Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

SEP

ISBN 970-18-0596-8

9 789701 805961

CVE 21

Matemáticas II
Segundo semestre

SEP

PREPARATORIA

abierta

SEP

Preparatoria
Abierta

Matemáticas II

Segundo semestre

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Matemáticas II

PREPARATORIA ABIERTA

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

El contenido académico de este texto es exclusiva responsabilida del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y s índice pertenece al programa correspondiente al plan de estudios d nivel medio superior, para la materia de:

MATEMÁTICAS II
UNIDADES V-VIII

AUTOR: Mario Villegas Urquidi

REVISÓ: Gustavo Mendoza González

COMITÉ ACADÉMICO: Humberto Cantú Salinas
Moisés Galicia Arrambide
Roberto García Martínez
Gustavo Mendoza González
Héctor Paz Estrada

ADAPTÓ: Luis Felipe Robles G.
Enrique Morales B.

La educación es una responsabilidad compartida y en consecuencia invitamos atentamente a toda persona interesada en colaborar para resolver la problemática educativa, a que remita sus comentarios, críticas y sugerencias con respecto a esta obra a la Dirección General del Bachillerato de la SEP.

Sus aportaciones serán apreciadas en todo lo que valen y permitirán perfeccionar y adecuar permanentemente estos materiales a las cambiantes condiciones de la época actual.

SEP, 1983
DERECHOS RESERVADOS
ISBN 970-18-0596-8

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Indice

Prólogo 11
Notación 13
Instrucciones para el alumno 15
UNIDAD V. Posterior desarrollo de los números reales 17
Introducción 19
Objetivos generales 20
Diagrama temático estructural 21
Glosario 22
Módulo 1 25
Objetivos específicos 25
Esquema resumen 25
1.1 Postulados de orden 26
Reactivos de autoevaluación 29
Módulo 2 31
Objetivos específicos 31
Esquema resumen 31
2.1 Ordenamiento de los enteros 32
2.2 Números racionales. Densidad 33
Reactivos de autoevaluación 35
Módulo 3 37
Objetivos específicos 37
Esquema resumen 37
3.1 Representación geométrica de los números reales 38
3.2 Valor absoluto 40
Reactivos de autoevaluación 42
Módulo 4 45
Objetivos específicos 45
Esquema resumen 45
4.1 Gráfica de un conjunto numérico 46
Reactivos de autoevaluación 47
Paneles de verificación 49
UNIDAD VI. Exponentes y radicales 61
Introducción 63
Objetivos generales 64
Diagrama temático estructural 65
Glosario 66
Módulo 5 67
Objetivos específicos 67

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Esquema resumen 67
5.1 Exponentes enteros y exponente cero. Leyes de los exponentes 68
Reactivos de autoevaluación 72
Módulo 6 73
Objetivos específicos 73
Esquema resumen 73
6.1 Radicales. 74
Reactivos de autoevaluación 78
Módulo 7 79
Objetivos específicos 79
Esquema resumen 79
7.1 Isomorfismo de dos conjuntos. Exponentes racionales 80
Reactivos de autoevaluacion 86
Módulo 8 89
Objetivos específicos 89
Esquema resumen 89
8.1 Leyes de los radicales. Simplificación de radicales. Multiplicación y división. 90
8.2 Suma y resta de los radicales 94
Reactivos de autoevaluación 95
Paneles de verificación 99
DAD VII. Aplicaciones 107
Introducción 109
Objetivos generales 109
Diagrama temático estructural 111
Glosario 112
Módulo 9. 113
Objetivos específicos 113
Esquema resumen 113
9.1 Planteo de problemas 114
Reactivos de autoevaluación 118
Módulo 10 121
Objetivos específicos 121
Esquema resumen 121
10.1 Solución de ecuaciones 122
Reactivos de autoevaluación 125
Módulo 11 127
Objetivos específicos 127
Esquema resumen 127
11.1 Solución de desigualdades 128
11.2 Ecuaciones fraccionarias 129
Reactivos de autoevaluación. 130
Módulo 12 133
Objetivos específicos 133
Esquema resumen 133
12.1 Problemas de planteo 134
Reactivos de autoevaluación 138
Paneles de verificación 141
UNIDAD VIII. Funciones, relaciones y gráficas 159
Introducción 161
Objetivos generales 162
Diagrama temático estructural 163
Glosario 164
Módulo 13 165
Objetivos específicos 165
Esquema resumen 165
13.1 Funciones. Notación 166
13.2 Relaciones 174
Reactivos de autoevaluación 175
Módulo 14 177
Objetivos específicos 177
Esquema resumen 177
14.1 Sistemas de coordenadas en dos dimensiones 178
Reactivos de autoevaluación 181
Módulo 15 182
Objetivos específicos 182
Esquema resumen 182
15.1 Gráfica de funciones y relaciones 183
Reactivos de autoevaluación. 187
Módulo 16 189
Objetivos específicos 189
Esquema resumen 189
16.1 Cartas de flujo 190
Reactivos de autoevaluación 194
Paneles de verificación 195

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Prólogo

Hemos visto en el texto anterior los principios básicos del razonamiento deductivo, los postulados que definen al conjunto de los números reales como un campo, así como también las operaciones fundamentales con esos números, con las cuales debemos estar ya familiarizados a través de los ejercicios que allí se propusieron.

Los postulados de campo, sin embargo, no nos dan reglas para poder comparar a los elementos del conjunto R, y esas normas son las que ahora tratamos para completar nuestros conocimientos fundamentales sobre el conjunto de los números reales. Asimismo consideramos algunas interpretaciones geométricas de estos elementos, para ver después las interpretaciones geométricas de las relaciones entre los números reales, planteándolas antes en forma simbólica como igualdades o desigualdades.

Es nuestro objetivo general en este libro completar el conocimiento de los números reales; 1° para aplicarlo en la solución de problemas prácticos mediante la generalización que nos proporciona el álgebra, y 2° establecer el vínculo que existe entre estos números y la geometría, preparación fundamental de cualquier estudiante para que pueda abordar la analítica y el cálculo, todas ellas materias básicas en el estudio de cualquier tecnología.

Mario Villegas Urquidi

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Instrucciones para el alumno

El presente texto ha sido estructurado tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan a los alumnos que estudian en la modalidad de enseñanza abierta.

El libro está dividido en cuatro **unidades,** que corresponden a cuatro grandes temas de la Matemática; están marcadas con números romanos. A su vez, las unidades se dividen en **módulos.** El total de módulos de las cuatro unidades, es decir, del libro completo, suma 16. La división en módulos tiene por objeto repartir la carga de estudio, calculando que cada módulo pueda ser estudiado, aproximadamente, en una semana. Además, esta división le permite a usted, alumno, darse cuenta del avance que ha logrado en el estudio de la materia.

Al principio del libro se encontrará una **Notación** que son las explicaciones relacionadas con la simbología empleada.

I. En cada unidad encontrará:

Introducción. Que es una visión general y anticipada de lo que se tratará en esa unidad.

Objetivos generales. Son las metas que deberá alcanzar usted cuando termine de estudiar la unidad. Si analiza esos objetivos con detenimiento verá que están formulados de manera amplia y general, de tal forma que usted mismo pueda hacer una apreciación personal para comprobar si, efectivamente, aprendió los temas presentados.

Diagrama temático estructural. Es una presentación esquemática del contenido total de la unidad. Su función es básicamente de enlace, o sea, cómo se relacionan los diferentes temas tratados en cada uno de los módulos que componen la unidad.

Glosario. Le indica el significado de los términos técnicos empleados en el desarrollo de la unidad.

Bibliografía. Al final de cada unidad encontrará los libros recomendados para ampliar o profundizar el tema de la unidad.

II. En cada módulo encontrará los siguientes elementos:

Objetivos específicos. Son el desglose de los objetivos generales de la unidad. Responden a la pregunta ¿qué debo ser capaz de hacer cuando termine de estudiar este módulo?

Esquema resumen. Presenta el contenido de cada módulo en forma sinóptica.

A través del desarrollo del tema usted encontrará las siguientes características:

Ideas guía. Ubicadas en los márgenes de las hojas. Son pequeñísimos resúmenes que tienen como finalidad facilitarle la situación de un concepto, la fijación de una información o la realización de un repaso muy rápido.

