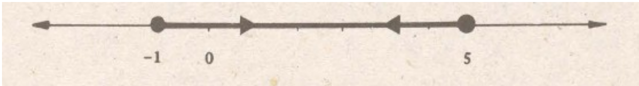


Ejemplo 4. Hallar la gráfica para $-1 \leq x \leq 5$

Primero hallamos el conjunto solución de esta inecuación. En este caso todos los números reales menores que – 3 pero mayores que el – 5 son los que forman el conjunto solución. Lo denotamos con el intervalo abierto:

$$(-5,-3) = \{x \in R / -5 < x < -3\}$$

Y su gráfica queda así:



Ahora, si se tiene que resolver una desigualdad que tenga valor absoluto se debe proceder con cuidado.

Ejemplo 5. Resolver $|x+1|<7$

En este caso, tenemos que pensar en encontrar qué valores x al sumarles 1 y sacándole a esto su valor absoluto nos de algo menor que 7.

Ensayemos:

Si la x = 6 no se admite pues $|6+1|=7$ y 7 no es menor que 7

Si la x = 5 si se admite pues $|5+1|=6$ y 6 si es menor que 7

Es claro que si le damos a la x valores que sean menores que 6 siempre tendremos que el valor absoluto será menor que 7.

También con los negativos pasa. Si x = -3 entonces $|-3+1|=|-2|=2$ y 2 es menor que 7.

Esta forma de buscar los valores de x que cumplan con la desigualdad es bastante tediosa pero hay otra forma más fácil.

Siempre que se tenga que resolver una desigualdad de este tipo se hace lo siguiente para quitar el valor absoluto:

Resolver la desigualdad $|x+1|<7$ es equivalente a resolver la desigualdad $-7<x+1<7$.

Ahora resolver esta desigualdad $-7<x+1<7$ está más fácil porque basta con quitar el uno que suma a la x al restarlo en cada desigualdad:

$-7-1<x+1-1<7-1$

Y finalmente: $-8<x<6$.

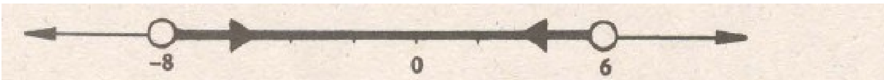
Hemos llegado a la solución. Los números menores que 6 y mayores que -8 son todos los que resuelven la desigualdad original $|x+1|<7$.

Finalmente expresamos esta solución en términos de conjuntos. La solución es el intervalo abierto: $(-8,6)=\{x\in R/-8<x<6\}$

Este conjunto se puede ver como la intersección de dos conjuntos:

$$(-8,6)=\{x\in R/-8<x<6\}=\{x\in R/-8<x\}\cap\{x\in R/x<6\}$$

Y la gráfica de este intervalo queda así:



La explicación anterior puede ser más breve para desigualdades de este tipo. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 6. Resolver $|x-2|<5$

Esta desigualdad es equivalente a $-5<x-2<5$. Sumando 2 en cada termino de las desigualdades para despejar la x se tiene $-5+2<x-2+2<5+2$ y esto es equivalente a $-3<x<7$.

Así que la solución es el intervalo abierto $(-3,7)=\{x\in R/-3<x<7\}$ y su gráfica queda así:

Ahora si la desigualdad contempla un signo de menor o igual lo que se tiene que hacer es lo siguiente.

Ejemplo 7. $|x-2|\leq 3$.

Resolver este tipo de desigualdades siempre será equivalente a resolver las desigualdades siguientes:

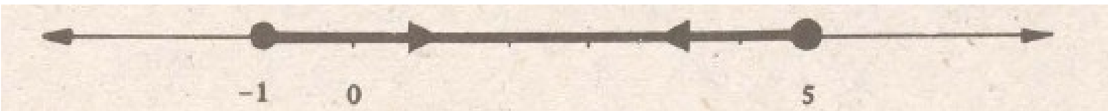
$x-2\leq 3 \quad y \quad x-2\geq -3$. Entonces se tienen que resolver las dos desigualdades. Resolvámoslas:

Para resolver la desigualdad $x-2\leq 3$ basta con sumar en ambos lados 2 para despejar la x: $x-2+2\leq 3+2$ y haciendo cuentas queda $x\leq 5$.

Para resolver la desigualdad $x-2\geq -3$ basta con sumar en ambos lados 2 para despejar la x: $x-2+2\geq -3+2$ y haciendo cuentas queda $x\geq -1$.

Por lo tanto el conjunto solución es el intervalo cerrado:

$[-1,5]=\{x\in R/-1\leq x\leq 5\}=\{x\in R/x\geq -1\}\cap\{x\in R/x\leq 5\}$ y su gráfica es:



En caso de que la desigualdad contemple un signo de mayor que se tiene que hacer es lo siguiente.

Ejemplo 7. Resolver $|x+4|>1$.

Resolver este tipo de desigualdades siempre será equivalente a resolver las desigualdades siguientes:

$x+4>1$ ó $x+4<-1$. Entonces se tienen que resolver las dos desigualdades. Resolvámoslas:

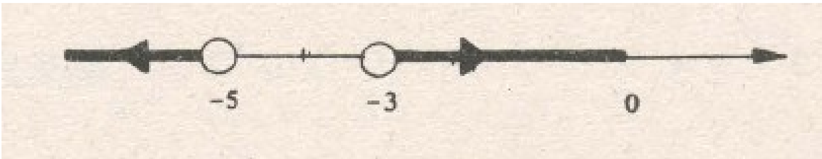
Para resolver $x+4>1$ tenemos que quitar el 4 para despejar la x. Entonces restamos 4 en ambos lados $x+4-4>1-4$ y esto es equivalente a $x>-3$.

Para resolver la segunda desigualdad $x+4<-1$ tenemos que también que quitar el 4 para despejar la x. Entonces restando en ambos lados 4 tenemos $x+4-4<-1-4$ y esto es equivalente a $x<-5$.

Luego, el conjunto solución de la desigualdad $|x+4|>1$esta dado por:

$$\{x\in R / x>-3 \quad ó \quad x<-5\}$$

Y su gráfica es:



Ahora si la desigualdad contempla un signo de menor o igual lo que se tiene que hacer es lo siguiente.

Ejemplo 7. $|x+4|\geq 2$.

Resolver este tipo de desigualdades siempre será equivalente a resolver las desigualdades siguientes:

$x+4\geq 2 \quad ó \quad x+4\leq -2$. Entonces se tienen que resolver las dos desigualdades. Resolvámoslas:

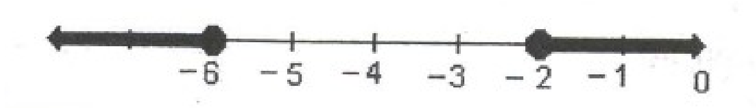
Para resolver $x+4\geq 2$ tenemos que quitar el 4 para despejar la x. Entonces restamos 4 en ambos lados $x+4-4\geq 2-4$ y esto es equivalente a $x\geq -2$.

Para resolver la segunda desigualdad $x+4\leq -2$ tenemos también que quitar el 4 para despejar la x. Entonces restando en ambos lados 4 tenemos $x+4-4\leq -2-4$ y esto es equivalente a $x\leq -6$.

Luego, el conjunto solución de la desigualdad $|x+4| \geq 2$ está dado por:

$$\{x \in R / x > -3 \quad ó \quad x < -5\}$$

Y su gráfica es:



Actividades de aprendizaje

1.- Dibuje la gráfica del conjunto siguiente

$\{x \in E / x > -3 \quad y \quad x < 1\}$

2.- Resuelva las desigualdades siguientes, grafíquelas y diga si la solución es un intervalo, en caso afirmativo, si es cerrado o abierto:

a) $|2x+6| > 4$

b) $|5x-1| \leq 9$

c) $|3-2x| < 1$

UNIDAD VI

EXPONENTES Y RADICALES

Módulo 5

Exponentes

OBJETIVO

Simplificar expresiones algebraicas por medio de las propiedades de los exponentes.

Iniciaremos nuestro estudio de los exponentes enteros positivos.

El producto de un número real que se multiplica por sí mismo se denota por a x a ó a · a ó (a) (a).

Ejemplo:

Exponente

a^n

Base

El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor. Y el número a^n se llama la enésima potencia de a. Por ejemplo, a^4 es la cuarta potencia de a o también se lee “a a la cuarta”.

Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación abreviada, tal que:

$$a \times a = a^2$$

$$a \times a \times a = a^3$$

$$a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

Donde a es llamada base y el número escrito arriba y a la derecha del mismo, es llamado exponente.

Otras formas de expresar a^3 son las siguientes:

$$a \times a \times a = a^3$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$(a)(a)(a)= a^3$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

1) Producto de dos potencias de la misma base.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$ $$a^4 \times a^5 = a^{4+5} = a^9$$

2) El cociente de dos potencias de la misma base.

Elévese la base a una potencia igual al exponente del numerador menos el exponente del denominador.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$ $$\frac{a^{16}}{a^6} = a^{16-6} = a^{10}$$

3) La potencia de una potencia.

Elévese la base a una potencia igual al producto de dos exponentes.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$ $$\left(a^5\right)^2 = a^{10}$$

4) La potencia del producto de dos factores.

Encuéntrese el producto de cada factor elevado a la enésima potencia

$$(ab)^n = a^n \cdot a^n$$ $$(ab)^3 = a^3 \cdot a^3$$

5) La potencia de cociente de dos factores.

Encuéntrese el cociente de cada factor elevado a la enésima potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{a^n}$$ $$\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{a^5}$$

Ejemplos:

a) $b^3 \times b^4 = b^7$

f) $\frac{(1 + i)^5}{(1 + i)^3} = (1 + i)^2$

b) $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

g) $(2a^3)^4 = 16\ a^{12}$

c) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2 = \frac{x^6}{y^4}$

d) $\frac{y^{15}}{y^{10}} = y^{15-10} = y^5$

h) $(x^4)^5 = x^{20}$

e) $\frac{8x^3y^2}{x^2y} = 8xy$

i) $\frac{(2xy)^3}{(xy)^2} = \frac{2^3x^7y^3}{x^2y^2} = 8x^5y$

6) Exponente cero.

EXPONENTE CERO. Si a es un número real diferente de cero, a elevado a la cero es igual a 1. $a^0 = 1$.

Esta aseveración puede demostrarse aplicando la regla del cociente de dos potencias de la misma base. Considérese el siguiente cociente:

$$1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

$5^0 = 1$

Resumimos las leyes en el cuadro siguiente:

Ley:	Ejemplo:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^3)^4 = a^{3\cdot4} = a^{12}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(ab)^2 = a^2b^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$
$(a^n b^m)^p = a^{np} b^{mp}$	$(a^2b^3)^5 = a^{2\cdot5}b^{3\cdot5} = a^{10}b^{15}$

Simplificar una expresión donde hay potencias de números reales, significa cambiarla a otra en que cada número real aparece solo una vez y todos los exponentes son positivos. *Teniendo presente que los denominadores representan números reales diferentes de cero.*

Ejemplos:

a) $\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$

b) $\frac{6x^3y^4z^2}{3x^5y^2z^4} = \frac{2y^2}{x^2z^2}$

c) $5x^2\ y^3\ z \cdot 2\ y^2\ z^2 = 10\ x^2\ y^5\ z^3$

d) $(2x^3)^3 = 2^3(x^3)^3 = 8x^8$

e) $(-3x^2)^3 = (-3)^3(x^3)^2 = -27x^6$

Más ejemplos.

Simplificar:

a)

$$\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right)$$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(3x^3y^2\right)\left(4xy^8\right) &= (3)(4)x^3xy^2y^8 \\ &= 12x^4y^{10}\end{aligned}$$

b)

$$\left(\frac{2t^2}{p}\right)^3\left(\frac{p}{t^5}\right)^2$$

Solución:

$$\left(\frac{2t^5}{p}\right)^3\left(\frac{p}{t^5}\right)^4 = \frac{(2t^5)^3}{p^3}\cdot\frac{p^4}{(t^5)^4}$$

$$= \frac{2^3(t^5)^3}{p^3}\cdot\frac{p^4}{(t^5)^4}$$

$$= \frac{8t^{15}}{p^3}\cdot\frac{p^4}{t^{20}}$$

$$= 8\cdot\frac{t^{15}}{t^{20}}\cdot\frac{p^4}{p^3}$$

$$= \frac{8p}{t^5}$$

c) $\frac{72\,x^4y^3}{48\,x^2y^5}$

Solución:

$$\frac{72\,x^4y^3}{48\,x^2y^5} = \frac{2^3\cdot 3\cdot 3x^4\,y^3}{2^3\cdot 3\cdot 2x^2y^5}$$

$$= \frac{3x^4y^3}{2x^2y^5}$$

$$= \frac{3x^4\cdot x^{-2}}{2y^5\cdot y^{-3}}$$

$$= \frac{3\,x^2}{2\,y^2}$$

Actividades de Aprendizaje

Use las leyes de los exponentes para evaluar y simplificar:

a) $10^2 \bullet 10^3 =$

b) $10^3/10 =$

c) $(10^2)^3 =$

d) $\sqrt{10^6} =$

e) $(2/3)^2 =$

Simplifique utilizando exponentes positivos.

1. $\dfrac{x^6}{x^{-10}}$

2. $\dfrac{6x^4y^7}{12x^5y^{-8}} =$

3. $(6x^{10})\,(3x^4)^2 =$

4. $\dfrac{4 \text{ X } 10^{-12}}{6 \text{ X } 10^{4}} =$

5. $(2x^2y^4) \cdot (-3xy^3) =$

6.

$$\frac{12\,a^2b^3}{60\,a^3b^5x^6}$$

7.

$$\frac{63\,a^4b^{10}c^{12}}{21\ a^8c^2}$$

Módulo 6

Radicales

OBJETIVO

Calcular la raíz principal enésima de una expresión dada.

DEFINICIÓN

El símbolo $\sqrt{}$ se llama radical. Y la expresión $\sqrt[n]{a} = b$ se llama la raíz enésima del número *a.* El número *n* es el índice del radical y el número *a* se llama radicando.

El nombre de “enésima” es por el número *n*. Si el número *n* vale 2 diremos raíz cuadrada, si vale 3 diremos raíz cúbica, si vale 4 diremos raíz cuarta, etc. Por ejemplo, la expresión $\sqrt[2]{4}$ representa la raíz cuadrada de 4 y su valor es 2 porque $2^2 = 4$ y también –2 es su raíz porque $(-2)^2 = 4$ (cuando nos referimos a la raíz cuadrada de cualquier número podemos escribir $\sqrt[2]{}$ o solamente $\sqrt{}$. La expresión $\sqrt[3]{27}$ representa la raíz cúbica de 27 y su valor es 3 porque $3^3 = 27$.

Cuando *n* es par y el radicando es positivo, siempre existen dos raíces reales una positiva y otra negativa:

Por ejemplo en la raíz cuarta $\sqrt[4]{81}$, *n* = 4 es par y el radicando 81 es positivo. Las raíces son 9 y -9 pues $9^2 = 81$ y $(-9)^2 = 81$.

Cuando *n* es impar y el radicando es positivo, existe solamente una raíz real positiva:

Por ejemplo en la raíz cúbica $\sqrt[3]{64}$, *n* = 3 es impar y el radicando 64 es positivo. La raíz es 4 pues $4^3 = 64$.

Cuando *n* es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real:

Por ejemplo en la raíz cuadrada $\sqrt[2]{-25}$, *n* = 2 es par y el radicando -25 es negativo. No existe un número real que elevado al cuadrado nos de -25.

Cuando *n* es impar y el radicando es negativo, existe solamente una raíz real negativa:

Por ejemplo en la raíz cúbica $\sqrt[3]{-8}$, *n* = 3 es impar y el radicando -8 es negativo. La raíz es -2 pues $(-2)^3 = -8$.

DEFINICIÓN

Cuando se obtiene la raíz enésima de índice par de un número real positivo podemos obtener **la raíz principal** la cual siempre será la raíz positiva de la enésima.

Con un ejemplo se ve mejor:

Como $\sqrt[4]{16}$ tiene dos raíces 2 y -2, la raíz principal es la positiva, es decir, la raíz principal de $\sqrt[4]{16}$ es 2.

Si la raíz enésima tiene índice impar y el radicando es negativo podemos obtener **la raíz principal** la cual siempre será la raíz negativa de la enésima.

Con un ejemplo se ve mejor:

Como $\sqrt[3]{-27}$ tiene solo una raíz -3, en este caso la raíz principal es -3.

Relación entre las raíces y el valor absoluto

Las siguientes propiedades nos ayudan a obtener la raíz principal y serán muy útiles en lo que sigue.

1.- Si $x \in R$, *n* es par y *x > 0* entonces $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

2.- Si $x \in R$ y *n* es impar entonces $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Ejemplos:

Calcular la raíz principal de cada expresión

a) $\sqrt[2]{(3)^2} = |3| = 3$

b) $\sqrt[4]{(6)^4} = |6| = 6$

c) $\sqrt[3]{(6)^3} = 6$

d) $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

e) $\sqrt{x^2} = |x|$

f) $\sqrt{81a^2} = |9a|$ en este ejemplo calculamos la raíz de 81 y la de a^2 y por eso sale el valor absoluto de 9*a*.

g) $\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{(2x)^3} = 2x$ en este ejemplo calculamos la raíz de 81 y la de a^2 y por eso sale el valor absoluto de 9*a*.

h) $\sqrt[4]{256x^4} = \sqrt[4]{(4x)^4} = |4x|$

Actividades de aprendizaje

Escriba la raíz principal de la expresión dada.

a) $\sqrt{16}$

b) $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt{(-4)^2}$

d) $\sqrt[3]{-27x^3}$

e) $\sqrt{64x^8}$

f) $\sqrt{x^4y^2}$

g) $\sqrt[4]{(16x-1)^4}$

Módulo 7

Exponentes racionales

OBJETIVO

Simplificar expresiones algebraicas con exponentes racionales.

Hasta este momento se han utilizado únicamente enteros como exponentes, así que enfrentemos ahora cómo usar otros números racionales como exponentes. Pero antes complete las siguientes igualdades:

$$a)\sqrt{5^4} =$$
$$b)\sqrt{5^2} =$$
$$c)\sqrt{5^6} =$$
$$d)\sqrt{5^{2x}} =$$

Revise sus respuestas:

$$a)\sqrt{5^4} = 5^2 = 25$$
$$b)\sqrt{5^2} = 5$$
$$c)\sqrt{5^6} = 5^3 = 125$$
$$d)\sqrt{5^{2x}} = 5^x$$

Observe ahora esta lista, donde usamos el resultado del inciso d):

$$\begin{gathered} \vdots \\ 5^{-2} = \frac{1}{25} \\ 5^{-1} = \frac{1}{5} \\ 5^0 = 1 \\ 5^1 = 5 \\ 5^2 = 25 \\ \vdots \end{gathered}$$

En esta lista que se le muestra, 5^x es siempre positiva, para todas las sustituciones de *x*. Observe que aquí no se hace necesario el uso de signos de valores absolutos, puesto que $5^x>0$, para todas las sustituciones de *x* con enteros. En efecto, utilizamos el hecho de que:

$$5^x 5^x = 5^{x+x} = 5^{2x}$$

De este mismo modo, $\sqrt{7^{2r}} = 7^r$ y, en general, siguiendo el mismo modelo:

$$\sqrt{5^x} = 5^{\frac{x}{2}}$$

Examinemos más detalladamente esta última expresión. Si hacemos *x=1* se tiene $5^{\frac{1}{2}}$ que por ahora, no tiene significado para nosotros, pero que tomaremos como una definición. Es decir, por ejemplo $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$. En otras palabras, $5^{\frac{1}{2}}$ no es más que otro nombre para la raíz cuadrada principal de *5*. Del mismo modo, $6^{\frac{1}{2}}$ es otro nombre para la raíz cuadrada principal de $\sqrt{6}$.

Complete las siguientes igualdades:

$$a) 9^{\frac{1}{2}} =$$
$$b) 1^{\frac{1}{2}} =$$
$$c) 0^{\frac{1}{2}} =$$
$$d) 400^{\frac{1}{2}} =$$

Revise sus respuestas:

$$a) 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$
$$b) 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$
$$c) 0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$$
$$d) 400^{\frac{1}{2}} = \sqrt{400} = 20$$

Complete las siguientes igualdades:

$4) \sqrt{4^2} =$

$5) \sqrt{(-3)^2} =$

$6) \sqrt{100x^2} =$

$7) \sqrt{4x^6} =$

$8) \sqrt[3]{-8x^3} =$

$9) \sqrt[3]{-125} =$

$10) \sqrt[3]{T^3} =$

SOLUCIONES

$4) \sqrt{4^2} = 4$

$5) \sqrt{(-3)^2} = 3$

$6) \sqrt{100x^2} = |10x|$

$7) \sqrt{4x^6} = |2x^3|$

$8) \sqrt[3]{-8x^3} = -2x$

$9) \sqrt[3]{-125} = -5$

$10) \sqrt[3]{T^3} = T$

En el módulo anterior hemos visto, que $\left(\sqrt[3]{T}\right)^3 = T$. Si se desea representar $\sqrt[3]{T}$ como potencia de *T*, más o menos de la misma manera en que $\sqrt{T}$ puede representarse como potencia de *T*; es decir $T^{\frac{1}{2}}$. La forma es la siguiente: $T^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{T}$, lo cual se puede tomar como una definición de $\sqrt[3]{T}$ en términos de exponentes.

Usando esta conclusión, complete las siguientes igualdades:

$a) \quad 8^{\frac{1}{3}} =$

$b) \quad (-27)^{\frac{1}{3}} =$

$c) \quad (-x^6)^{\frac{1}{3}} =$

Sus respuestas deben ser: a) 2; b) -3; c) -x^2. Basándonos en estos resultados, es razonable esperar que, para toda *T>1*:

$$T^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{T}$$

Usando este resultado, complete las siguientes igualdades:

$a)\ \left(\frac{m^3}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$b)\ \left(\frac{9}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

Si sus respuestas son $a)\ \frac{m}{3};\quad b)\ \left|\frac{2}{x^2}\right|\ o\ \ bien\ \ \frac{2}{x^2}$, perfecto. Observe que ahora nuestro concepto de exponentes ha sido ampliado porque, hasta la discusión anterior no contábamos con un significado para exponentes que no fueran enteros. Complete las siguientes igualdades:

$a)\ 5^{\frac{1}{2}} =$

$b)\ a^{\frac{1}{5}} =$

$c)\ \sqrt{2} =$

$d)\ \sqrt[7]{z} =$

Bien, las soluciones deben ser:

$a)\ 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$b)\ a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$

$c)\ \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$d)\ \sqrt[7]{z} = z^{\frac{1}{7}}$

Hemos definido que $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ para *n=2, 3, 4*,… Exploremos un poco este hecho.

Como los exponentes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...,$ obedecen las propiedades ya conocidas de los exponentes enteros, entonces:

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De igual manera, $x^{-\frac{1}{3}} =$ ____ = ____

Claro que $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ¿Puede verificar que $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$?_________________.

Verifiquémoslo $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$. Si *n=1* en $x^{\frac{1}{n}}$, entonces $x^{\frac{1}{1}} = x^{1} = x$. Si n=-1 en $x^{\frac{1}{n}}$ entonces $x^{\frac{1}{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Si *n* se remplaza por su inversa aditiva (-*n*) en $x^{\frac{1}{n}}$, se obtiene $x^{\frac{1}{-n}} = x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ en donde se ve que para cualquier sustitución de *n* con cualquier entero, que no sea cero, el exponente $\frac{1}{n}$ tiene un significado. Por ejemplo, si n=-3 entonces $8^{\frac{1}{-3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$. Una de las propiedades conocidas de los exponentes enteros, que nosotros ahora tomamos como propiedad racional de exponentes también es:

$$\left(x^{s}\right)^{t} = x^{s\cdot t}$$

Así que, para sustituciones con enteros de *r* y *n*, con n≠0:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{r} = x^{\frac{r}{n}}$$

Pero como $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, entonces $x^{\frac{r}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{r}$.

Teniendo en cuenta que $x^{\frac{r}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{r}$ $9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^{3} = 3^{3} = 27$, así que $4^{\frac{5}{2}} =$ 32.

Porque $4^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^{5} = 2^{5} = 32$

Observe que, como la multiplicación es conmutativa en el conjunto de los números racionales $\frac{r}{n} = \frac{1}{n}\cdot r = r\cdot\frac{1}{n}$. Así pues: $x^{\frac{r}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{r} = \left(x^{r}\right)^{\frac{1}{n}}$. Esto significa que posiblemente hayamos dado dos interpretaciones relacionadas a

$x^{\frac{r}{n}}$ como radical. Es decir que, en tanto definimos $x^{\frac{r}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^r$ podríamos haber definido, con la misma validez $x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{x^r}$. Estas definiciones son equivalentes puesto que $\left(\sqrt[n]{x}\right)^r = \sqrt[n]{x^r}$.

Este resultado, lo usaremos para simplificar radicales, pero antes necesitamos practicar un poco, así que resuelva lo siguiente:

Complete las siguientes expresiones:

1) $27^{\frac{2}{3}} =$

2) $(-8)^{\frac{5}{3}} =$

3) $4^{\frac{3}{2}} =$

4) $9^{\frac{3}{2}} =$

5) $16^{\frac{3}{4}} =$

6) $\sqrt[5]{-32} =$

7) $1^{\frac{1}{5}} =$

8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

9) $(25)^{-\frac{3}{2}} =$

10) $4^{-\frac{3}{2}} =$

11) $27^{-\frac{3}{2}} =$

12) $(-8)^{-\frac{2}{3}} =$

13) $(1000)^{-\frac{2}{3}} =$

14) $\left(\frac{1}{144}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

15) $\left[2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} =$

Las soluciones son

1) 9
2) -32
3) 8
4) 27
5) 8
6) -2
7) 1
8) ½
9) 1/125
10) 1/8
11) 1/9
12) ¼
13) 1/100
14) 12
15) 1

Entonces basándonos en la propiedad $x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{x^r}$ podemos hallar expresiones equivalentes entre coeficientes racionales y las raíces.

Por ejemplo, una expresión equivalente a $\sqrt[5]{x^3}$, usando la propiedad es $x^{\frac{3}{5}}$. O si nos dan una expresión como $x^{\frac{2}{8}}$ entonces una equivalente a ella es $\sqrt[8]{x^2}$

Veamos más ejemplos.

Hallar la expresión equivalente para las siguientes: $\sqrt{a^7}$, $\sqrt[5]{m^2}$, $\sqrt[6]{x^7y^7}$, $\sqrt[2]{(x+y)^3}$, $\sqrt[6]{x^6-y^6}$,

a) $\sqrt{a^7} = a^{\frac{7}{2}}$

b) $\sqrt[5]{m^2} = m^{\frac{2}{5}}$

c) $\sqrt[6]{x^7y^7} = \sqrt[6]{(xy)^7} = a^{\frac{7}{6}}$

d) $\sqrt[2]{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}}$

e) $\sqrt[6]{x^6-y^6} = (x^6-y^6)^{\frac{1}{6}}$

f) $y^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{y^3}$

g) $4y^{\frac{3}{7}} = 4\sqrt[7]{y^3}$

h) $7x^{\frac{2}{9}}y^{\frac{5}{8}} = 7\sqrt[9]{x^2}\sqrt[8]{y^5}$

i) $-5(a+b)^{\frac{4}{3}} = -5\sqrt[3]{(a+b)^4}$

Ahora, para simplificar expresiones algebraicas con exponentes racionales utilizamos las leyes de los exponentes. Por ejemplo:

Para simplificar la expresión $y^{\frac{3}{2}}.y^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{2}{5}}$, debemos solamente aplicar la ley de los exponentes del producto de igual base y sumamos $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{45+10+6}{30}=\frac{61}{30}$.

Así que la expresión simplificada queda así: $y^{\frac{3}{2}}.y^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{2}{5}} = y^{\frac{61}{30}}$.

Otro ejemplo. Simplifiquemos la expresión $(4a^3b^6c)^{\frac{1}{2}}$. Aquí tenemos que aplicar otra ley. Observe:

$$(4a^3b^6c)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}}(a^3)^{\frac{1}{2}}(b^6)^{\frac{1}{2}}(c)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{6}{2}}c^{\frac{1}{2}} = 2b^3\sqrt[2]{a^3c}.$$

Más ejemplos, simplifiquemos las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[5]{\frac{(x-1)^{10}}{(x-1)^5}} = \sqrt[5]{(x-1)^{10-5}} = \sqrt[5]{(x-1)^5} = ((x-1)^5)^{\frac{1}{5}} = (x-1)^{\frac{5}{5}} = (x-1)^1 = x-1$

b) $\sqrt{\sqrt[2]{a^3}} = \left((a^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = (a^3)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

Actividades de aprendizaje

Calcule los valores siguientes

$a)9^{\frac{1}{2}} =$

$b)1^{\frac{1}{2}} =$

$c)0^{\frac{1}{2}} =$

$d)400^{\frac{1}{2}} =$

$a)\quad 8^{\frac{1}{3}} =$

$b)\quad (-27)^{\frac{1}{3}} =$

$c)\quad (-x^6)^{\frac{1}{3}} =$

Obtenga expresiones equivalentes a las siguientes.

a) $\sqrt{a^4}$

b) $\sqrt[5]{m^3}$

c) $\sqrt[6]{x^5 y^5}$

d) $\sqrt[2]{(x+y)^7}$

e) $\sqrt[4]{x^4 - y^4}$

Módulo 8

Simplificación de radicales

OBJETIVO

Simplificar expresiones algebraicas con radicales.