La figura  Se encuentra localizada en los márgenes de las hojas. Significa "toma tu lápiz" e indica alguna actividad que usted debe realizar como práctica en sus ejercicios de aprendizaje.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Reactivos de autoevaluación. Al final de cada módulo se dan una serie de preguntas de autocomprobación, para que pueda verificar por usted mismo en qué grado ha logrado los objetivos (propuestos al principio del módulo). Las respuestas correctas las encontrará al final de cada unidad, en los **Paneles de verificación.**

Notación

Un factor importante para la comprensión de cualquier texto de matemática es la correcta interpretación de los símbolos, pues en textos de autores diferentes es posible que a un mismo símbolo se le den significados distintos; por tal razón se ofrece una lista de los símbolos empleados en este curso y su interpretación. Ellos son presentados en el orden de aparición en el libro.

SIMBOLO	SIGNIFICADO
$\in$	Es un elemento de . . .
$\notin$	No es un elemento de . . .
$\{\ \}$	Conjunto
$=$	Es igual a
$\mid$	Tal que
$+$	Símbolo de la operación suma
$n(a)$	Cardinalidad del conjunto A
$\ldots$	Y así sucesivamente
μ	Conjunto universal
ϕ	Conjunto vacío
N	Conjunto de los números naturales
$\cdot$	Símbolo de la operación multiplicación
$\neq$	No es igual a
$\subseteq$	Subconjunto de . . .
$\nsubseteq$	No es subconjunto de . . .
$\subset$	Subconjunto propio de
$>$	Es mayor que
$<$	Es menor que
$\leq$	Es menor o igual que
$\geq$	Es mayor o igual que
$\cup$	Unión con
$\cap$	Intersección con
	Complemento de
$\not\subset$	No es subconjunto propio de
$\Rightarrow$	Símbolo de implicación
$-$	Símbolo de la operación diferencia o resta
$\ngtr$	No es mayor que
$\nless$	No es menor que
$\div$	Símbolo para expresar la operación división: (también se usa el símbolo — como en $\frac{a}{b}$)

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$\Leftrightarrow$	Doble implicación o equivalencia
$\sim$	No, es falso que
$\triangle$	Triángulo
$\sphericalangle$	Angulo
R	Conjunto de los números reales
E	Conjunto de los números enteros
D	Conjunto de los racionales
D'	Conjunto de los irracionales
π	3.14159...
$\sqrt{\ }$	Símbolo de la operación raíz cuadrada
%	Tanto por ciento

UNIDAD V

POSTERIOR DESARROLLO DE LOS NUMEROS REALES

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

Al llegar al nivel de Preparatoria ya hemos aceptado y utilizado el **orden** entre los números **enteros** y aun entre los **racionales**, generalmente de una manera intuitiva, ahora fundamentamos aquellos conocimientos y los extendemos a los números **reales** aplicando para lograr este aprendizaje las técnicas de la Unidad III, es decir, la justificación de cada paso a cada cambio en una expresión algebraica.

Ahora, empezaremos a manipular expresiones algebraicas en que intervienen las desigualdades, ya que hasta aquí sólo hemos resuelto las llamadas **ecuaciones**. Estableceremos la correspondencia entre los números reales y los puntos que forman una línea recta, para así, introducirnos a los sistemas coordenados en los cuales se grafican los conjuntos numéricos, técnica esta importantísima dada la aplicación y divulgación tan extendida de las gráficas en el mundo moderno, como "lenguaje" visual.

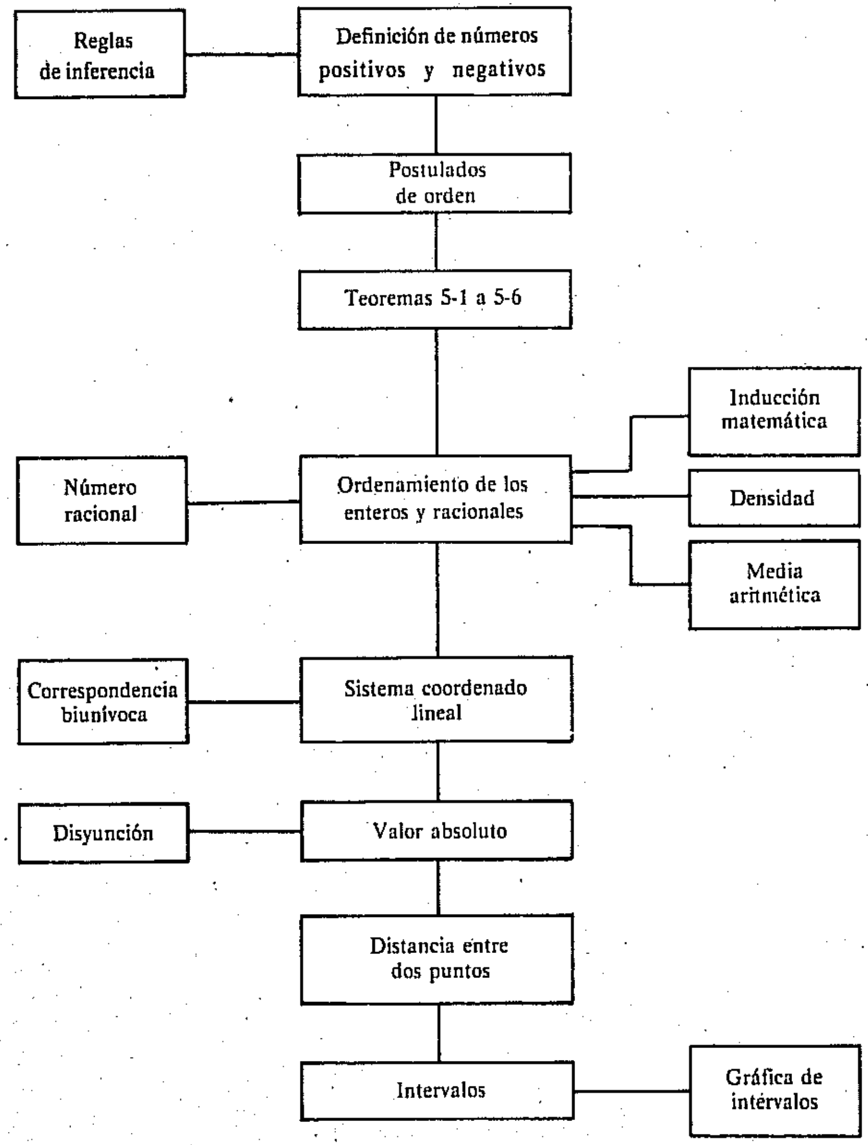
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Aplicará los postulados de orden entre los números reales en la resolución de desigualdades.
2. Utilizará los teoremas básicos sobre desigualdades en la simplificación de expresiones numéricas.
3. Calculará valores absolutos de diferentes distancias.
4. Graficará conjuntos numéricos, utilizando como instrumento la recta numérica.

Diagrama temático estructural



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Campo. Todo sistema matemático cuyos elementos cumplan con los seis postulados de campo acuerdo para dos operaciones.

Campo ordenado. Es todo campo cuyos elementos pueden ordenarse y compararse de a ese orden.

Postulados de orden. Son las propiedades que posee un determinado conjunto para ordenar y comparar sus elementos.

Propiedad de tricotomía. Si $x,\ y \in R$ entonces sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$x > y \quad ó \quad x < y \qquad ó \quad x = y$$

Postulado transitivo. Si un número real es mayor que un segundo número, y éste mayor que un tercero, entonces el primer número es mayor que el tercero.

$$x,\ y,\ z \in R,\ \ x > y \quad y > z \Rightarrow x > z$$

Inecuación. Son proposiciones abiertas en que intervienen los signos de las desigualdades $>, <, \neq$.

Postulado aditivo. Si un número real es mayor que otro, la desigualdad no se altera al sumar un mismo número real en ambos lados de la desigualdad.

$$\text{Si } x, y, z \in R, \qquad y\ \ x > y \Rightarrow x + z > y + z$$

Postulado multiplicativo. Si un número real es mayor que otro, la desigualdad no se altera al multiplicar por un mismo número real **positivo** en ambos lados de la desigualdad.

$$\text{Si } x,\ y,\ z \in R, \qquad y\ z > 0 \qquad y\ x > 0$$
$$\text{Si } x > y \Rightarrow xz > yz$$

Número racional. Es el elemento numérico que se puede representar por el cociente de dos enteros y cuyo denominador es diferente de cero.

$$D = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a,\ b \in E,\ b \neq 0\},\ D \in R$$

Densidad. Es la propiedad de los números racionales en cuanto al orden, y dice que entre dos números racionales siempre hay otro número racional.

Inducción matemática. Proceso por el cual después de aceptar un caso particular por inducción se generaliza a cualquier caso "n" para demostrar **deductivamente** que si se cumple para "n" se cumplirá para "n+1", concluyendo que se cumple siempre.

Orientación gráfica. Sentido de referencia para la localización del orden de los números sobre una recta.

Sistema coordenado lineal. Es la correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los elementos de R.

Valor absoluto. Es el número de unidades que separan dos puntos sin importar el signo de referencia en un sistema coordenado lineal.

Distancia entre dos puntos. Es el número de unidades que se encuentran entre dos puntos.

Recta numérica. Es la recta con cuyos puntos se asocia el conjunto de números reales, también se llama sistema C.L.

Gráfica de un número. Es el punto de una recta numérica con la que se asocia el número.

Coordenada. Es el valor numérico con el que se asocia a un punto de la recta numérica.

Intervalo. Es la gráfica de un conjunto numérico expresado en valor absoluto y menor que o su conjunción equivalente.

Intervalo abierto. Es cuando en la gráfica no se incluyen los valores extremos. $[a,b]$

Intervalo cerrado. Es aquel en el que en la gráfica se incluyen los valores extremos.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 1

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá con sus palabras número positivo y número negativo.
2. Explicará porqué el conjunto de los números reales forma un campo ordenado.
3. Mencionará cuáles son los postulados de orden.
4. Concluirá el valor de verdad de proposiciones dadas utilizando las definiciones de "mayor que" y "menor que".
5. Aplicará los postulados de orden (tricotomía, transitivo, aditivo, multiplicativo), en la justificación de implicaciones y en la demostración de teoremas.
6. Demostrará algunos teoremas de orden aplicando los postulados correspondientes.
7. Mencionará cuáles son las inecuaciones.
8. Resolverá desigualdades justificando cada uno de los pasos.

ESQUEMA RESUMEN

POSTULADOS DE ORDEN
- Tricotomía
- Postulado transitivo
- Postulado aditivo
- Postulado multiplicativo

DESIGUALDADES E INECUACIONES
- Algunos teoremas importantes
  - $a > b \Longleftrightarrow -a < -b$
  - $a > b \Longleftrightarrow a - b \in P$ (definición de "mayor que")
  - $a < b \Longleftrightarrow b - a \in P$ (definición de "menor que")
- Teoremas básicos
  - Si $a > b$ y $c < 0 \Longrightarrow ac < bc$
  - Si $a > b$ y $c > d \Longrightarrow a + c > b + d$
  - $a, b, c, d > 0$, $a > b$ y $c > d \Longrightarrow ac > bd$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

1.1 Postulados de orden

Existen proposiciones en las que comparamos valores, medidas, etcétera; decimos por ejemplo: Juan es mayor que Pedro, una hectárea es mayor que media hectárea, un octavo es menor que ciento treinta milésimas; ¿cómo podemos estar convencidos del valor de verdad de dichas proposiciones? los postulados de campo, las propiedades de la igualdad y la equivalencia nos sirven para justificar que existe diferencia pero no nos permiten o justifican el sentido de esta diferencia.

El conjunto de los números reales es un campo

Los elementos que manejamos son números reales y hemos demostrado que forman lo que llamamos un **campo,** necesitamos ahora demostrar que se pueden ordenar y comparar de acuerdo con ese orden, para demostrar en los casos de desigualdad cuál es mayor o cuál es menor, es decir, que el conjunto de los números reales forma un **campo ordenado.**

Campo ordenado es...

Definición:

Campo ordenado es todo conjunto cuyos elementos cumplen con los seis postulados de campo para dos operaciones y además guardan un orden al compararse entre ellos.

¿Cómo se ordenan los números reales...?

Considerando que vamos a acomodar los números uno después de otro, empezaremos por acomodar y definir a tres conjuntos disjuntos cuya unión forma el conjunto R.

1. Sea P, el conjunto de números positivos.
2. $\{x \mid -x \in P\}$. El conjunto de números negativos que definimos usando el conjunto P, como aquellos números cuyo inverso es positivo. Siendo x negativo $-x$ es positivo.
3. $\{0\}$ Este conjunto complementa la unión de los dos anteriores y tiene un solo elemento, por el teorema 3-11, sabemos que el cero es un número cuyo inverso es él mismo.

¿Y el orden se establece...?

El orden de los tres conjuntos definidos lo establecemos usando las siguientes

Definiciones:

$$x \in R \text{ y } x > 0 \Leftrightarrow x \in P$$
$$x \in R \text{ y } x < 0 \Leftrightarrow -x \in P$$

De acuerdo con las definiciones cualquier número positivo es mayor que 0 y cualquier número negativo es menor que 0. Usando la regla de inferencia de la cadena (Unidad II, Módulo 8), deducimos que cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

¿Qué postulados nos ordenan los números reales...?

Postulado 5-1. Tricotomía. Si $x, y \in R$ entonces sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera. $x > y$ ó $x < y$ ó $x = y$

Postulado 5-2. Transitivo. Si un número real es mayor que un segundo número, y éste mayor que un tercer número, entonces el primer número es mayor que el tercero.

$$x, y, z \in R,\ x > y \text{ y } y > z \Rightarrow x > z$$

Postulado 5-3. Aditivo.

$$x, y, z \in R,\ x > y \Rightarrow x + z > y + z$$

Postulado 5-4. Multiplicativo.

$$x, y, z \in R,\ z > 0 \text{ y } x > y \Rightarrow xz > yz$$

A diferencia del postulado multiplicativo para la igualdad, éste tiene una condición más, el factor (z) debe ser positivo o mayor que 0. Ahora estableceremos y demostraremos algunos teoremas que nos serán de gran utilidad, tanto para ordenar los elementos de R como para resolver proposiciones abiertas en las que intervienen desigualdades. Las demostraciones siguen la técnica de dos columnas, pero en las justificaciones sólo escribiremos las que correspondan a este libro, pues se supone que usted recordará las que correspondan a la teoría de campo y sólo se recomienda que esté seguro de recordarlas; con esto se pretende recortar dichas demostraciones para hacerlas más interesantes; recuerde que siempre que no se mencione otra cosa el conjunto de reemplazamiento es R.

Teoremas para proposiciones abiertas...

A las proposiciones abiertas en que intervienen desigualdades también se les llama **inecuaciones.**

Teorema 5-1. $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

Demostración: $a > b \Rightarrow -a < -b$

$a > b$	Dado	$-a < -b \Rightarrow a > b$	
$(-a) + (-b) \in R$	Cerradura	$-a < -b$	
$a + [(-a) + (-b)] > b + [(-a) + (-b)]$	Postulado 5-3	$a + b \in R$	
$0 + (-b) > (-a) + 0$		$-a + (a + b) < -b + (a + b)$	
$-a < -b$		$0 + b < a + 0$	
		$a > b$	

Ejemplo: Si $100 > 10$ entonces $-100 < -10$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

¿Cómo definimos mayor qué?

Teorema 5-2. $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo

A este teorema también se le llama de la definición de **mayor que**

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in P$$

Demostración:

$a > b \Rightarrow a - b \in P$		$a - b \in P \Rightarrow a > b$	
$a > b$	Dado	$a - b \in P$	Dado
$a + (-b) > b + (-b)$	Postulado 5-3	$a - b > 0$	Definición de número positivo
$a - b > 0$			
$a - b \in P$	Definición de elemento de P	$(a - b) + b > 0 + b$	Postulado 5-3
		$a > b$	

¿Para definir menor qué...?

Teorema 5-3. $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo.

A este teorema se le conoce como la definición de **menor que.** Completa la demostración que es semejante a la del teorema 5-2.

$$a < b \Longleftrightarrow b - a \in P$$

Demostración:

$a < b \Longrightarrow b - a \in P$	$b - a \in P \Longrightarrow a < b$
$a < b$ Dado	$b - a \in P$ Dado
$a + (-a) < b + (-a)\ldots$	$b - a > 0\ldots$
....	....

Teoremas básicos sobre desigualdades

Teorema 5-4 $\quad a > b$ y $c < 0, \Longrightarrow ac < bc$

Este teorema nos indica que a diferencia del postulado 5-4 multiplicativo, si el factor que se agrega es negativo, el sentido de la desigualdad se invierte. La demostración está escrita en el problema 6 de los Reactivos de autoevaluación correspondientes a este módulo para que la justifique el alumno.