La simplificación de radicales tiene su principal aplicación en las operaciones con radicales. Estas operaciones se refieren a las clásicas en aritmética, como son la suma, la resta, la multiplicación y la división, sin embargo, en este caso empezaremos estudiando la operación de multiplicación.

Veamos algunos métodos para efectuar diversas operaciones con radicales. Para empezar consideremos el proceso de multiplicación de radicales, en la que usaremos el hecho básico:

$$a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

Lo cual, tiene una expresión equivalente en radicales:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Como ejemplo de este principio se puede ver que, por ejemplo $\sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15}$. De igual manera $\sqrt{2x}\sqrt{5y} = \sqrt{10xy}$.

Ahora complete lo siguiente:

$$a)\sqrt{7}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{\square}$$

$$b)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{\square}$$

Las respuestas son:

$$a)\sqrt{7}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{35}$$

$$b)\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{3}$$

A veces se puede simplificar el producto de dos radicales. Por ejemplo:

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{48}$$

Pero $\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = 4\sqrt{3}$, así que:

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{8} = 4\sqrt{3}$$

De acuerdo con esto, $\sqrt{3}\sqrt{15} = 3\sqrt{5}$, porque $\sqrt{3}\sqrt{15} = \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5}$.

Utilizando la propiedad distributiva se pueden resolver las siguientes operaciones, expresando las soluciones de la forma más simple:

$$a)\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)=\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}$$
$$b)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{2}=\sqrt{6}+4$$
$$c)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+5\right)=\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\sqrt{6}-2+5\sqrt{2}$$
$$d)\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{2}=2\sqrt{18}-\sqrt{12}=6\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$
$$e)\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{12}}\right)=\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{12}}=\sqrt{3\cdot\frac{2}{3}}+\sqrt{3\cdot\frac{1}{12}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$$
$$f)\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2=5+3\sqrt{3}$$
$$g)\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=\sqrt{5}\sqrt{5}-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-2=3-\sqrt{5}$$

El hecho básico en que descansa la multiplicación de radicales es que $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, donde, si n es par $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Ahora observe las dos operaciones siguientes y escriba si son verdaderas o falsas:

$$a)\sqrt{5}+\sqrt{4}=\sqrt{9}\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$b)\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{13}\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Por supuesto que son falsas. En lo general $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$, así que ahora debemos aprender cómo hacer sumas y restas de expresiones radicales.

La suma de algunos radicales puede únicamente indicarse porque no es posible efectuarla, como en los casos anteriores. De hecho, la suma sólo es posible si se puede aplicar la propiedad distributiva.

Recuerde que ésta propiedad afirma que $\forall\, x,y,z; x\left(y+z\right)=xy+xz$

Observe que, como la propiedad distributiva no tiene aplicación a la suma $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, esto no puede efectuarse por lo que sólo quedará indicada. En cambio, en la expresión $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}$, si se admite la propiedad distributiva, por lo que:

$$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(3+4\right)=7\cdot\sqrt{2}$$

También, como $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, la suma $\sqrt{2} + \sqrt{50}$ es perfectamente realizable, porque $\sqrt{2} + \sqrt{50} = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Con frecuencia es necesario simplificar uno o más radicales en una suma indicada, para poder determinar si la propiedad distributiva tiene aplicación y la suma se puede efectuar. Por ejemplo, no se ve claro, de un modo inmediato, si la suma $\sqrt{8} + \sqrt{18}$ puede hacerse. Sin embargo al simplificar cada radical:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Del mismo modo, por ejemplo, se puede sumar $\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{81x}$:

$$\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{81x} = \sqrt[3]{8 \cdot 3x} + \sqrt[3]{27 \cdot 3x} = 2\sqrt[3]{3x} + 3\sqrt[3]{3x} = 5\sqrt[3]{3x}$$

De acuerdo con esto $\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{320} = 6\sqrt{5}$, porque:

$$\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{320} = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} + \sqrt{64 \cdot 5} = 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Ahora intentemos la suma $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} =$

Veamos:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} = \sqrt{\frac{2}{4}} + \sqrt{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Ahora, veamos como efectuar divisiones con radicales. Para esto se utiliza el siguiente hecho:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Esto permite que, por ejemplo $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{30}{5}} = \sqrt{6}$.

Observe que todos los radicales comprendidos en la operación son del mismo orden; esto es, que todos tiene el mismo índice n.

El resultado simplificado de $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$ es $\frac{1}{5}\sqrt{10}$ porque

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{6}{15}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$.

Recordemos divisiones como $\frac{2x^2 - 4}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{4}{2} = x^2 - 2$. La división de radicales tiene el mismo patrón. Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

Es posible dividir $\frac{10}{\sqrt{2}}$ al menos de dos maneras: Una depende del hecho de que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Por ejemplo:

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Otra manera depende del hecho de que $\frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$ porque:

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

De igual manera: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Veamos más ejemplos:

$a) \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

$b) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{24}{2}} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

Antes de proceder a ampliar nuestra discusión sobre la división de radicales hacia situaciones más complicadas, es importante hacerte notar que el importante hecho de que $\sqrt{x}$ es un número irracional, siempre que x no sea el cuadrado de un número racional. Recuerda que x no puede ser negativa en este contexto Así se tiene que $\sqrt{\frac{1}{2}};\sqrt{2};\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{3};\sqrt{5};\sqrt{6}$ son números irracionales.

De los siguientes ¿cuáles son irracionales?

$$a)\sqrt{7}$$
$$b)\sqrt{16}$$
$$c)\sqrt{\frac{9}{4}}$$

Cierto, el único irracional está en a) puesto que $\sqrt{16} = 4$ *y* $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Vamos a suponer que se desea hacer la división:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

Aquí, nos gustaría contar con una técnica para expresar este cociente en su forma más simple. Una forma en la que el denominador sea número racional.

Para hacer la división $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, recurriremos al principio $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Así, elegimos un multiplicador, con la idea de encontrar un quebrado equivalente cuyo denominador no contenga radicales. Note que si seleccionamos $\left(\sqrt{3}+1\right)$ como multiplicador para la fracción anterior, el denominador del quebrado equivalente que resulta es:

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = 3-1 = 2$$

Ahora, para efectuar la división $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, multiplicaremos el numerador y el denominador por $\left(\sqrt{3}+1\right)$ para obtener:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \sqrt{3}+1$$

Esta técnica encuentra aplicación en todos los casos parecidos. Por ejemplo, la división $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+4}$ requiere que se multiplique el numerador y el denominador por $\left(\sqrt{3}-4\right)$ porque $\left(\sqrt{3}-4\right)\left(\sqrt{3}+4\right)=$ -13.

Ya que $\boxed{\left(\sqrt{3}-4\right)\left(\sqrt{3}+4\right)=}$ 3-16=-13. A los factores $\left(\sqrt{3}-4\right)$ y $\left(\sqrt{3}+4\right)$ se les llama conjugados.

Por ejemplo, el conjugado de $\left(\sqrt{7}-3\right)$ es $\left(\sqrt{7}+3\right)$ ¿Cuál es el conjugado de $\left(\sqrt{7}-3\right)$? El conjugado de $\left(\sqrt{7}-3\right)$ es $\left(\sqrt{7}+3\right)$. En general $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ y $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ son conjugados entre sí. El producto de estos conjugados es:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$$

Efectúe la división $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$. La solución es $9+4\sqrt{5}$ porque:

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{5+4\sqrt{5}+4}{5-4}=9+4\sqrt{5}$$

Actividades de aprendizaje

Resuelva las siguientes operaciones con radicales:

1) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=$

2) $\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{2}=$

3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=$

4) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=$

5) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=$

6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$

7) $\sqrt{12}+\sqrt{27}=$

8) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=$

9) $\frac{3}{4-\sqrt{15}}=$

10) $\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+3}=$

SOLUCIONES

1) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

2) $\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

4) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=2$

5) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=x-y$

6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1$

7) $\sqrt{12}+\sqrt{27}=5\sqrt{3}$

8) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=\sqrt{5}$

9) $\frac{3}{4-\sqrt{15}}=3\left(4+\sqrt{15}\right)$

10) $\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

UNIDAD VII
APLICACIONES

Módulo 9
Lenguaje algebraico

OBJETIVO

Traducirá al lenguaje matemático expresiones del español y lo utilizará para reescribir problemas.

En álgebra, es muy común traducir de nuestro idioma al lenguaje algebraico. Por ejemplo, para designar:

Un número cualquiera usamos: x

La suma de dos números usamos: $x + y$

El producto de tres números usamos: $(x)(y)(z)$ ó $x \cdot y \cdot z$

El cociente de dos números usamos: $\frac{x}{y}$

El cuadrado de un número usamos: x^2

El doble del cuadrado de un número usamos: $2\,x^2$

La suma de los cuadrados de dos números usamos: $x^2 + y^2$

La mitad del cubo de un número usamos: $\frac{x^3}{2}$

La diferencia de dos números usamos: $x - y$.

Observa que en todos los casos la traducción al álgebra queda representada por una combinación de letras, números y signos. A esta combinación se le llama ***Expresión Algebraica***.

Otros ejemplos de expresiones algebraicas son los siguientes:

a) $x^2 + 3xy$

c) $4\,x^5$

b) $2a + 3b - 3c$

d) $5\,x^2 + 6xy + 7x - 8y$

Un número o una letra, o varios números y letras combinados entre sí mediante las operaciones de multiplicación o de división, o de ambas recibe el nombre de ***Término.***

Algunos ejemplos de términos son: -8, 4x, 5xy, -7 x^5, 8 x^4zy.

Si se tiene un grupo de letras y números separados por signos mas (+) o menos (-) entonces se puede descomponer en términos. Por ejemplo: la expresión 35 a^2 b -2ª + 4c^2 se puede descomponer en los términos:

35 a^2b, -2ª y 4c^2.

Si un término está compuesto de un número y uno o más letras, el número recibe el nombre de ***coeficiente.***

Por ejemplo: en 3a^2 b, 3 es el coeficiente de a^2 b.

Desde el punto de vista puramente matemático el **Lenguaje algebraico** es la generalización del **lenguaje aritmético**; es decir, que cuando en una operación aritmética particular cambiamos algunos números básicos por letras, generalizamos a la operación por que los valores de las letras pueden ser cualquier número real y entonces se dice que estamos empleando un Lenguaje algebraico.

Ejemplos Ilustrativos:

Operación Aritmética Particular	Operación Algebraica General
1.- De $5 + 3 = 8$	$a + b = c$
2.- De $6^2 = 36$	$x^2 = y$
3.- De $2(4)^3 = 128$	$2x^3 = y$
4.- De $\frac{3+5}{2} = 4$	$\frac{a+b}{2} = c$
5.- De $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$	$\sqrt{x^2 - a^2} = y$

Lenguaje Común	Lenguaje Algebraico
1.- El doble de un número	2b, 2c,..., 2x, 2y, 2z
2.- El cuadrado de un número	a^2, b^2, c^2..., x^2, y^2, z^2
3.- El triple de un número	3b, 3c..., 3x, 3y, 3z
4.- El cubo de un número	a^3, b^3, c^3..., x^3, y^3, z^3
5.- El doble del cubo de un número menos el triple de otro número al cuadrado	$2b^3-3c^2$..., $2x^3-3y^2$

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Común
1.- $3a^2$	El triple de un número al cuadrado
2.- $\frac{b+c}{2}$	La mitad de la suma de dos números
3.- $(m-n)^3$	La diferencia de dos números al cubo
4.- $\frac{r\cdot s}{p}$	El producto de dos números dividido entre otro número cualquiera
5.- $\sqrt{x^2+y^2}$	La raíz cuadrada de la suma de dos números cualquiera elevados cada uno de ellos al cuadrado

Operación Algebraica General	Operación Aritmética Particular
1.- $\frac{a+b}{c}$ Si $a=3, b=5$ y $c=2$	$\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$
2.- $(m+n)^2$ Si $m=6$ y $n=4$	$(6+4)^2=(10)^2=100$
3.- $\sqrt{x^2-y^2}$ Si $x=5$ y $y=3$	$\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$
4.- $3x$ Si $x=2$	$3(2)=6$
5.- $2y^3$ Si $y=5$	$2(5)^3=2(125)=250$

Como puede observarse en los ejemplos ilustrativos se puede traducir de un lenguaje a otro sin ninguna dificultad, permitiéndonos de esta manera pasar de lo particular a la general y de la general a la particular, que en matemáticas resulta ser una habilidad necesaria para resolver problemas mediante el planteamiento de modelos matemáticos y su aplicación para casos específicos.

Actividad de aprendizaje

Traduce de nuestro idioma al lenguaje algebraico:

a) El producto de dos números __________________________________

b) El doble de un número __________________________________

c) El cuádruplo de un número __________________________________

d) Un número aumentado en 5 __________________________________

e) El doble de la suma de dos números __________________________________

Módulo 10
Solución de ecuaciones

OBJETIVO

Resolverá ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Una proposición del tipo: $3x - 6 = 2x + 1$ se llama ***ecuación.*** La ecuación se caracteriza por contener algunos números de valor conocido y otros de valor desconocido. Unos y otros se relacionan entre sí de acuerdo con los signos de las operaciones matemáticas. Dicho de otro modo, una ***ecuación*** es una ***igualdad*** entre expresiones algebraicas.

Todos nosotros hemos tenido contacto con las ecuaciones desde la primaria sin saberlo. Sólo basta recordar que en los libros de matemáticas de la primaria había preguntas como "Escribe en el cuadrito el número que falta:
$3 + \square = 5$ ". Así que el número que poníamos dentro del cuadrito era el 2 para que lográramos la igualdad. O este otro:

$$2 - \square = \square$$

donde el número que hace verdadera la igualdad es el 1. Los valores que hacen verdadera una ecuación o igualdad se llaman ***soluciones de la ecuación.***

Si ahora en lugar de escribir el cuadrito en el primer ejercicio usamos una "x", la igualdad quedaría así $3 + x = 5$ y la solución de la ecuación es $x = 2$. En el caso del segundo ejercicio si en lugar del cuadrito escribimos también "x" la igualdad queda así: $2 – x = x$ y la solución es $x = 1$.