Teorema 5-5 $\quad a > b$ y $c > d, \Longrightarrow a + c > b + d$

Dos desigualdades del mismo sentido pueden sumarse miembro a miembro y resulta una desigualdad con el mismo sentido. La demostración es muy semejante a la del teorema anterior y se propone como el problema 7 de los reactivos.

Teorema 5-6 $\quad a, b, c, d > 0,\ a > b$ y $c > d \Rightarrow ac > bd$

Aplicación de teoremas sobre desigualdades

Si todos los números en dos desigualdades del mismo sentido son positivos se pueden multiplicar miembro a miembro y resulta otra desigualdad con el mismo sentido.

Ejemplos: Teorema 5-4

a) $15 > 9$ y $-2 < 0$
$15\ (-2) < 9\ (-2)$
$-30 < -18$

b) $-2 > -5\ -120$
$(-2)\ (-1) < (-5)\ (-1)$
$2 < 5$

Teorema 5-5 a) $4 > 3$ y $8 > 7$
$4 + 8 > 3 + 7$
$12 > 10$

b) $7 < 11$ y $10 < 15$
$7 + 10 < 11 + 15$
$17 < 26$

Teorema 5-6 a) $6 > 4$ y $3 > 2$
$6 \cdot 3 > 4 \cdot 2$
$18 > 8$

b) $3 < 5$ y $7 < 9$
$3 \cdot 7 < 5 \cdot 9$
$21 < 45$

Con la idea de tener presente la diferencia entre el inverso de un número dado y su recíproco, se incluye la siguiente **actividad complementaria.**

1º Escriba el inverso aditivo de los siguientes números:

a) -3 $\quad$ b) $-\frac{a}{b}$ $\quad$ c) $\frac{a+b}{-a-b}$ $\quad$ d) $\frac{1}{4}$ $\quad$ e) $-\frac{1}{7}$

2º Escriba el recíproco (inverso multiplicativo) de cada número de los incisos anteriores.

En caso de duda consulte la Unidad III.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Demuestre que el producto de dos números reales *ambos* positivos o *ambos* negativos, siempre es positivo.
2. Demuestre que si $a \in R,\ a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
3. Utilice la definición de **menor que,** para deducir una conclusión de cada una de las proposiciones siguientes. La conclusión debe deducirse de la proposición dada sin tomar en cuenta el valor de verdad.
   a) $6 < 9$ $\quad$ c) $-2 - (-4) \in P$ $\quad$ e) $-3 - (-1) \in P$
   b) $-5 < -1$ $\quad$ d) $5 - 8 \in P$ $\quad$ f) $14 - 7 \in P$
4. Aplique en el problema anterior, la definición de **mayor que.** Invierta las desigualdades de los incisos a) y b).
5. Justifique cada una de las siguientes implicaciones considerándola verdadera, complétela cuando no tenga conclusión escrita.
   a) $-a < 0 \Rightarrow a \in P$
   b) $3 \in P \Rightarrow 3 > 0$
   c) $a \neq b$ y $a \not< b \Rightarrow$ ________
   d) $3 > 1 \Rightarrow 3 - 1 \in P$
   g) $3 < 10$ y $10 < 50 \Rightarrow 3 < 50$
   h) $5 > x$ y $x > 0 \Rightarrow 5x > x^2$
   i) a es positivo y $b + 2$ es positivo, entonces $a(b + 2)$ es positivo.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

e) $5 \nless 3$ y $5 \neq 3 \Rightarrow$ ______
f) x no es mayor que 0 y x no es menor que $0 \Rightarrow$ ______

j) $x < y$ y $y < z + 3 \Rightarrow x < z + 3$

6. Justifique los pasos dados en la demostración del Teorema 5-4.

$a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

1. $a > b$
2. $c < 0 \Rightarrow -c > 0$
3. $a(-c) > b(-c)$
4. $-ac > -bc$
5. $ac < bc$

7. Demuestre el Teorema 5-5.
8. Demuestre el Teorema 5-6.

Resuelva las siguientes desigualdades justificando sólo los pasos en que aplique postulados o teoremas de este capítulo.

9. $2x + 1 > 3$

Solución: $2x + 1 > 3$

$(2x + 1) + (-1) > 3 + (-1)$ Postulado 5-3 aditivo

$2x > 2$

$(\frac{1}{2})\, 2x > (\frac{1}{2})\, 2$ Postulado 5-4 multiplicativo

$x > 1$

$\{x \in R \mid x > 1\}$

10. $2x - \frac{1}{2} > 3x + \frac{2}{3}$

11. $\frac{3x + 7}{-3} < 1$

12. $-4x < 3x + 7$

13. $\frac{x}{2} > -5x + \frac{2}{3}$

14. Complete la solución

$2x - 7 > -3$

$2x >$ ______ Postulado 5-3

$2x >$ ______

____ $>$ ______ Postulado 5-4

____ $>$ ______

$\{x \in R \mid x > 2\}$

15. Resuelva: $4 - 3x > 4$

Módulo 2

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Demostrará el ordenamiento de los enteros por medio del postulado aditivo.
2. Explicará cuáles son los números racionales
3. Dará un ejemplo de densidad.
4. Ordenará números reales de menor a mayor y de mayor a menor.
5. Demostrará la densidad de los números racionales.
6. Calculará promedios de dos números dados.
7. Demostrará el teorema sobre fracciones iguales a cero.
8. Demostrará el teorema $w, x, y, z \in R$ $y, z > 0$

$$\frac{x}{y} > \frac{w}{z} \Longleftrightarrow x\,z > w\,y$$

ESQUEMA RESUMEN

ORDENAMIENTO DE LOS ENTEROS - Inducción matemática

NUMEROS RACIONALES —
- Características
- Campo ordenado
- Densidad

TEOREMA SOBRE UNA FRACCION IGUAL A CERO

Si $x, y \in E$; $y \neq 0$

$$\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

2.1 Ordenamiento de los enteros

¿Cómo ordenamos los enteros?

Teorema 5-7. $1 > 0$

Demostración:

$1 > 0$ ó $1 < 0$ ó $1 = 0$	Tricotomía
$1 \neq 0$	Postulado de identidad inciso c).
$1 < 0$	Hipótesis. Si llegamos a un absurdo o contradicción, nuestra hipótesis será falsa y la disyunción nos señalará la verdad. Método indirecto.
$1 < 0 \Rightarrow -1 > 0$	Definición de número negativo.
$\Rightarrow (-1)(-1) > 0\,(-1)$	Postulado 5-4.
$\Rightarrow 1 > 0$	Contradicción entre la hipótesis y la conclusión por lo que la hipótesis es falsa.
$1 \nless 0,\ 1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0$	

Corolario: Como $1 \in N$ y $1 \in P$ entonces si $x \in N \Rightarrow x \in P$

Si a $1 > 0$ le aplicamos el postulado 5-3 aditivo sumándole la unidad a cada lado tendremos: $1 + 1 > 0 + 1$ y por sustitución $2 > 1$, aplicando el mismo postulado a este resultado y así sucesivamente a lo que resulte, tendremos un orden establecido para los elementos de N justificado por el postulado transitivo:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

Si después de comprobar unos cuantos casos aceptamos que $N \subset P$, es decir, que todos los números naturales son mayores que 0 y que por tanto sus inversos serán los números enteros negativos o menores que 0.

$$\ldots -4 < -3 < -2 < -1 < 0$$

Razonamiento matemático

¿Qué tipo de razonamiento estamos empleando? debemos recordar que con este tipo de razonamiento las conclusiones no son necesariamente válidas pues es un razonamiento inductivo, por lo que después de demostrar que se cumplen en un caso particular, para un número $n \in E$, habrá que demostrar **deductivamente** que se cumplen para el siguiente número $n + 1$, para entonces **sí** aceptar como conclusión que se cumplirán para **todos** los elementos de E.

A este procedimiento se le llama **inducción matemática** o también **criterio de la inducción** y su aplicación requiere mucha más experiencia

de parte del estudiante que la que hasta aquí haya obtenido. Por lo pronto aceptaremos que $N \subset P$.

2.2 Números racionales. Densidad

Los números racionales sí forman un campo

En la Unidad III del texto anterior hemos definido al conjunto de números enteros y una razon para ampliar este conjunto fue que ningún entero multiplicado por 8 da 4, podemos observar que eso significa que los elementos de E **no** tienen un inverso para la multiplicación o recíproco en el mismo conjunto, por lo cual E **no es un conjunto cerrado** para la multiplicación, de modo que aunque E es un conjunto ordenado, **no es un campo** ya que sus elementos no cumplen con los postulados de cerradura e inversos. Un conjunto mucho más "rico" que E, cuyos elementos **sí** cumplen con los postulados de campo, es el conjunto D de los números racionales.