Por lo tanto, como hemos visto, ya sabíamos resolver ecuaciones desde la primaria, lo que pasa es que ahora, en lugar del cuadrito vamos a usar letras. Y la intención de resolver ecuaciones va a ser encontrar las soluciones, es decir los valores que hacen verdadera la igualdad.

Son ecuaciones con ***una variable*** cuando aparece una sola letra (incógnita, normalmente la x).

Por ejemplo: $x^2 + 1 = x + 4$

Se dice que son de ***primer grado*** cuando dicha letra no está elevada a ninguna potencia (por lo tanto se supone que está elevada a la 1).

Ejemplos:

$3x + 1 = x - 2$

$1 - 3x = 2x - 9$

$x - 3 = 2 + x$

$\frac{x}{2} = 1 - x + 3\frac{x}{2}$

En cualquier ecuación, la parte que aparece a la izquierda del signo de igual se le conoce como ***miembro izquierdo de la ecuación*** y, el que aparece a la derecha del signo de igual, se le llama ***miembro derecho de la ecuación***.

Para algunas ecuaciones de primer grado en una variable, es fácil encontrar sus soluciones. A veces esta solución se ve con una simple inspección. Por ejemplo, la solución de *x+3 = 5* es 2, porque *2* sumado a tres es cinco, pero esto no es frecuente, así que lo aconsejable al resolver ecuaciones, es ser sistemático. Por ejemplo, en la ecuación $\frac{2}{3}x + 7 = -9$ es difícil encontrar la solución con una simple inspección. Así que mejor desarrollemos algunos procedimientos para encontrar las soluciones de este tipo de ecuaciones.

Por inspección la solución de *3 x = 6* es *x = 2*, por lo tanto el conjunto solución es {2}.

El procedimiento que se sigue para hallar el conjunto solución de una ecuación, consiste en buscar su ecuación equivalente, cuyas raíces se pueden ver por inspección. Para esto, usamos la propiedad aditiva, la cual dice que:

$$\textbf{Si } a = b \textbf{ entonces } a + c = b + c.$$

Esto puede expresarse como "*si el mismo número c, se suma a números iguales, a y b, las sumas que resultan son iguales*". Por lo tanto, si existe un sustituto para *x* de manera que, por ejemplo, *x+2=5* es verdadera, se puede sumar (-2) a cada miembro de esta ecuación, entonces las sumas son iguales. Es decir: *x*+2+ *(-2)* = *5* + *(-2)* también es verdadera para cualquier sustituto de *x*, luego entonces *x*=*3*.

Una pequeña reflexión permitirá convencernos de que, si se suma el mismo número a cada miembro de una ecuación, la ecuación resultante será siempre equivalente a la ecuación dada. Así para resolver x+7=10, usamos la propiedad aditiva. Sumamos en ambos miembros -7, es decir el inverso aditivo de 7:

$$\begin{aligned} &x + 7 = 10 \\ &x + 7 + (-7) = 10 + (-7) \\ &x = 3 \end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo: resolver x – 5 = – 3. Entonces sumamos +5 (que es el inverso aditivo de -5) en ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} &x - 5 = -3 \\ &x - 5 + 5 = -3 + 5 \\ &x = 2 \end{aligned}$$

Analicemos con más cuidado lo que estamos haciendo para ver si descubrimos una forma eficiente de proceder. Para esto, resolvamos la ecuación *x*+*4*=*7*. Un primer paso sería sumar (-4) a ambos miembros de la ecuación ya que:

$$4 + (-4) = 0$$

Es decir el inverso aditivo de 4 y así cuando se suma (-4) a cada miembro de $x+4=7$, el lado izquierdo se vuelve x, mientras que el de la derecha se hace $7+(-4)=3$. Luego, {3} es el conjunto solución de $x+4=7$, porque $x=3$ es el único valor que la hace verdadera.

Otros ejemplo más: Resolver la ecuación: 8 = – 4 + x.
La solución se encuentra del siguiente modo:

$$8 = -4 + x$$
$$4 + 8 = -4 + x + 4$$
$$12 = x$$

o bien, $x=12$

Resolver la ecuación: – 2 + x = – 5. La solución se encuentra del siguiente modo, sumando el inverso aditivo de -2:

$$-2 + x = -5$$
$$-2 + 2 + x = -5 + 2$$
$$x = -3$$

Actividad de aprendizaje

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) x + 8 = 6
b) x - 3 = - 5
c) 2 = - 3 +x
d) – 4 + x = 0

Veamos ahora algunas ecuaciones de un estilo diferente a las que hemos venido resolviendo. Por ejemplo, consideremos la ecuación $\frac{1}{2}x = 3$. Esta ecuación se puede resolver por inspección, es decir $x=6$, sin duda, porque $\frac{1}{2}x = 3$ se hace verdadera si x se sustituye por 6. Es decir $\frac{1}{2}(6) = 3$. Otra ecuación del mismo estilo es: $\frac{1}{4}x = 2$. La cual, por inspección tenemos que el valor de *x* es *8*, porque $\frac{1}{4}x = 2$ es verdadera si *x*= *8*. Sin embargo, la ecuación $\frac{2}{3}x = 8$ no es tan fácil de resolver por inspección, y más difícil aún, es encontrar la solución de la ecuación $\frac{2}{9}x = \frac{1}{7}$, por lo que es claro que es necesaria una estrategia para encontrar soluciones a ecuaciones de este estilo.

Una manera útil de hacerlo es usando la propiedad multiplicativa de la igualdad:

Si $a = b$

entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Que en español esto dice: "*Si números iguales se multiplican por un mismo número, los productos son iguales*". De aquí que, si suponemos que hay una sustitución para *x* de manera que, por ejemplo, $\boxed{\frac{1}{2}x = 3}$ es verdadera y si se multiplica cada miembro de esta ecuación por 2 (que es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$), se puede afirmar que los productos son iguales. Es decir:

$$2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 \cdot 3$$

De este modo, como $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1$ y $2 \cdot 3 = 6$, se tiene que $x = 6$, por lo que $\boxed{\frac{1}{2}x = 3}$ tiene como conjunto solución a {6}. Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación $\frac{1}{5}x = -2$.

Multiplicando en ambos miembros por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{5}$, es decir por 5, tenemos que:

$$\frac{1}{5}x = -2$$
$$5\left(\frac{1}{5}x\right) = 5\cdot(-2)$$
$$x = -10$$

Así que la solución de la ecuación es x= – 10 y ya terminamos.

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación $\frac{1}{8}x = \frac{2}{3}$.

Para encontrar el conjunto solución de esta ecuación vale la pena, primero, multiplicar cada miembro de la ecuación 8. Se multiplica por 8 (el inverso multiplicativo de $\frac{1}{8}$ para que el miembro que tiene la x tenga como coeficiente al 1 ya que $8\left(\frac{1}{8}\right) = 1$. De este modo:

$$8\left(\frac{1}{8}x\right) = 8\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$x = \frac{16}{3}$$
$$\text{conjunto solución}\left\{\frac{16}{3}\right\}$$

Ejemplo 3.

Apliquemos la misma técnica para encontrar la solución de $\frac{3}{5}x = 2$:

Conviene ahora, multiplicar ambos miembros por 5/3 (el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$, ya que $\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = 1$. Así se tiene que:

$$\boxed{\frac{3}{5}x = 2};$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5}x\right) = \left(\frac{5}{3}\right)2;$$

$$x = \frac{10}{3}.$$

Así que el conjunto solución es $\left\{\frac{10}{3}\right\}$.

Ejemplo 4.

Resolvamos la ecuación $\frac{1}{2}y + 3 = 12$. Para esto primero, se puede sumar (-3) a ambos miembros de la ecuación con la finalidad de ir despejando la incógnita:

$$\frac{1}{2}y + 3 + (-3) = 12 + (-3).$$

Y nos queda

$$\frac{1}{2}y = 9,$$

por lo que ya podemos multiplicar ambos miembros por *2*, para obtener:

$$2\left(\frac{1}{2}y\right) = 2 \cdot 9.$$

Luego, *y = 18* y como conjunto solución es {18}.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $\frac{1}{2}y - 6 = \frac{2}{3}$

Como se ve, tenemos una expresión con denominadores, aquí lo aconsejable es primero intentar quitarlos de manera que tengamos una ecuación equivalente. Una forma fácil de hacerlo es usando el mínimo común múltiplo de los denominadores, en este caso el MCM del 2 y del 3 es el 6 y una vez que sabemos el MCM lo multiplicamos en ambos miembros de la ecuación:

$$(6)\left(\frac{1}{2}y - 6\right) = \left(\frac{2}{3}\right)(6)$$

Usando la propiedad distributiva tenemos:

$$(6)\left(\frac{1}{2}y\right) - (6)(6) = \left(\frac{2}{3}\right)(6)$$

Y luego hacemos las operaciones:

$$\frac{6}{2}y - 36 = \frac{12}{3}$$

$$3y - 36 = 4$$

Ahora, ya está fácil resolver esta ecuación pues se hace como antes, usando los inversos aditivos y multiplicativos:

$$3y - 36 + 36 = 4 + 36$$

$$3y = 40$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3y) = 40\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$y = \frac{40}{3}$$

Así la solución de la ecuación es $y = \frac{40}{3}$.

Hay otra forma de resolver esta misma ecuación: $\frac{1}{2}y - 6 = \frac{2}{3}$

Podemos empezar despejando la y, y para que no usemos el MCM usamos los inversos aditivos y multiplicativos:

$$\frac{1}{2}y - 6 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}y - 6 + 6 = \frac{2}{3} + 6$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{2}{3} + \frac{6}{1} = \frac{2 + 18}{3} = \frac{20}{3}$$

O sea,

$$\frac{1}{2}y = \frac{20}{3}$$

Luego,

$$(2)\left(\frac{1}{2}y\right) = \left(\frac{20}{3}\right)(2)$$

$$y = \frac{40}{3}$$

Por lo tanto tenemos la misma solución que haciéndola usando el MCM. El método que se quiera seguir es al gusto.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación $\frac{3y-7}{3}=\frac{7}{4}$

En este tipo de ecuaciones es más fácil hacer el truco siguiente (claro, es un truco válido en matemáticas):

Como lo recomendable es quitar siempre (claro si se puede) los denominadores de la igualdad, luego el truco consiste en fijarnos en el denominador del miembro izquierdo, que en este caso es el 3 y multiplicarlo por el numerador de lo que se tiene en el miembro derecho y a su vez, fijarnos en el denominador del lado derecho, que en este caso es el 4 y multiplicarlo por el numerador del miembro izquierdo, así:

$$\frac{3y-7}{3}=\frac{7}{4}$$

$$(4)(3y-7)=(7)(3)$$

$$(4)(3y)-(4)(7)=21$$

$$12y-28=21$$

$$12y-28+28=21+28$$

$$12y=49$$

$$\left(\frac{1}{12}\right)(12y)=49\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$y=\frac{49}{12}$$

Y ya.

Actividad de aprendizaje

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{3}{2}x=4$

b) $\frac{4}{6}x=\frac{1}{7}$

c) $\frac{4}{7}x = -5$

d) $\frac{5}{2}y = \frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{2}y + 5 = 3$

f) $\frac{2}{3}y - 7 = \frac{3}{5}$

g) $\frac{5y+2}{6} = \frac{7}{5}$

Hasta ahora hemos considerado ecuaciones donde la variable solamente se encuentra en uno de los dos miembros. Pero también las hay donde la variable se encuentra en ambos miembros al mismo tiempo.

Ejemplo 1:

$$3x + 1 = x - 2$$

En este caso, no es tan fácil encontrar la solución solamente por inspección pues podemos empezar probando con valores:

Si x = 1 entonces al sustituirlo en la ecuación tendríamos: 3 (1) + 1 = 1 – 2, o sea 3 +1 = -1 y finalmente llegaríamos a que 4 = -1, lo cual es imposible.

Si x = -1 entonces al sustituirlo en la ecuación tendríamos: 3 (-1) + 1 = -1 – 2, o sea -3 +1 = -3 y finalmente llegaríamos a que -2 = -3, lo cual también es imposible.

Resolvámosla entonces para hallar el valor de x buscado. De hecho solo basta con hacer unos pocos pasos de más con respecto a las anteriores

Para resolver una ecuación de primer grado se utilizan dos reglas fundamentales para conseguir dejar la "x" sola en el primer miembro. El chiste primero es dejar en un miembro las x y en el otro miembro lo que no tiene a la x.

Veámoslas para el ejemplo:

$$3x + 1 = x - 2$$

Sumar o restar a los dos miembros un mismo número (el inverso aditivo del 1):

$$3x + 1 - 1 = x - 2 - 1$$

aquí primero restamos 1 en ambos miembros de la ecuación (para que se anulen los 1) y al hacer las operaciones queda:

$$3x = x - 3$$

Después, restamos x en ambos miembros (el inverso aditivo de x) para que en el miembro derecho se anulen las x:

$$3x - x = x - 3 - x$$

y queda

$$2x = -3$$

Ahora sólo basta quitarle el 2 a la x, así que necesitamos multiplicar a 2 por $\frac{1}{2}$ (que es el inverso multiplicativo del 2) para que obtengamos el 1 en el miembro izquierdo.

$$\left(\frac{1}{2}\right) 2x = -3\left(\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente tenemos que la solución es:

$$x = \frac{-3}{2}$$

y ya resolvimos la ecuación.

Ejemplo 2: resolver la ecuación

$$6x - 7 = 2x + 1$$

Sumamos 7 en ambos miembros queda para que nos queden las x solas en el miembro izquierdo:

$$6x - 7 + 7 = 2x + 1 + 7$$

$$6x = 2x + 8$$

Ahora restamos 2 x en ambos miembros para que en el primer miembro nos queden juntas las x y en el segundo miembro nos queden solo números sin variables:

$$6x - 2x = 2x + 8 - 2x$$

$$4x = 8$$

Finalmente, multiplicamos en ambos miembros por $\frac{1}{4}$ para que en el miembro derecho el coeficiente de la x sea 1.

$$\left(\frac{1}{4}\right)4x = 8\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{8}{4} = 2$$

Por lo tanto, la solución es x = 2.

Lo fabuloso de resolver una ecuación es que podemos comprobar si la solución es correcta o no. Para comprobarla se sustituye x por 2 en la ecuación y se calcula el valor de cada miembro. Si los dos valores así obtenidos son iguales, la solución es correcta. A continuación mostramos una ordenación adecuada para la comprobación:

Miembro de la izquierda: 6 (2) – 7 = 12 – 7 = 5

Miembro de la derecha: 2 (2) +1 = 4 +1 = 5.

Por lo tanto x = 2 es el valor correcto.

Ejemplo 3: resolver la ecuación

$$3(x - 1) = 4 - 2(x+1)$$

La diferencia de esta ecuación respecto de la del ejemplo anterior es que solamente tenemos que hacer un paso de más, el cual consiste en que se tienen que quitar los paréntesis usando la propiedad distributiva y entonces queda así:

$$3x - 3 = 4 - 2x - 2$$

Luego se continúa como en el ejemplo anterior:

$$3x - 3 = 2 - 2x$$

$$3x - 3 + 3 = 2 - 2x + 3$$

$$3x = -2x + 5$$

$$3x + 2x = -2x + 5 + 2x$$

$$5x = 5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)5x = 5\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$x = 1.$$

Ejemplo 4: resolver la ecuación

$$\frac{x-2}{3} - \frac{x+3}{2} = \frac{5(1-2x)}{6}$$

Para empezar, en este tipo de ecuaciones donde hay suma o resta de fracciones, se sugiere primero efectuar la operación:

$$\frac{2(x-2)-3(x+3)}{6}=\frac{5(1-2x)}{6}$$

Así que en ambos miembros multiplicamos por 6 para poder quitar los denominadores;

$$(6)\left(\frac{2(x-2)-3(x+3)}{6}\right)=\left(\frac{5(1-2x)}{6}\right)(6)$$

Y queda:

$$2(x-2)-3(x+3)=5(1-2x)$$

Ahora, ya estamos como en el ejemplo anterior, entonces seguimos resolviendo la ecuación. Usando la propiedad distributiva quitamos los paréntesis:

$$2x-4-3x-9=5-10x$$

Y procedemos como en los ejemplos anteriores:

$$-x-13=5-10x$$

$$-x-13+10x=5-10x+10x$$

$$-13+9x+13=5+13$$

$$9x=18$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)(9x)=(18)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$x=2$$

Y ya!

Para ver más ejemplos consulta la página:

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-222.html

Actividad de aprendizaje

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $-5 = 2x + 1$
2. $\frac{1}{7}y = 5$
3. $\frac{2}{5}z + 4 = 6$
4. $\frac{1}{3}m = \frac{1}{3}$
5. $\frac{2}{3}t + 6 = 10$
6. $\frac{1}{4}r + (-2) = 4$
7. $\frac{7}{8}x = -14$
8. $2t + 3 = 7$
9. $\frac{1}{3}m + 4 = 13$
10. $\frac{x}{2} + 3 = 12$
11. $1 - 3x = 2x - 9$
12. $4x + 5 = 2x - 1$
13. $2(4x - 5) = -4(x - 2)$
14. $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-2}{4} = -\frac{11}{12}$

Módulo 11

Desigualdades y ecuaciones fraccionarias

OBJETIVO.- Resolverá desigualdades y graficará su conjunto solución. Resolverá ecuaciones fraccionarias

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

Recordemos primero las propiedades de las desigualdades:

Definiciones:

a y b pertenecen a los reales

♣ a es mayor que b, $(a > b)$, si $a - b$ es positivo

♣ a es menor que b, $(a < b)$, si $a - b$ es negativo

Ley de la tricotomía:

"Para cada par de números reales *a* y *b*, es verdadera una, y solamente una, de las proposiciones:

$a < b \qquad a = b \qquad a > b$

Propiedades de las desigualdades	
Teorema1-Propiedad transitiva: $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}$; si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$	**Teorema2**-Suma: $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}$; si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
Ejemplo ilustrativo: Como $7 > 3$ y $3 > 1$, se sigue que $7 > 1$	Ejemplo ilustrativo: Si $7 > 6$, se sigue que $7 + 5 > 6 + 5 \Leftrightarrow 12 > 11$

Teorema3-Multiplicación por un número positivo: si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ Ejemplo ilustrativo: Si $9 > 6$, se sigue que $9 \times 2 > 6 \times 2 \Leftrightarrow 18 > 12$	**Teorema4:** $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$; si $a > b$ y $c > d$, entonces $(a + c) > (b + d)$ Ejemplo ilustrativo: De $3 > -3$ y $-2 > -4$ se sigue que $(3 + (-2)) > (-3 + (-4)) \Leftrightarrow 1 > -7$
Los Teoremas 1 a 4 también son válidos si se cambia "**>**" por "**<**"	
Teorema5: $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ si, y solamente si, $-a < 0$	**Teorema6:** $\{a, b\} \in \mathbb{R}$ $a > b$ si, y solamente si, $-a < -b$ *"Si se cambia el signo de ambos miembros de una desigualdad, se cambia el sentido de la desigualdad".*
Teorema7: Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$	**Teorema8:** Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$
Teorema9: $a > 0$ si, y solamente si, $\frac{1}{a} > 0$	**Teorema10:** Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
Teorema11: Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ | Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	

Una inecuación es una desigualdad en la que aparece una incógnita. Si el grado de la inecuación es uno, se dice que la inecuación es lineal. Resolver una inecuación es encontrar los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad. La solución de una inecuación es, por lo general, un intervalo o una unión de intervalos de números reales. El método para resolver una inecuación es similar al utilizado para resolver ecuaciones, pero teniendo presente las propiedades de las desigualdades. Es conveniente ilustrar la solución de una inecuación con una gráfica. Si la solución incluye algún extremo del intervalo, en la gráfica representamos dicho extremo con un círculo en negrita; en cambio, si la solución no incluye el extremo, lo representamos mediante un círculo blanco (transparente).

Ejemplo ilustrativo 1:

Resolver la siguiente inecuación: $3x-5>x+7$

Solución:

$3x-5>x+7 \Leftrightarrow 3x-x>7+5$ {transponiendo o aplicando el Teorema2},

$\Rightarrow \quad 2x>12$ {reduciendo};

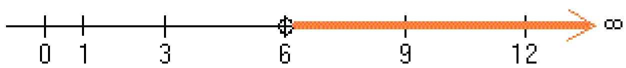
$\therefore \quad x>6$

{dividiendo ambos miembros de la desigualdad por 6, o aplicando el Teorema10}.

$S=\{x \mid x>6\}$

En notación de intervalos, la solución es $x \in (6,\infty)$: todos los valores reales mayores que 6.

La representación gráfica de la solución es:



Inecuaciones lineales que comprenden valores absolutos:

Inecuaciones de la forma $|x|>a,\ a>0$: $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ ó $x<-a$

Inecuaciones de la forma $|x|<a,\ a>0$: $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3 resuelva las inecuaciones propuestas y de la solución en tres formas diferentes: desigualdades, intervalos, gráfica.

1. $-3x+4<2x-6$	**2.** $|x-1|<5$	**3.** $|2x+7|\geq 9$

S o l u c i o n e s

1. $-3x+4<2x-6$

Solución:

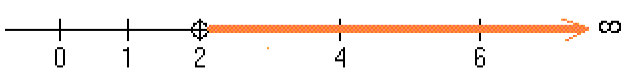
$-3x+4<2x-6 \Leftrightarrow -3x-2x<-6-4$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -5x<-10$ {reduciendo};

$\therefore \quad x>2$

{dividiendo ambos mimbros de la inecuación por -5, se cambia el sentido de la desigualdad}

$S=\{x \mid x>2\}$, $x\in(2,\infty)$, la representación gráfica de la solución es:



2. $|x-1|<5$

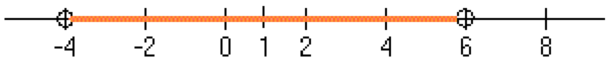
Solución:

$|x-1|<5 \Leftrightarrow -5<x-1<5$ {propiedad de inecuación con valor absoluto},

$\Rightarrow$ $-5+1<x-1+1<5+1$ {sumando 1 en cada *miembro* de la desigualdad};

$\therefore$ $-4<x<6$ {reduciendo}

$S=\{x \mid -4<x<6\}$, $x \in (-4,6)$, la representación gráfica de la solución es:



3. $|2x+7| \geq 9$

Solución:

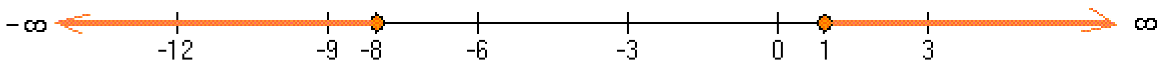
$|2x+7| \geq 9 \Leftrightarrow 2x+7 \geq 9$ ó $(2x+7) \leq -9$

{propiedad de inecuación con valor absoluto},

$\Rightarrow$ $2x \geq 2$ ó $2x \leq -16$ {restando 7 en ambos miembros de las dos inecuaciones},

$\Rightarrow$ $x \geq 1$ ó $x \leq -8$ {reduciendo}

$S=\{x \mid x \geq 1$ ó $x \leq -8\}$, $x \in [1,\infty) \cup (\infty,-8]$, la representación gráfica de la solución es:



ECUACIONES FRACCIONARIAS

Ejemplo: resolver la ecuación

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x+3}{2}=\frac{5(1-2x)}{6}$$

Para empezar, en este tipo de ecuaciones donde hay suma o resta de fracciones, se sugiere primero efectuar la operación:

$$\frac{2(x-2)-3(x+3)}{6}=\frac{5(1-2x)}{6}$$

Así que en ambos miembros multiplicamos por 6 para poder quitar los denominadores;

$$(6)\left(\frac{2(x-2)-3(x+3)}{6}\right)=\left(\frac{5(1-2x)}{6}\right)(6)$$

Y queda:

$$2(x-2)-3(x+3)=5(1-2x)$$

Ahora, ya estamos como en el ejemplo anterior, entonces seguimos resolviendo la ecuación. Usando la propiedad distributiva quitamos los paréntesis:

$$2x-4-3x-9=5-10x$$

Y procedemos como en los ejemplos anteriores:

$$-x-13=5-10x$$

$$-x-13+10x=5-10x+10x$$

$$-13+9x+13=5+13$$

$$9x=18$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)(9x)=(18)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$x=2$$

Y ya!

Para ver más ejemplos consulta la página:

http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-222.html

Actividad de aprendizaje

Resuelve.

1. $x + 7 > 9$
2. $2x + 3 \leq x + 6$
3. $-6x + 7 \geq x + 9$
4. $-6x \leq -72$
5. $\frac{1}{3}x - 9 > \frac{2}{3}x + 6$
6. $-6x + 9 < -2x + 8$
7. $-2x + 8 \neq 12$
8. $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-2}{4} = -\frac{11}{12}$
9. $\frac{1}{2x+3} - \frac{3}{4x-2} = -\frac{1}{2}$

Módulo 12

Problemas de planteo

OBJETIVO

Plantear y resolver problemas de aplicación.

Generalmente, un problema contiene una o varias incógnitas que nos interesa conocer o calcular. Esto conlleva de manera natural a que, ningún problema se pueda resolver, si no se sabe qué se busca o se desea calcular.

De aquí que, como disciplina para resolver problemas se deberá:

a) Precisar qué es lo que se busca o se desea calcular.
b) Elegir una simbología algebraica adecuada para representar las incógnitas y datos que intervienen en el problema.

Veamos cómo se aplican estos sencillos principios en la solución de problemas.

Ejemplo 1.

Supongamos que se desean encontrar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48 ¿Cuántas incógnitas tiene este problema?______________.

Naturalmente que hay tres incógnitas porque, si *x, y, z* son los números buscados, entonces $x+y+z=48$. Sin embargo, si leemos con cuidado el problema y llamamos *n* al primero de los números que buscamos ¿Cómo simbolizamos al siguiente número?____________.

Si *n* es el primero de los números que buscamos, como el siguiente es un entero consecutivo, éste será $n+1$, luego entonces ¿Cuál será el siguiente?___ __________.

El siguiente es *n+2*, por supuesto. De este modo, *n, n+1 y n+2* representan tres números enteros consecutivos, donde la única incógnita es *n*. Esto facilita la solución del problema y muestra la importancia de elegir una simbología adecuada. De este modo, como la suma debe ser igual a *48,* tenemos que:

$$n + (n+1) + (n+2) = 48$$

Esta es una ecuación de primer grado con una incógnita, cuya solución es:

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= 48 \\ n + n + 1 + n + 2 &= 48 \\ 3n + 3 &= 48 \\ 3n &= 45 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Si *n=15*, representa al primero de los tres números consecutivos ¿Cuáles son los valores de los dos números enteros siguientes?

Por supuesto que son los números *16* y *17*. Luego, los números enteros consecutivos buscados son 15, 16 y 17. Para saber que estos números son los que buscamos, los sumamos:

$$15+16+17=48$$

De esta forma verificamos que la solución es la correcta.

Ejemplo 2. Al nacer, María y Margarita (las gemelas López) pesaron juntas 35 onzas. Margarita pesó 3 onzas más que maría. ¿Cuánto pesó cada una?

En este ejemplo detectamos, según la pregunta, que la incógnita es el peso de cada una. Así que podemos empezar con darle una letra a la incógnita. Digamos que el peso (en onzas) de María es "p". Como Margarita pesó 3 onzas más que María, ya no necesitamos otra incógnita pues ahora el peso de Margarita lo podemos expresar así: p + 3.

Ahora, retomando el problema, el hecho de que entre las dos pesaron 35 onzas lo expresamos así:

$$p + (p + 3) = 35$$

Así que ya tenemos el problema en lenguaje algebraico. Pero aún más, tenemos una ecuación de primer grado que ya sabemos resolver:

$$p + (p + 3) = 35$$

$$2p + 3 = 35$$

$$2p + 3 - 3 = 35 - 3$$

$$2p = 32$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2p) = 32\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$p = 16$$

La solución a la ecuación planteada es p = 16; es decir, que el peso de María fue de 16 onzas y por tanto el peso de Margarita fue de 16 + 3 = 19. Finalmente tenemos el problema resuelto correctamente, ya que 16 + 19 = 35.

Ejemplo 3.

Doce menos 3 veces un número es lo mismo que el número incrementado por 4. ¿De qué número se trata?