Definición:

Número racional es el que se puede representar por el cociente de dos enteros, denominador diferente de 0.

$$D = \{x \mid x = \tfrac{a}{b},\ a, b \in E,\ b \neq 0\}, \qquad D \subset R$$

Este conjunto es, entonces, un campo y el teorema............. 3-20 ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$) junto con los dos siguientes nos permitirá ordenar sus elementos, con lo cual D formará un **campo ordenado.**

Una fracción es igual a cero si...

Teorema 5-8. $x, y \in E,\ y \neq 0\ \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

El enunciado para este teorema podría escribirse como sigue: "Una fracción es igual a cero, **si y sólo si** su numerador es cero"

Este teorema adquiere gran importancia en la solución de ecuaciones con fracciones, y puede hacerse extensivo a los números reales si consideramos $x, y \in R$.

Demostración:

$\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow y \cdot 0 = x$	Definición de la división (observe que es doble implicación.
$\Leftrightarrow 0 = x$	
$\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$	

El teorema siguiente condiciona que los denominadores de las fracciones sean números positivos. Podría condicionarse que ambos denominadores fueran negativos con el mismo resultado, pero de ningún modo pueden tener signos diferentes.

Los números racionales forman un campo ordenado

Teorema 5-9 $w, x, y, z \in R;\ y, z > 0;\ \frac{x}{y} > \frac{w}{z} \Leftrightarrow xz > wy$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Una fracción es mayor que otra si y sólo si, el producto en cruz de numeradores y denominadores da una desigualdad en el mismo sentido.

Las fracciones mencionadas pueden interpretarse como **números racionales.**

Ejemplos: Establecer sentido de desigualdad entre:

a) $\frac{21}{4}, \frac{17}{3}$

$$21 \cdot 3 = 63, \quad 17 \cdot 4 = 68$$
$$63 < 68$$
$$\frac{21}{4} < \frac{17}{3}$$

b) $\frac{4}{-3}, -\frac{7}{5}$

$$(-4)5 = -20, \ (-7)3 = -21$$
$$\frac{4}{-3} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}, \quad -\frac{7}{5} = \frac{-7}{5} = \frac{7}{-5}$$
$$-20 > -21$$
$$\frac{-4}{3} > \frac{-7}{5}$$
$$\frac{4}{-3} > -\frac{7}{5}$$

Estos teoremas, 3-20, 5-8 y 5-9, justifican que podemos referirnos al conjunto D como un **campo ordenado,** además entre los elementos de este conjunto existe una propiedad muy importante a la que llamamos **densidad.**

Densidad

Definición:

Entre dos números racionales **siempre** hay otro número racional.

El número conocido como **promedio** de dos o como **media aritmética** es una prueba de la propiedad **densidad.**

Media aritmética: $a, b \in D \Longrightarrow \frac{a+b}{2} \in D$

Ejemplos:

a) Entre 5 y 6 la media aritmética es $\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$

b) Entre 5 y $\frac{11}{2}$ la media aritmética es $\frac{5 + \frac{11}{2}}{2} = 21/4$

y se puede continuar indefinidamente localizando un número entre 5 y la media aritmética que resulte.

El problema 3 de los siguientes Reactivos de autoevaluación presenta simbólicamente esta propiedad a la que haremos referencia en el tema "Gráfica de un conjunto numérico".

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Ordene el siguiente conjunto de números de menor a mayor (<)
$\{5.2, -2.8, -\frac{12}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 7.6\}$
2. Ordene el siguiente conjunto de números de mayor a menor (>)
$\{.1, 0, .01, 1, .12, .123, .012, .1235\}$
3. Si $a > b$, demuestre que $a > \frac{a+b}{2} > b$. Esta notación representa la conjunción $a > \frac{a+b}{2}$ y $\frac{a+b}{2} > b$, que demuestra la propiedad de los números racionales llamada **densidad.** $\frac{a+b}{2}$ se llama la **media aritmética** de a y b.
4. Demuestre que: $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$
5. Encuentre la media aritmética entre:
a) 2 y 7
b) -3 y 5
c) -3.6 y 2.5
d) $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$
e) $\frac{2}{3}$ y 3
6. Demuestre el Teorema 5-9. $w, x, y, z \in R$, $y, z > 0$
$$\frac{x}{y} > \frac{w}{z} \Leftrightarrow xz > wy$$
7. Llene el espacio entre los números con el símbolo que haga verdadera la proposición, escogiendo entre <, =, >.

a) $\frac{-7}{-5}$ ______ 0

b) 1.301 ______ 1.3001

c) $\frac{-7}{2}$ ______ $-\frac{9}{4}$

d) $-\frac{1}{3}$ ______ $-\frac{1}{4}$

e) $\frac{-5}{3}$ ______ 0

f) $\frac{5}{7}$ ______ $\frac{3}{5}$

g) $\frac{16}{-12}$ ______ $\frac{-4}{3}$

h) $\frac{-3}{-5}$ ______ $\frac{-5}{7}$

i) -3.002 ______ -3.020

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Señalará en qué consiste una recta numérica.
2. Explicará la orientación positiva y negativa de una recta numérica.
3. Explicará cuáles son los llamados números racionales.
4. Dada una serie de puntos, determinará sus coordenadas.
5. Dada una serie de coordenadas, graficará los puntos correspondientes.
6. Mencionará en qué consiste el valor absoluto.
7. Obtendrá valores absolutos de diferentes puntos de la recta numérica.
8. Definirá el concepto de distancia entre dos puntos
9. Resolverá problemas relativos a la distancia entre dos puntos.

ESQUEMA RESUMEN

Representación geométrica de los números reales:

$$\left.\begin{array}{l}\text{La recta numérica}\\ \text{Orientación positiva}\\ \text{Orientación negativa}\end{array}\right] \text{— sistema coordenado lineal}$$

Valor absoluto

Distancia entre dos puntos en la recta numérica.

Definiciones de valor absoluto.

$$a, c \in R \text{ y } c > 0$$
$$|a| = c \Leftrightarrow a = c \text{ ó } a = -c$$
$$|a| > c \Leftrightarrow a > c \text{ ó } a < -c$$
$$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$$

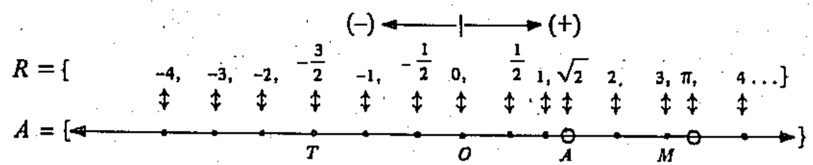
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

3.1 Representación geométrica de los números reales

Hemos utilizado el **criterio de inducción o inducción matemática** para establecer un orden entre los elementos del conjunto E, que a su vez nos ha servido, junto con los teoremas 5-8 y 5-9, para establecer un orden entre los elementos del conjunto D. Si consideramos que una línea recta es un conjunto de puntos que cumplen con una condición y llamamos a ese conjunto A, podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de R y los de A, empezando por establecer la correspondencia entre un elemento de A y el elemento 0 de R.

El conjunto de puntos sobre una recta

Podemos escribir los números enteros en el orden definido, escribiendo el uno a la derecha del cero o a la izquierda del cero antes de establecer la correspondencia; en el primer caso, decimos que se le da **orientación positiva** y en el segundo caso, **orientación negativa. La orientación positiva** es la acostumbrada y será la que consideraremos nosotros, de modo que los números **positivos** quedan a la derecha del cero y los números **negativos** a la izquierda y cualquier número a la derecha de otro **es mayor que él.**



Las cabezas de flecha indican lo mismo que los puntos suspensivos en los conjuntos, es decir, que se sigue hasta infinito.

Si dividimos el espacio entre 0 y 1 o entre dos enteros consecutivos cualesquiera en "q" divisiones iguales, podemos establecer la correspondencia entre un punto de la recta A y cualquier número racional, $\frac{p}{q}$, y siguiendo este procedimiento nos encontraremos de que aun con la propiedad **densidad** de los números racionales, nos quedan muchísimos "huecos" en la recta, a menos que tomemos en cuenta a los elementos del conjunto D', los **irracionales,** que vendrían a "llenar esos huecos" como se ve en la gráfica anterior con los números **irracionales** $\sqrt{2}$, y π.