En este caso la incógnita es un número al cual le podemos llamar “x”. Luego traduciendo el problema al lenguaje algebraico tenemos que:

$$12 - 3x = x + 4$$

Y otra vez tenemos una ecuación de primer grado con una incógnita que ya podemos resolver:

$$12 - 3x = x + 4$$

$$12 - 3x - x = x + 4 - x$$

$$12 - 4x = 4$$

$$12 - 4x - 12 = 4 - 12$$

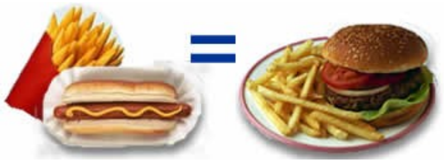
$$-4x = -8$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) = -8\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{8}{4} = 2$$

Por lo que el número buscado es 2 y que fácilmente se puede verificar.

Ejemplo 4. ¿Cómo es tu dieta?



¿Has comido en un restaurante de comida rápida recientemente? Si comes una hamburguesa con queso y papas a la francesa, consumes 1070 calorías. De hecho, las papas contienen 30 calorías más que la hamburguesa con queso. ¿Cuántas calorías hay en cada plato?

Como se pide hallar la cantidad de calorías en la hamburguesa con queso y en las papas a la francesa, hagamos que “c” represente las calorías en la hamburguesa. Esto hace que las calorías en las papas se representen por “c + 30”; es decir, 30 calorías de más.

Ahora traduciendo el problema tenemos:

Las calorías en las papas + calorías en la hamburguesa dan 1070 en total

Así:

$$(c + 30) + c = 1070$$

$$2c + 30 = 1070$$

$$2c + 30 - 30 = 1070 - 30$$

$$2c = 1040$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2c) = 1040\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$c = 520$$

Así pues, la hamburguesa tiene 520 calorías. Puesto que las papas tienen 30 calorías más que la hamburguesa, éstas tienen 520 + 30 = 550 calorías.

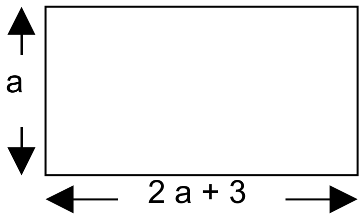
Moraleja, ¡mejor comamos frutas y verduras!

Ejemplo 5.

El largo de un terreno de forma rectangular mide el doble de su ancho mas tres metros. Si el perímetro mide 5010 m., hallar las dimensiones del terreno.

Recordemos que los lados opuestos del rectángulo son iguales y que su perímetro se obtiene sumando la medida de sus cuatro lados.

Si "a" representa el ancho del rectángulo entonces el largo se expresa según el problema por 2 a + 3:



Por lo tanto:

$$\text{Perímetro} = a + (2a + 3) + a + (2a + 3) = 5010,$$

O bien;

$$6a + 6 = 5010.$$

Resolviendo la ecuación tenemos que:

$$6a + 6 - 6 = 5010 - 6$$

$$6a = 5004$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)(6a) = 5004\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$a = \frac{5004}{6} = 834.$$

Así pues, el ancho del terreno es de 834 metros y el largo es:

$$2(834) + 3 = 1668 + 3 = 1671 \text{ metros.}$$

Para ver más aplicaciones consulta las páginas siguientes:

http://www.rena.edu.ve/terceraEtapa/matematica/TEMA5/ecuaciones.html http://washingtonst.conevyt.org.mx/actividades/lenguaje/index.html

Problemas de aplicación

Resuelva los siguientes retos:

Mateo trabaja en el almacén de una tienda, cada mes se reciben 48 costales, estos son de frijol y de arroz, si sabemos que de arroz son el triple de costales en comparación con los de frijol ¿cuántos costales de frijol se reciben?

Para resolver éste reto primero tenemos que representarlo algebraicamente:

f = al número de costales de fríjol
a = al número de costales de arroz = 3 veces **f**
f + **a** = 48

reemplazando la equivalencia de a tenemos:

f + 3**f** = 48
4**f** = 48
f = 48/4
f = 12

Reciben 12 costales de frijol

En la cocina "La comida de Mamá" se preparan comidas corridas para llevar, uno de sus clientes, en sábado les solicita una tercera parte más de comidas porque su familia lo visita ese día, por lo que se le envían 12 órdenes ¿cuántas comidas pide entre semana?

Se representa algebraicamente éste reto:

x = al número de comidas que se le envía al cliente entre semana
Por lo tanto, el sábado:

$\mathbf{x} + \mathbf{x}/3 = 12$

$4\mathbf{x}/3 = 12$

$4\mathbf{x} = (12)(3)$

$4\mathbf{x} = 36$

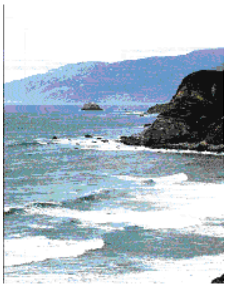
$\mathbf{x} = 36/4$

$\mathbf{x} = 9$

El cliente pide 9 comidas entre semana.

Resuelve el siguiente reto.

Esteban fue de paseo a Veracruz y quiere comprar unos llaveros como recuerdo a sus amigos. Los que tienen un barco cuestan el doble de los que sólo dicen Veracruz, si compra uno de cada modelo le cobrarían $18.00 ¿cuánto cuesta cada tipo de llavero?



Actividad de aprendizaje

1.- Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 189.

2.- Hallar dos números cuya suma sea 105, sabiendo que el mayor es el séxtuplo del menor.

3.- Juan tiene 12 monedas más que Enrique y entre ambos tienen 78. Determina cuántas monedas tiene cada uno.

4.- El ancho de un terreno de forma rectangular mide tres metros más que la mitad de su largo. Si el perímetro mide 144 m., hallar las dimensiones del terreno.

5.- En una elección escolar reciente, se contaron 980 votos. El ganador recibió 372 votos más que el perdedor. ¿Cuántos votos recibió cada candidato?

UNIDAD VIII
FUNCIONES, RELACIONES Y GRAFICAS

Módulo 13
Funciones

OBJETIVO
Definir el concepto de función así como sus características.

En la vida diaria nos encontramos (a veces sin darnos cuenta) con la noción de **correspondencia.** Por ejemplo, a cada persona le corresponde una fecha de nacimiento, a cada libro le corresponde un número de páginas, a cada objeto le corresponde un peso, a cada rectángulo le corresponde un área, a cada número no negativo le corresponde su raíz cuadrada, etc.

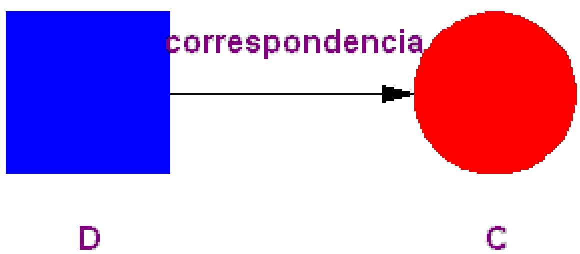
En cada uno de los ejemplos anteriores hay dos conjuntos *D* y *C* entre los que se da la correspondencia.

En el primer ejemplo el conjunto *D* es el conjunto de personas y el conjunto *C* es el conjunto de fechas (día, mes y año).

En el segundo ejemplo el conjunto *D* es el conjunto de libros y el conjunto *C* es un número entero (el número de páginas).

¿Cuáles serían los conjuntos *D* y *C* para los otros tres ejemplos?

Estas correspondencias se ilustran a menudo mediante diagramas como el que sigue:



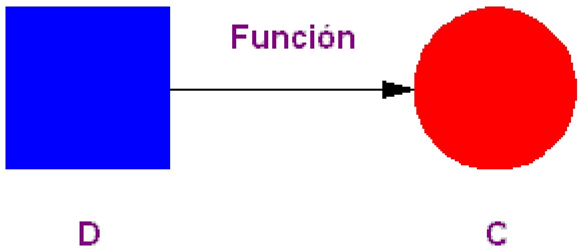
Toda regla de correspondencia como los ejemplos anteriores es llamada **relación**.

Ciertos tipos especiales de reglas de correspondencia se llaman **funciones**.

La definición de función se da enseguida.

Función:

Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

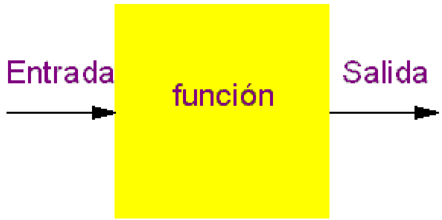


Al primer conjunto (el conjunto D) se le da el nombre de dominio.

Al segundo conjunto (el conjunto C) se le da el nombre de contradominio, recorrido o imagen.

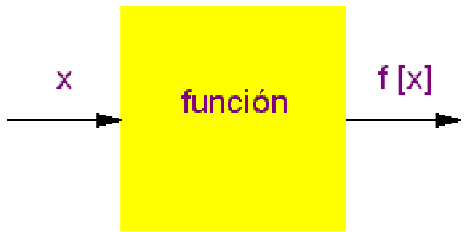
Una función se puede concebir también como un aparato de cálculo. La entrada es el dominio, los cálculos que haga el aparato con la entrada son en sí la función y la salida sería el contradominio.

Esta forma de concebir la función facilita el encontrar su dominio.



Notación: al número que "entra" a la máquina usualmente lo denotamos con una letra, digamos *x* o *s*, o cualquier otra.

Al número que "sale" de la máquina lo denotamos con el símbolo *f(x)* ó *f(s)*.



Ejemplo: $f(x) = x^2 + 3x - 6$

Esta función es una regla de correspondencia que dice lo siguiente: "A cada número en el dominio de *f* se le relaciona con el cuadrado de ese número mas el triple de ese número menos seis".

Otra manera de ver esto es escribiendo la función de la siguiente manera:

$f(\ \ ) = (\ \ )^2 + 3(\ \ ) - 6$

Enseguida se muestran los valores de *f* para varios valores de ( ). Es decir, se muestra la "salida" de la "máquina" para varios valores de la "entrada".
Así se obtiene el valor de una función, al sustituir un valor para la x:

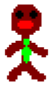
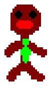
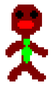
$$f(x) = x^2 + 3x - 6$$

$$f(10) = 124$$

$$f(-2) = -8$$

$$f(h + 1) = (h + 1)^2 + 3(h + 1) - 6$$

$$f(x + b) = (x + b)^2 + 3(x + b) - 6$$

f() = ()^2 + 3() - 6

El dominio de una función puede ser especificado al momento de definir la función.

Por ejemplo, $F(x) = 2x$ en el intervalo [-3,10] es una función cuyo dominio es el intervalo [-3,10]. A menudo no se especifica el dominio de una función definida por una ecuación, por ejemplo,

$G(x) = 3x^3 - 2x + 10$
(Sin especificar el dominio)

<u>En adelante quedará entendido que</u>:

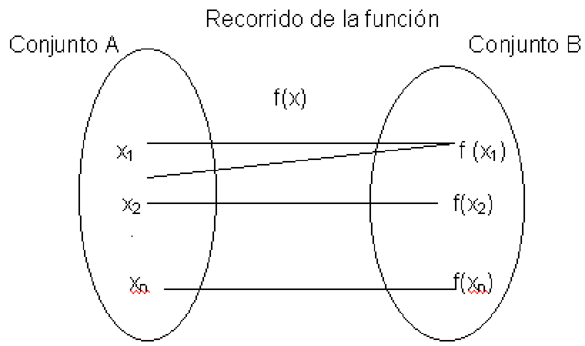
A menos que se especifique explícitamente, el dominio de una función será el conjunto más grande de números reales para los cuales la función nos dé como salida un número real.

Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

Para esta función $x = 3$ no forma parte del dominio, ya que al ingresar dicho valor en la función obtendríamos un diagnóstico de error pues no se puede dividir entre cero. Observa además que la función no puede tomar el valor cero. ¿Por qué?

Donde se dice que $f : A \to B$ (f es una función de A en B, o f es una función que toma elementos del dominio A y los aplica sobre otro llamado codominio B)



A los elementos de un conjunto de la forma (x, y) o (x, f(x)) se les conoce como pares ordenados.

Así, una función se puede definir como el conjunto de pares ordenados, tales que el primer elemento de un par distinto no se repite. El primer elemento pertenece al dominio de la función y el segundo elemento pertenece al recorrido de la función.

Ejemplo 1.

El conjunto de pares ordenados siguiente corresponde a una función porque el primer elemento de cada par no se repite:

A = {(2,4), (0,0), (3,9), (-2,4)}

Ejemplo 2.

El conjunto de pares ordenados siguiente no corresponde a una función porque el primer elemento de los pares (3,5) y (3,8) es el mismo:

B = {(2,4), (3,5), (3,8), (-2,4)}

El segundo elemento de cada par no importa que se repita para que sea función, pero si el primer elemento de un par se repite entonces no hay función.

Ejemplo 3.
Dada la función representada en pares ordenados:

{(2,5), (3,6), (4,7), (-2,1), (0,3), (1,4)}

es muy fácil ver cual es su dominio y recorrido.

El dominio lo forman los primeros elementos de cada par:

{2, 3, 4, -2, 0, 1}

Y el recorrido lo forman los segundos elementos de cada par:

{5, 6, 7, 1, 3, 4}

Cuando nos piden saber un valor específico para una función, se hace lo de arriba, es decir sustituir el valor en lugar de la x, y hacer las cuentas:

Ejemplo

Si la función está dada por $f(x) = 2x+3$ y nos piden hallar $f(2)$ y $f(9)$ entonces se hace lo siguiente:

$f(2) = 2(2) +3 = 7$ y así formamos el par ordenado (2, 7).

También, f(9) = 2 (9)+3 = 21 y el par ordenado es (9, 21).

Cuando nos den una función y pidan obtener su dominio, solo basta observar la función y ver si siempre podemos sustituir valores para la x, y que no haya problemas al hacer cuentas.

Ejemplo 1

Encontrar el dominio de la siguiente función:

$y = \frac{1}{x}$

En esta función, el único valor que no le podemos dar a la x es cero porque $\frac{1}{0}$ es un valor indefinido. Y si le podemos dar cualquier otro valor a la x, y siempre podremos dividir al 1.
Entonces el dominio de esta función son todos los números reales menos el cero o sea, el conjunto:

$\{x \in R / x \neq 0\}$

Ejemplo 2

Dada la función $y = \frac{2}{x+4}$ su dominio son todos los reales excepto el valor de - 4 ya que si sustituimos x por -4 en la función, nos queda $\frac{2}{-4+4} = \frac{2}{0}$, lo cual, otra vez, está indefinido `pues no podemos dividir al 2 con el cero.

Si observamos bien, cualquier otro valor para la x si sirve para hacer las cuentas. Es por eso que el dominio son todos los reales sin el -4.

O sea, el conjunto:

$\{x \in R / x \neq -4\}$

El chiste es que al sustituir en el denominador no resulte un cero.