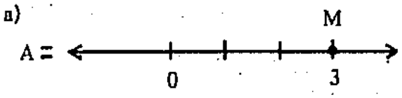
Los números irracionales en la recta

Al conjunto de puntos que forman la recta (A) lo llamamos **recta numérica** y al punto en correspondencia con el número 0, por habernos servido de base para la correspondencia, lo llamamos **origen.** De este modo cualquier punto P, estará en correspondencia con un número n y decimos de ellos lo siguiente:

> "P es la gráfica o representación geométrica del número n." o también que "n es la **coordenada** de P" lo cual simbolizamos $P(n)$, que se lee "P en n"

Ejemplos:

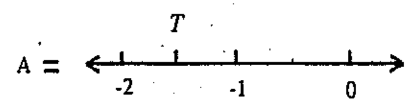
a)



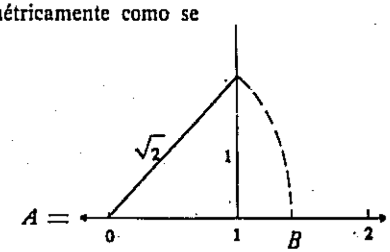
M(3), se lee M en 3 y significa que 3 es la coordenada de M o también que M es la **gráfica** del 3.

b) La coordenada de T es $-\frac{3}{2}$

entonces $T\left(-\frac{3}{2}\right)$



c) $B(\sqrt{2})$. El punto B se puede situar geométricamente como se muestra en el dibujo.

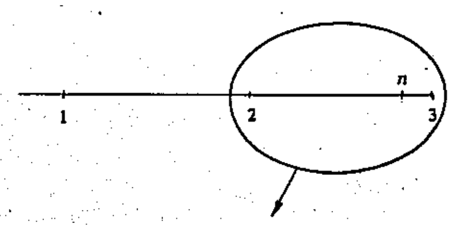


Todos los números reales pueden escribirse en su forma decimal (los irracionales tendrán una parte decimal infinita y no periódica), y esta forma nos permite localizar, en forma aproximada, la posición de la gráfica de cualquier número real sin necesidad de construcciones geométricas difíciles y engorrosas. Por lo anterior, podemos decir que: **A cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y a cada punto le corresponde uno y sólo un número real.**

Ejemplo:

Localice $n = 2.743\ldots$, número irracional

$1 < 2 < 3$

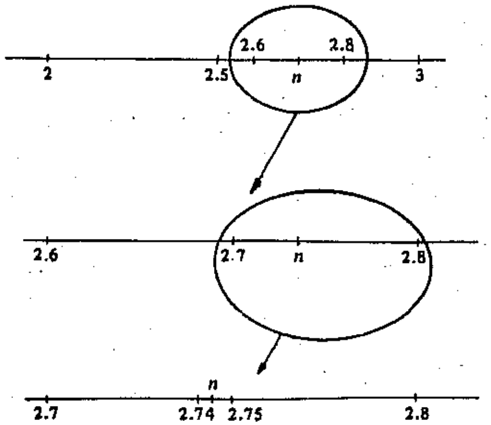


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$2.6 < 2.7 < 2.8$

$2.7 < 2.74 < 2.8$

$2.74 < 2.743 < 2.75$



Se puede observar que la exactitud de la gráfica de n depende del número de subdivisiones que hagamos y consecuentemente del tamaño del dibujo, el error entre la gráfica y el valor exacto de la coordenada puede hacerse tan pequeño como se desee, escogiendo la escala lo suficientemente grande

Definición:

Sistema Coordenado Lineal

> A esta correspondencia uno a uno o biunívoca entre los puntos de A y los elementos de R le llamaremos **sistema coordenado lineal.**

3.2. Valor absoluto

En la recta numérica las coordenadas de cada punto nos lo sitúan a una determinada distancia del **origen,** a la derecha, si el número es positivo o a la izquierda, si es negativo, por ejemplo: La gráfica del número 6 está 6 unidades a la derecha del 0, en cambio la gráfica de -6 está a 6 unidades a la izquierda del 0. En ambos casos decimos que la distancia entre cualquiera de los dos puntos y el **origen,** es de 6 unidades y aquí no nos interesa el signo, que sólo nos sirvió para saber en qué sentido medir la distancia, en otras palabras, al hablar de distancia nos interesa el valor sin considerar el signo, o también podemos decir que nos interesa que el valor **siempre sea positivo;** la coordenada nos da entonces el **valor de la distancia** al origen y no tomamos en cuenta su signo, pero cuando consideramos la **distancia** entre dos puntos cualquiera, la **resta** de sus coordenadas nos proporciona ese valor, pero tampoco debemos considerar el signo. Ejemplo: La distancia entre $A(6)$ y $B(-2)$ nos la da la resta, $(6) - (-2) = 8$ ó $(-2) - (6) = -8$, en donde el valor es 8. Para evitar el inconveniente del signo o el de buscar la coorde-

Valores absolutos en la recta numérica

nada mayor para restarle la menor y obtener un resultado siempre positivo, se ha inventado un término que aclara la situación: **valor absoluto;** el símbolo para representarlo son dos líneas verticales una a cada lado del número o de la expresión que lo represente. Ejemplos:

a) $|x|$ se lee el valor absoluto de x.
b) $|(6) - (-2)|$ se lee el valor absoluto de la restá.
c) $|(-2) - (6)|$ se lee el valor absoluto de la resta.

La definición del **valor absoluto** de cualquier número real nos dice que es el mismo número cuando éste sea positivo o que tomemos el inverso del número en caso de que sea negativo o que es cero si éste es cero. En pocas palabras, el valor absoluto siempre es positivo; las disyunciones que establece la definición las simbolizamos con el corchete $= \{$

Ejemplo:

$$x = \begin{cases} 5 \\ -1 \\ 3 \end{cases}$$

x es igual a 5 o es igual a -1 o es igual a 3

Definición:

El valor absoluto de un número es...

> El valor absoluto de un número real x, es x si el número es positivo o es $-x$ si el número es negativo o es 0 si el número es el 0.
>
> $$x \in R,\ |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|3| = 3$, porque $3 > 0$

b) $|-3| = -(-3) = 3$, porque $-3 < 0$ tomamos su inverso

c) $$|x-1| = \begin{cases} x - 1, & \text{si } (x-1) > 0 \\ -(x-1), & \text{si } (x-1) < 0 \\ 0, & \text{si } (x-1) = 0 \end{cases}$$

d) Si $|x| = 3$ entonces $x = 3$ ó $x = -3$ por incisos a) y b) anteriores.

e) $|x-1| = 5 \implies x - 1 = 5$ ó $x - 1 = -5$
$x - 1 = 5 \implies x = 6$
$x - 1 = -5 \implies x = -4$
$|x-1| = 5 \implies x = 6$ ó $x = -4$

f) $|x| > 7 \implies x > 7$ ó $x < -7$, La segunda proposición de la disyunción $(x < -7)$ la desigualdad está invertida ¿por qué? Ver teorema 5-1

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

g) $|x| < 7 \implies$ ...?

De los ejemplos anteriores podemos deducir las siguientes definiciones:

$a, c \in R$ y $c > 0$ (Recuerde que a, c pueden ser expresiones algebraicas)
$|a| = c \Leftrightarrow a = c$ ó $a = -c$
$|a| > c \Leftrightarrow a > c$ ó $a < -c$
$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$

$c < a < c$ es una forma de escribir la conjunción de $a > -c$ y $a < c$

Usando la definición de **valor absoluto** diga si la siguiente proposición es falsa o verdadera y explique. $|x| < -1$. *

3.3. Distancia entre dos puntos en la recta numérica.

La distancia de cualquier punto $P(x)$ al **origen** será $|x|$, ya que $|x - 0| = |x|$

La distancia entre dos puntos cualquiera $A(x)$ y $B(y)$ será el **valor absoluto** de la resta de sus coordenadas en el orden que se prefiera, $|x - y| = |y - x|$.

El concepto de **valor absoluto** nos evita inconvenientes con los signos en el manejo de la distancia en el sistema coordenado lineal.