Ejemplo 3

Dada la función y = $\frac{x}{(x+1)(x-5)}$ su dominio son todos los reales excepto el valor de -1 y de +5 ya que cualquiera de los dos al sustituir, en el denominador se hace un cero.
O sea, el dominio es el conjunto:

$\{x \in R / x \neq -1, x \neq 5\}$

Actividad de aprendizaje

1.- ¿Cuales de los conjuntos siguientes representa una función?
a) {(2,4), (3,4), (4,4), (-2,4), (0,4), (1,4)}

b) {(1,5), (2,6), (3,7), (-2,1), (-3,3)}

c) {(2,5), (3,6), (2,7)}

d) {(-2,5), (3,6), (4,7), (-2,1), (0,3)}

2.- Halle el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = \frac{x-2}{(x+3)(x-4)}$

b) $y = \dfrac{2}{(x-1)^2}$

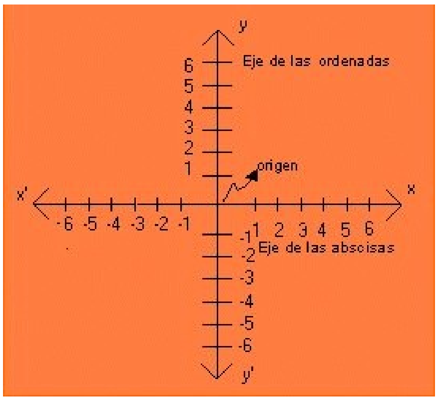
c) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4}$

Módulo 14

Sistema de Coordenadas Cartesianas

OBJETIVO.- Localizar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

El Sistema de Coordenadas Cartesianas también conocido como Plano Cartesiano está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.



El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.

Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las 'X' y uno de las 'Y', respectivamente, esto indica que un punto se puede ubicar en el plano cartesiano con base en sus coordenadas, lo cual se representa como:

P (x, y)

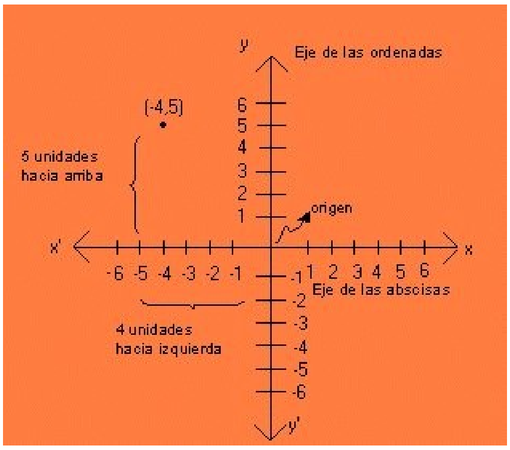
Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia a izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.

2. Desde donde se localiza el valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas sus coordenadas.

Ejemplos:

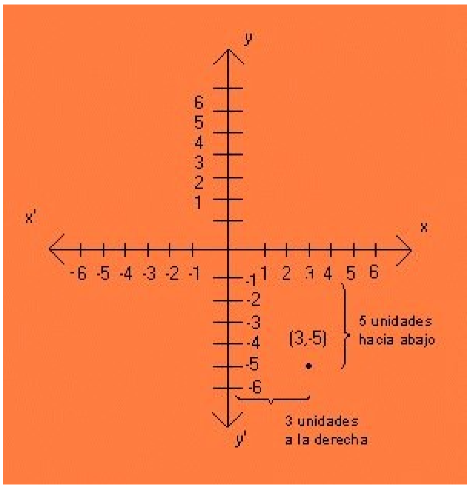
Localizar el punto A (-4, 5) en el plano cartesiano.



Este procedimiento también se emplea cuando se requiere determinar las coordenadas de cualquier punto que esté en el plano cartesiano.

Determinar las coordenadas del punto M.

Las coordenadas del punto M son (3,-5).



De lo anterior se concluye que:

Para determinar las coordenadas de un punto o localizarlo en el plano cartesiano, se encuentran unidades correspondientes en el eje de las x hacia la derecha o hacia la izquierda y luego las unidades del eje de las y hacia arriba o hacia abajo, según sean positivas o negativas, respectivamente.

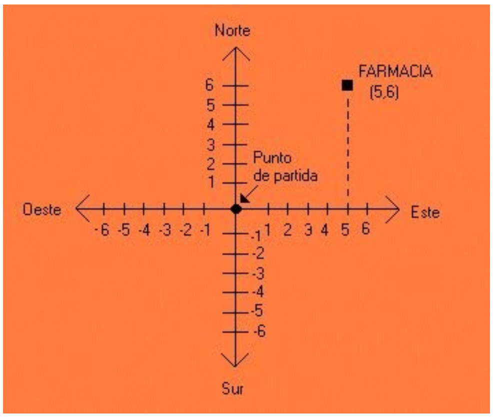
Doña Lupe nos ha dicho que su farmacia está dentro del centro de la ciudad. Supongamos que deseamos saber la ubicación exacta de la farmacia de Doña Lupe:

Una vez que ya estamos en el centro le preguntamos a un policía para que nos oriente.

El policía nos ha dicho que caminemos 5 cuadras hacía el este y 6 cuadras hacía el norte para llegar a la farmacia.

La cantidad de cuadras que tenemos que caminar las podemos entender como coordenadas en un plano cartesiano.

Lo anterior lo podemos expresar en un plano cartesiano de la siguiente manera:

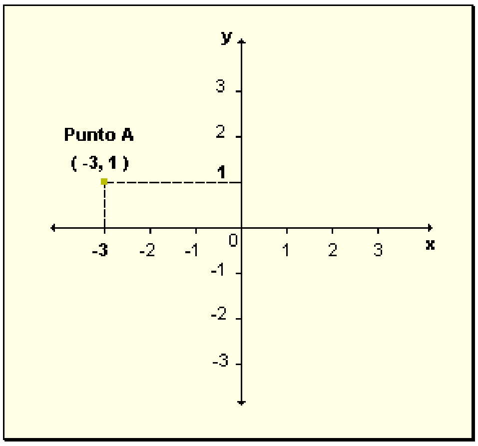


Para el problema planteado, el origen del plano será el punto de partida que es en donde le preguntamos al policía sobre la ubicación de la farmacia.

En resumen, el plano cartesiano está determinado por dos rectas llamadas ejes de **coordenadas**:

- El eje horizontal recibe el nombre de **eje x** o de **abscisas**.
- El eje vertical recibe el nombre de **eje y** o de **ordenadas**.

En ambos ejes se pueden representar los números enteros y se cruzan en el cero.



La ubicación de un punto cualquiera del plano se determina midiendo su distancia respecto de los ejes **x** e **y**.

El primer número del par ordenado **(-3, 1)** determina el **desplazamiento horizontal** respecto del cero:

- positivo para los puntos ubicados a la derecha
- negativo para los puntos ubicados a la izquierda

El segundo número del par ordenado **(-3, 1)** determina el **desplazamiento vertical** respecto del cero:

- positivo para los puntos ubicados hacia arriba
- negativo para los puntos ubicados hacia abajo

Actividad de aprendizaje

Localice los siguientes puntos en el plano cartesiano.

a) A(2,4)
b) B(-3,9)
c) C(-1,-1)
d) D(2,-4)
e) E(0,0)
f) F(0,3)
g) P(9,0)

Módulo 15
Gráfica de funciones

OBJETIVO

Graficar funciones a partir de su ecuación.

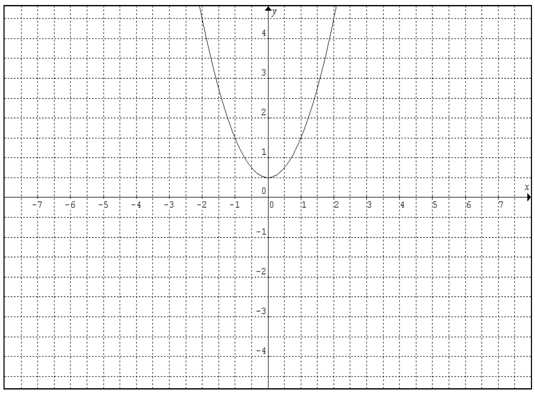
La función f tendrá una representación Geométrica que llamaremos *la gráfica de la función* y que es un subconjunto del plano

Ejemplo

La gráfica de la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ es el conjunto de puntos en el plano

$$\left\{\left(x, x^2 + \frac{1}{2}\right) \middle| x \in \Re\right\}$$

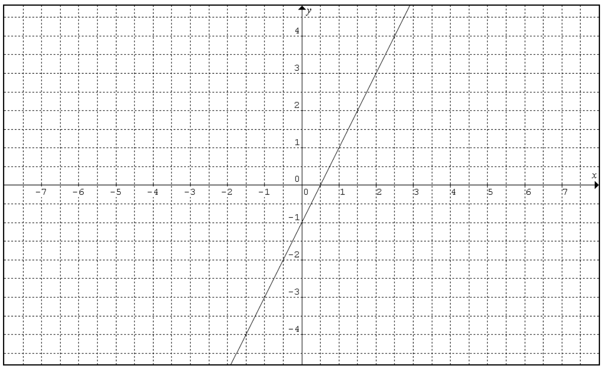
Cuya grafica es:



La gráfica de una función *f*, consta de todos los puntos *(x, y)* del plano de coordenadas, tales que $y=f(x)$ y x pertenezca al dominio de *f*. De modo que la gráfica de una función *f* es igual a la gráfica de la ecuación *f(x)*.

La gráfica de una función *f*, proporciona una ilustración útil del comportamiento de una función. Puesto que la coordenada y de cualquier punto *(x, y)* de la gráfica es $y=f(x)$, se puede leer el valor de *f(x)* a través de la gráfica, como la altura que alcanza la gráfica sobre el punto x. La gráfica de f también permite ilustrar el dominio y la imagen de f en los ejes x y y.

Algunas funciones se pueden trazar con el sólo hecho de obtener unos cuantos puntos de la gráfica. En particular, si la función es lineal, la gráfica será una recta, por lo que bastarán dos puntos para trazarla. Por ejemplo, la gráfica de la función lineal $f(x)= 2x-1$ se puede obtener eligiendo arbitrariamente dos valores para x, y con éstos obtener los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x=0,\ y=f(0)=-1$. Del mismo modo si $x=2,\ y=f(2)=3$ De este modo se obtiene las parejas ordenadas (0, -1) y (2, 3) que permiten trazar la gráfica de $f(x)= 2x-1$



En ocasiones, dos cantidades se relacionan por medio de una ecuación o fórmula con dos variables. Por ejemplo $y = x^2$ ó $y^2 = 5x - 1$. En esta sección, analizaremos cómo representar geométricamente tal ecuación con una gráfica en un plano coordenado. La gráfica puede servir para descubrir propiedades de las cantidades que no eran evidentes en la simple ecuación.

Cada solución (a, b) de una ecuación en x y y tiene un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos estos números es la gráfica de la ecuación.

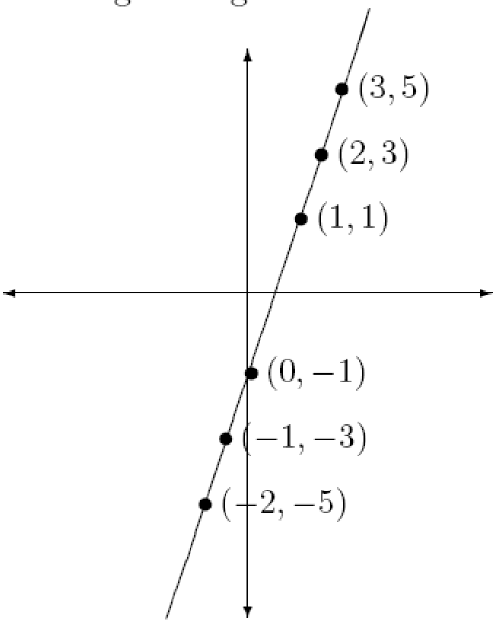
Para *trazar la gráfica de la ecuación*, ilustramos las características re-levantes de la gráfica de un plano coordenado. En casos sencillos se traza localizando unos cuantos puntos, si los hay. Con una ecuación complicada, la ubicación de puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En tales casos, conviene utilizar métodos de cálculo.

Ejemplo: Trazar la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

Deseamos encontrar los puntos (x, y) de un plano coordenado que correspondan a las soluciones de la ecuación. Es útil anotar las coordenadas de varios de tales puntos en una tabla, donde para cada x obtenemos el valor de y para $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Es evidente que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una recta por lo que trazamos la siguiente gráfica:



Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo, pues se pueden asignar valores a x tan grandes como se desee. En general, el trazo de una gráfica ha de ilustrar sus características esenciales, de manera que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes.

En una función cuadrática, la potencia mayor de la variable de entrada (generalmente x) es 2. Por ejemplo, $y = x^2$, $A = s^2$ y $y = 3x^2 + 5$ son funciones cuadráticas.

Grafica funciones cuadráticas	Se grafica una función cuadrática con los mismos pasos que se usan para graficar una función lineal pero la gráfica de una función cuadrática es una línea curva, no recta. Las gráficas de las funciones cuadráticas en esta lección son todas curvas, llamadas **parábolas** y tienen la forma de la letra U.

EJEMPLO

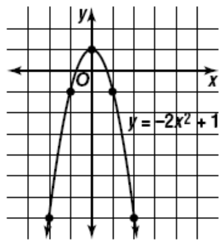
Grafica la función cuadrática $y = -2x^2 + 1$.

Escoge algunos valores de x y haz una tabla.

x	$-2x^2 + 1$	y	(x, y)
-2	$-2(-2)^2 + 1 = -7$	-7	$(-2, -7)$
-1	$-2(-1)^2 + 1 = -1$	-1	$(-1, -1)$
0	$-2(0)^2 + 1 = 1$	1	$(0, 1)$
1	$-2(1)^2 + 1 = -1$	-1	$(1, -1)$
2	$-2(2)^2 + 1 = -7$	-7	$(2, -7)$

Debido a que la gráfica es curva, marca más puntos que para los de una línea recta, de modo que puedas ver la forma de la curva.

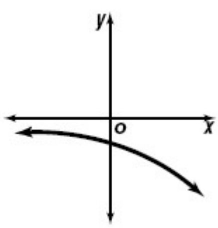
Grafica los puntos (x, y) en la última columna de tu tabla. Dibuja una curva que una los puntos.



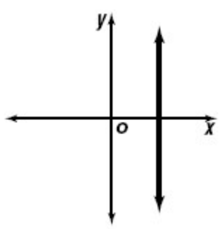
Dada una gráfica nosotros podemos ver si representa o no a una función muy fácilmente. El método es trazar imaginariamente una línea perpendicular al eje de las abscisas en cada punto y ver si esta línea corta varias veces la gráfica. Si hay algún punto donde la línea corte a la gráfica varias veces entonces la gráfica no representara ninguna función. En caso contrario, si siempre que podamos trazar una perpendicular y que cruce a la gráfica solamente una vez entonces la gráfica si representara una función.

Por ejemplo, en las siguientes gráficas, la que no representa una función es la 2 pues si trazamos una perpendicular a las abscisas sobre la misma gráfica, ésta la cortará una infinidad de veces mientras que si trazamos rectas perpendiculares a la gráfica 1 y 3 no hay ningún lugar donde las corte más de una vez.

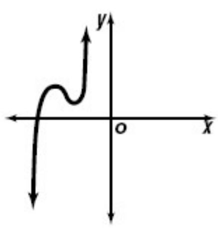
1.



2.



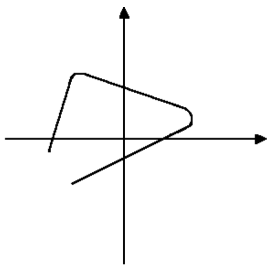
3.



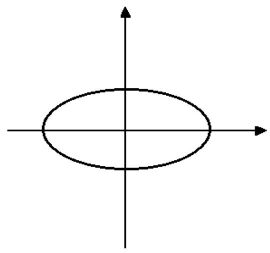
Veamos más ejemplos:

De las siguientes gráficas la única que corresponde a una función es la d) pues las demás al trazar una línea perpendicular las cortara varias veces.

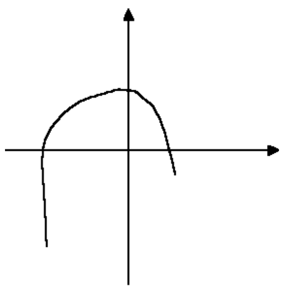
a)



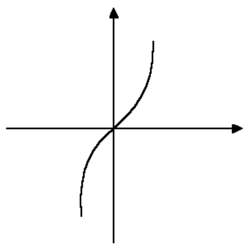
b)



c)

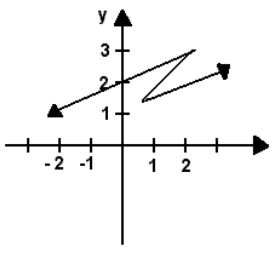


d)

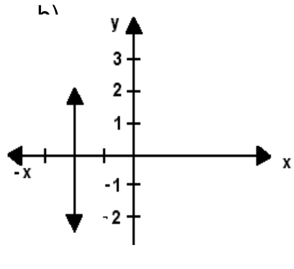


De las siguientes gráficas la que corresponde a una función es la c). La a) no es, porque si trazamos una perpendicular que pase por el 1 de las abscisas cortara a la grafica 3 veces. La b) no es función por la misma razón del primer ejemplo que dimos arriba y la d) no es, porque puntos separados ni siquiera forman una gráfica.

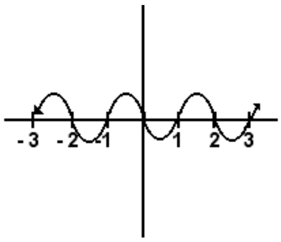
a)



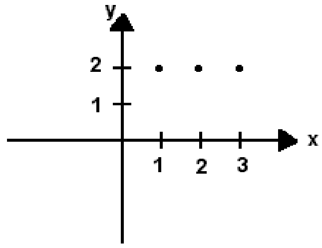
b)



c)

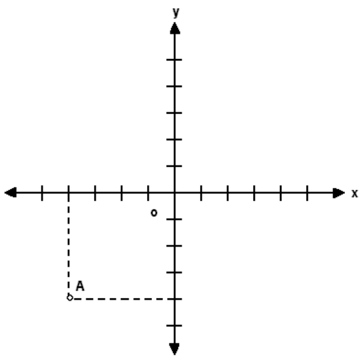


d)



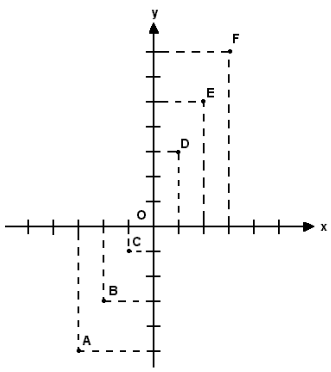
Actividades de aprendizaje

1.- Observe la gráfica, de acuerdo con ella las coordenadas del punto A, se indican en la opción:



a) (4, -3)
b) (-3, 3)
c) (-4, 0)
d) (-4, 4)

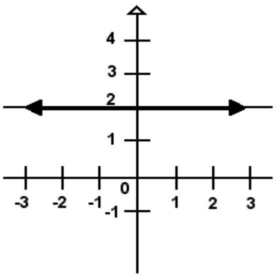
2.- Observe la gráfica



De acuerdo con ella, las coordenadas del conjunto de puntos se indican en la opción

a) {(1,-2),(3,7),(-3,-5),(2,5),(3,7),(-1,1)}
b) {(-1,1),(1,-2),(3,7),(-3,5),(2,5),(3,7)}
c) {(-1,-1),(1,3),(-2,-3),(-3,-5),(2,5),(3,7)}
d) {(1,-1),(1,2),(3,7),(-3,-5),(2,5),(3,7)}

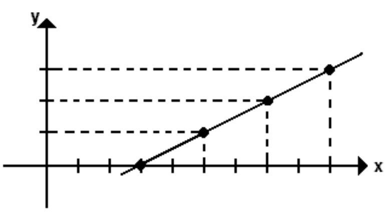
3.- ¿Cuál es el dominio de la relación que se muestra en la gráfica?



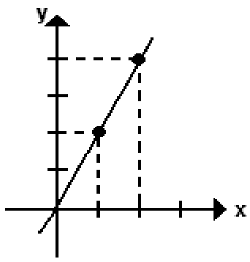
a) {2, 1, 2, 3, 4, 5}
b) {1, 3, 2}
c) {2, 2, 3}
d) {-∝, ∝}

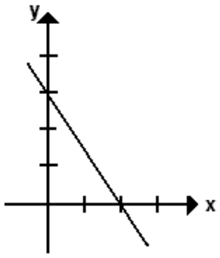
4.- De la siguiente ecuación $y = \frac{x - 3}{2}$ ¿Cuál es su gráfica?

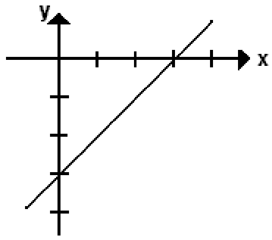
a)



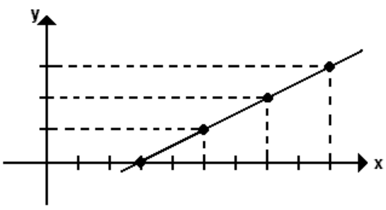
b)

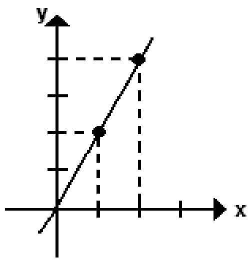


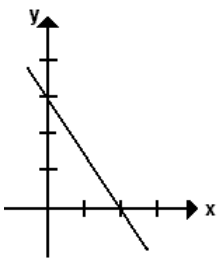
c) 

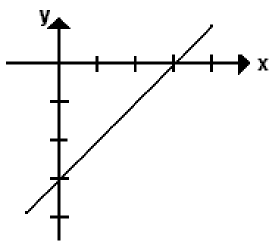
d) 

5.- De la siguiente ecuación $y = \dfrac{x - 3}{2}$ ¿Cuál es su gráfica?

a) 

b) 

c) 

d) 

Módulo 16
Cartas de flujo

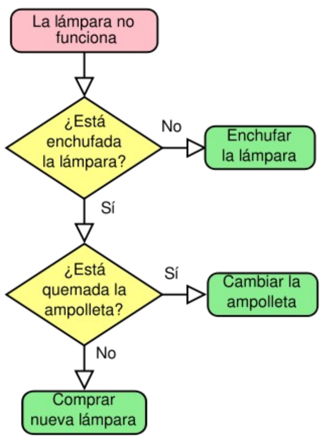
OBJETIVO

Representar funciones con cartas de flujo.

Una carta de flujo es la representación gráfica de flujo o secuencia de rutinas simples, es una forma de especificar los detalles algorítmicos de un proceso mediante la esquematización gráfica para entenderlo mejor. Se basan en la utilización de diversos símbolos para representar operaciones específicas. Se les llama diagramas de flujo porque los símbolos utilizados se conectan por medio de flechas para indicar la secuencia de la operación.

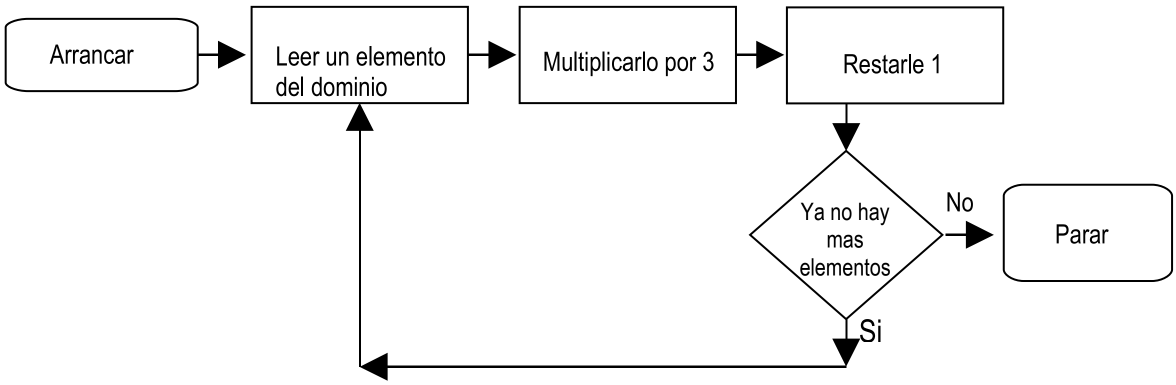
Un diagrama o carta de flujo es la representación gráfica del flujo o secuencia de rutinas simples. Tiene la ventaja de indicar la secuencia del proceso en cuestión, las unidades involucradas y los responsables de su ejecución; en pocas palabras es la representación simbólica o pictórica de un procedimiento.

Por ejemplo el diagrama siguiente muestra una carta de flujo que representa el procedimiento que se tiene que hacer en caso de que una lámpara no funcione.

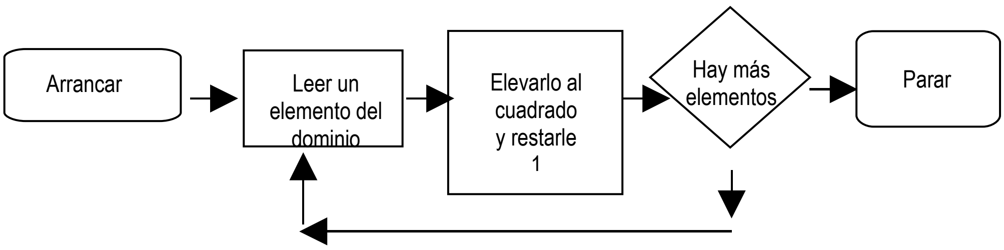


En matemáticas, los diagramas de flujo los podemos utilizar para mostrar procedimientos paso a paso conocidos también como algoritmos.

Por ejemplo, la siguiente carta de flujo tiene las siguientes instrucciones: arrancar, leer un elemento del dominio, multiplicarlo por 3, restarle 1 repetirlo según el número de elementos que tenga el Dominio y parar.

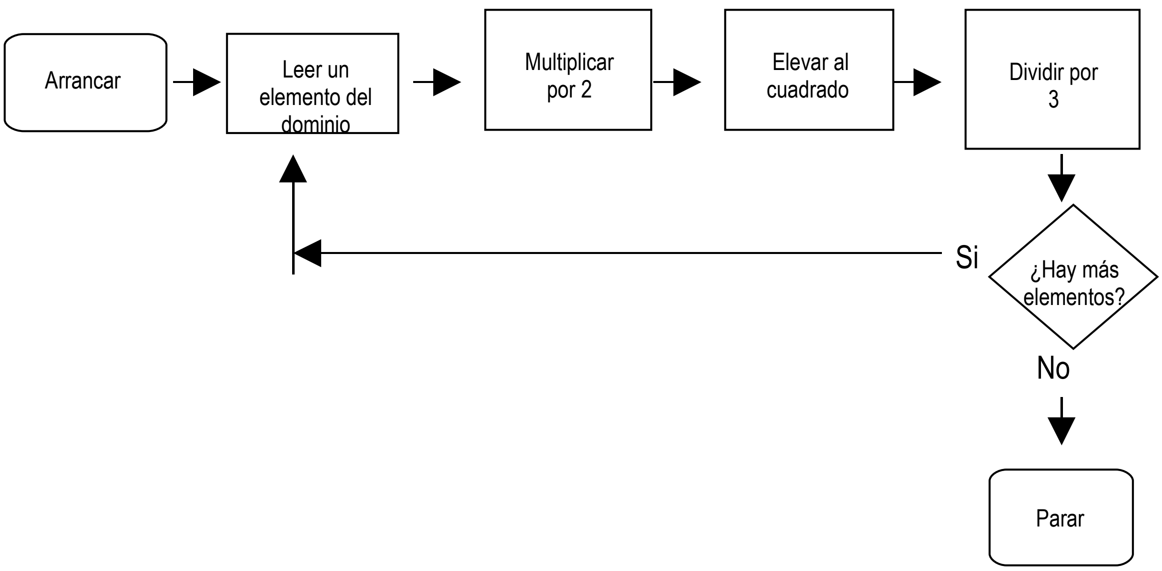


Ahora, si observamos la carta de flujo siguiente



La ecuación que le corresponde es: $y = x^2 - 1$.

Y al siguiente diagrama de flujo le corresponde la ecuación $y = \frac{(2x)^2}{3}$



Actividad de aprendizaje

1.- Dibujar el diagrama de flujo que contemple las siguientes instrucciones y escribir la ecuación que le corresponda: Arrancar, leer un elemento del dominio, dividir por 3, elevar al cuadrado, sumar 2, repetir si es que hay más elementos, si no parar.

2.- Dibujar el diagrama de flujo que contemple las siguientes instrucciones y escribir la ecuación que le corresponda: Arrancar, leer un elemento del dominio, restar 4, dividir por 7, elevar al cubo, sumar 6, repetir si es que hay más elementos, si no parar.