Ejemplos:

a) Distancia entre $A(6)$ y $B(-3)$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= |(6) - (-3)| = |(-3) - (6)| \\ &= |6 + 3| = |-3 - 6| \\ &= |9| = |-9| \\ &= 9\end{aligned}$$

La recta sobre las letras AB significa o representa: longitud del segmento de recta entre A y B.

b) Distancia entre $C(-\frac{1}{2})$ y $D(-\frac{11}{5})$

$$\overline{CD} = \left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{11}{5}\right)\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{11}{5}\right| = \left|\frac{-5+22}{10}\right| = \left|\frac{17}{10}\right| = \frac{17}{10}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Si las coordenadas de los puntos A y B son respectivamente 2 y 6 demuestre que la coordenada del punto medio P, es la media aritmética de las coordenadas de los extremos. (También se le llama promedio).
$A(2)$ y $B(6) \Rightarrow P(4)$

*Por definición, ningún valor absoluto es negativo, de donde $|x| < -1$ es una proposición falsa.

2. Encuentre las coordenadas de los puntos medios entre
a) 3 y −3   b) 2.1 y − 5.1   c) 7 y 3.4
3. Escriba el valor numérico más simple para x.
a) $x = -|12|$ b) $x = |-12|$ c) $x = -|-12|$
d) $x = \left|\frac{1}{3} - \frac{5}{3}\right|$ e) $x = \left|\frac{1}{3}\right| - \left|-\frac{5}{3}\right|$
4. Demuestre que para todo $a \in R$, $-|a| \leq a \leq |a|$. Indicación: Use la definición de **valor absoluto**.
5. Escriba con sus palabras la interpretación geométrica de las siguientes expresiones:
a) $x > y$ **Solución:** Geométricamente o lo que es lo mismo sobre la recta numérica x es un número a la derecha de y.
b) $|a - 6| = 1$ c) $|a| > 5$ d) $|a - 2| = 4$ e) $|a| < 5$
f) $3.14 < \pi < 3.15$ g) $|a + 3| > 1$ h) $a > 0$
6. Demuestre que $|a + b| \leq |a| + |b|$
7. Efectúe las operaciones indicadas.
a) $5 + |-3|$ b) $|6| + |4|$ c) $|-4| + |4 - 5|$
d) $|-3| \cdot |-4|$ e) $|7| - |-2|$
8. Determine el valor de x en las expresiones:
a) $|x| = 2$ b) $|x - 2| = 5$ c) $|3 - x| = 6$
d) $|x + 5| > 2$ e) $|x + 5| < 2$ f) $|3 - 2x| \geq 5$
g) $|5x + 1| \leq 2$
9. Determinar las distancias entre cada par de puntos dadas sus coordenadas.
a) $A(3)$, $B(7)$ b) $M(-2)$, $N(4)$
c) $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{15}{7}\right)$ d) $T\left(\frac{3}{4}\right)$ $S\left(-\frac{2}{3}\right)$
e) $A(5)$, $B\left(-\frac{3}{4}\right)$ f) $M\left(-\frac{8}{7}\right)$, $N\left(-\frac{31}{4}\right)$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 4

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará qué es un intervalo.
2. Explicará a qué se le llama intervalo abierto.
3. Explicará a qué se le llama intervalo cerrado.
4. Graficará conjuntos numéricos.
5. Diferenciará intervalos abiertos y cerrados después de resolver una lista de desigualdades
6. Explicará la diferencia entre intervalo abierto e intervalo cerrado.
7. Identificará en un gráfico un intervalo abierto y un intervalo cerrado.
8. Indicará un intervalo cerrado utilizando los conceptos de igualdades y desigualdades.

ESQUEMA RESUMEN

GRAFICA DE UN CONJUNTO NUMERICO

INTERVALO —
- ABIERTO
- CERRADO

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

4.1 Gráfica de un conjunto numérico

Hemos dicho que la **gráfica de un número real es un punto en el sistema coordenado lineal,** por tanto la gráfica de un conjunto de números será un conjunto de puntos.

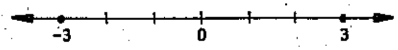
Algunos conjuntos numéricos pueden expresarse simbólicamente utilizando el **valor absoluto.**

Por ejemplo:

a) $|x| = 3$, se interpretará como el conjunto de puntos que están a 3 unidades de origen. $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ó $x = -3$

Solución: $\{3\} \cup \{-3\} = \{3, -3\}$

Gráfica



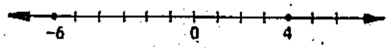
b) $|x + 1| = 5$, se puede interpretar como el conjunto de puntos que están a 5 unidades de -1. $|x + 1| = |x - (-1)| = 5$

$$|x + 1| = 5 \Leftrightarrow x + 1 = 5 \text{ ó } x + 1 = -5$$

Solución:

$\{x \mid |x - (-1)| = 5\} = \{x \mid x + 1 = 5 \text{ ó } x + 1 = -5\} = \{4, -6\}$

Gráfica:



Definición:

Intervalo

A la gráfica de un conjunto numérico expresado con el **valor absoluto** y **menor que,** o su **conjunción equivalente,** se le llama un **intervalo.**

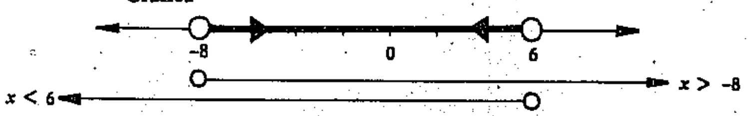
c) $|x + 1| < 7$ se interpreta como el conjunto de puntos cuya distancia al punto de coordenada -1 es **menor** de 7 unidades.

$$\{x \mid |x - (-1)| < 7\}$$
$$|x + 1| < 7 \Leftrightarrow -7 < x + 1 < 7$$
$$\Leftrightarrow -8 < x < 6 \qquad \text{Postulado 5-3}$$

Solución: $\{x \mid -8 < x < 6\} = \{x \mid -8 < x\} \cap \{x \mid x < 6\}$

El conjunto es infinito, incluye a **todos** los números reales mayores que -8 en un caso, y a los menores que 6 en el otro, pero **no incluyen a** esos números (-8 y 6).

Gráfica



Los puntos correspondientes al -8 y al 6 se dibujan "huecos" para indicar que **no** forman parte del conjunto de puntos.

Intervalo abierto

A los **intervalos** como el del ejemplo c), que no incluyen los extremos se les nombra **intervalos abiertos,** ya que por la propiedad de **densidad** siempre encontraremos otro número entre el 6 y el menor más próximo a 6 que se nos pueda ocurrir, lo mismo sucede en cuanto al extremo en -8.

d) $|x - 2| \leq 3$. Recuerde que $\leq$ es la disyunción $<$ ó $=$. Esta proposición se puede interpretar como el conjunto de puntos cuya distancia a 2 es menor o igual a 3 unidades. $\{x \mid |x - 2| \leq 3\}$.

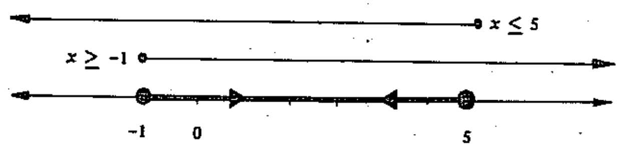
$$|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow x - 2 \leq 3 \quad \text{y} \quad 2 \geq -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq 5 \quad \text{y} \quad x \geq -1$$

Solución: $\{x \mid x \leq 5 \text{ y } x \geq -1\} = \{x \mid x \leq 5\} \cap \{x \mid x \geq -1\}$

Intervalo cerrado

En este caso los extremos del intervalo, el 5 y el -1 sí están incluidos por el signo $=$ y en la gráfica aparecerán "llenos".

Gráfica



A los intervalos como el del ejemplo d), en los que los extremos están incluidos se les nombra **intervalo cerrado.**

Los conceptos **intervalo abierto, intervalo cerrado** adquieren un valor extraordinario en el estudio del cálculo en unidades posteriores.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Determine todos los valores posibles para x en las expresiones siguientes, escríbalos como **conjunto solución** y **grafíquelos.**

   a) $|x| = 10$ b) $|x - 1| = 3$ c) $|x + 4| > 1$

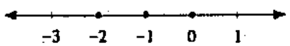
   d) $|x + 4| < 1$ e) $|3 - x| = 6$ f) $|2 - x| \leq 2$

2. Determine los conjuntos solución o de verdad de los conjuntos que se dan y dibuje su gráfica en la recta numérica. Considere el conjunto de reemplazamiento indicado en cada problema.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

a) $\{x \in E \mid -3 < x < 1\}$
$\{x \in E \mid x > -3 \text{ y } x < 1\} = \{-2, -1, 0\}$

Respuesta. En el conjunto solución sólo tendremos enteros por lo que sólo hay 3 elementos en el conjunto.



b) $\{x \in R \mid x < 2 \text{ y } x < 6\}$ c) $\{x \in E \mid -\frac{7}{2} < x < \frac{9}{4}\}$

d) $\{x \in R \mid x < 2 \text{ ó } x < 6\}$ e) $\{x \in R \mid x > -1 \text{ ó } x < 3\}$

f) $\{x \in R \mid x > 3 \text{ y } x < -1\}$ g) $\{x \in R \mid |x + 3| \leq 1\}$

3. De acuerdo con las definiciones dadas al final del tema **valor absoluto,** emplee los postulados y teoremas sobre desigualdades para resolver las siguientes desigualdades. Diga si la gráfica es o no un **intervalo,** en caso afirmativo si es **cerrado o abierto.**

a) $|2x + 6| > 4$ b) $|5x - 1| \leq 9$

c) $|3 - 2x| < 1$ d) $|5 + 3x| < 3$

4. Use los postulados de orden, definiciones y teoremas necesarios para resolver las siguientes desigualdades.
Grafique en el sistema coordenado lineal el conjunto solución que encuentre, no es necesario justificar.

a) $-2x > 4$ b) $3x + 5 < 7x + 4$ c) $3x - 3 \leq 4$

d) $3y - 5 > 4 - (y - 1)$ e) $6(z - 2) \geq 2(z - 4)$

f) $|x - 1| > 8$ g) $|4 - y| \leq 6$ h) $1 > \frac{3x + 7}{3}$

BIBLIOGRAFIA DE ESTA UNIDAD

"ALGEBRA" Recs. Sparks. Ed. Reverte. 1973.
"ALGEBRA". Florence Lovaglia, Meritt Elmore, Donald Conway. Ed. Harla. 1973.

Paneles de verificación

MODULO 1 - VALIDACION

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$

$a > 0$ y $b > 0$	Dado		$a < 0$ y $b < 0$	
$a \cdot b > 0 \cdot b$	Postulado 5-4		$b < 0 \Rightarrow -b > 0$	Teorema 5-1
$ab > 0$			$a(-b) < 0\,(-b)$	Postulado 5-4
			$-ab < 0$	
			$ab > 0$	Teorema 5-1

2. $a \in R$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ Cualquier número real diferente de 0 multiplicado por sí mismo da un producto positivo.

$a \in R$	Dado		
$a > 0$ ó $a < 0$	Tricotomía y $a \neq 0$		
$a > 0$	Hipótesis	$a < 0$	Hipótesis
$a \cdot a > 0 \cdot a$	Postulado 5-4	$a \cdot a > 0 \cdot a$	Teorema 5-4
$a^2 > 0$		$a^2 > 0$	

3. a) $9 - 6 \in P$ ó $9 - 6 > 0$
b) $(-1) - (-5) \in P$ ó $(-1) - (-5) > 0$
c) $-4 < -2$
d) $8 < 5$
e) $-1 < -3$
f) $7 < 14$

4. a) $6 - 9 \in P$
b) $(-5) - (-1) \in P$
c) $-2 > -4$
d) $5 > 8$
e) $-3 > -1$
f) $14 > 7$

5. a) Definición de números negativos.
b) Definición de números positivos
c) $a \neq b$ y $a \nless b \Rightarrow a > b$. Tricotomía.
d) Teorema 5-2 o definición de "mayor que".
e) $5 \nless 3$ y $5 \neq 3 \Rightarrow 5 > 3$. Tricotomía.
f) $x \ngtr 0$ y $x \nless 0 \Rightarrow x = 0$. Tricotomía.
g) Postulado 5-2. Transitivo.
h) Postulado 5-4. Multiplicativo.
i) Problema 2. La conclusión obtenida en este problema se puede enunciar como sigue: "El conjunto P es cerrado para la multiplicación"
j) Postulado 5-2. Transitivo.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

6. Teorema 5-4. $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

$a > b,\ c < 0$	Dado
$c < 0 \Rightarrow -c > 0$	Definición de número negativo ó Teorema 5-1
$a(-c) > b(-c)$	Postulado 5-4
$-ac > -bc$	
$ac < bc$	Teorema 5-1

7. Teorema 5-5. $a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$

$a > b$	Dado
$a + c > b + c$	Postulado 5-3
$c > d$	Dado
$b + c > b + d$	Postulado 5-3
$a + c > b + c > b + d$	
$a + c > b + d$	Postulado 5-2 transitivo

8. Teorema 5-6. $a, b, c, d \in P\ \ a > b,\ c > d \Rightarrow ac > bd$

$a > b,\ c > 0$	Dado
$ac > bc$	Postulado 5-4
$c > d,\ b > 0$	Dado
$bc > bd$	Postulado 5-4
$ac > bc > bd$	
$ac > bd$	Postulado 5-2

9. $2x + 1 > 3$ Resuelto en el texto.

10. $2x - \frac{1}{2} > 3x + \frac{2}{3}$

$(2x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} > (3x + \frac{2}{3}) + \frac{1}{2}$	Postulado 5-3
$2x > 3x + \frac{7}{6}$	Postulado 5-3
$2x + (-3x) > (-3x) + (3x + \frac{7}{6})$	
$-x > \frac{7}{6}$	Teorema 5-1
$x < -\frac{7}{6}$	

11. $\frac{3x+7}{-3} < 1$

$(-3)\ \frac{3x+7}{-3} > (-3)\ 1$	Teorema 5-4
$3x + 7 > -3$	
$(3x + 7) + (-7) > -3 + (-7)$	Postulado 5-3
$3x > -10$	
$(\frac{1}{3})\, 3x > (\frac{1}{3})\,(-10)$	Postulado 5-4
$x > -\frac{10}{3}$	

12. $-4x < 3x + 7$

$-4x + (-3x) < (-3x) + (3x + 7)$	Postulado 5-3
$-7x < 7$	
$(-\frac{1}{7})\,(-7x) > (-\frac{1}{7})\,7$	Teorema 5-4
$x > -1$	

13. $\frac{x}{2} > -5x + \frac{2}{3}$

$2 \cdot \frac{x}{2} > 2\,(-5x + \frac{2}{3})$	Postulado 5-4
$x > -10x + \frac{4}{3}$	
$x + 10x > 10x + (-10x + \frac{4}{3})$	Postulado 5-3

MODULO 2 - VALIDACION

1. Empezamos por ordenar separadamente los negativos y los positivos, después de escribirlos en forma de fracción.

$-2.8 = -\frac{28}{10},\ 7.6 = \frac{76}{10},\ 5.2 = \frac{52}{10}$

$-\frac{28}{10} < -\frac{12}{5}$	$-\frac{12}{5} > -\frac{7}{2}$	$-\frac{28}{10} > -\frac{7}{2}$	$-\frac{12}{5} < -\frac{3}{4}$
$(-28)5 \dagger (-12)10$	$(-12)2 \dagger (-7)5$	$(-28)2 \dagger (-7)10$	$(-12)4 \dagger (-3)5$
$-140 < -120$	$-24 > -35$	$-56 > -70$	$-48 < -15$

$\frac{7}{8} < \frac{52}{10} < \frac{76}{10}$ $\qquad -\frac{7}{2} < -\frac{28}{10} < -\frac{12}{5} < -\frac{3}{4}$

Solución: $\{-\frac{7}{2}, -2.8, -\frac{12}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 5.2, 7.6\}$

2. $.1 = \frac{1}{10},\ .01 = \frac{1}{100},\ .12 = \frac{12}{100},\ .123 = \frac{123}{1000}$

$.012 = \frac{12}{1000},\ .1235 = \frac{1235}{10000}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Siempre que sea práctico úsese un común denominador antes de comparar.

$\frac{1235}{10000}, \frac{120}{10000}, \frac{1230}{10000}, \frac{1200}{10000}, \frac{100}{10000}, \frac{1000}{10000}$

Solución: {1, .1235, .123, .12, .1, .012, .01, 0}

3. $a > b \Rightarrow a > \frac{a+b}{2} > b \Rightarrow a > \frac{a+b}{2}$ y $\frac{a+b}{2} > b$

$a > b$	Dado	$a > b$
$a + a > a + b$	Postulado 5-3	$a + b > b + b$
$\frac{1}{2} \cdot 2a > \frac{1}{2}(a+b)$	Postulado 5-4	$\frac{1}{2}(a+b) > \frac{1}{2} \cdot 2b$
$a > \frac{a+b}{2}$		$\frac{a+b}{2} > b$

4. $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$ $\quad \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4} < 1$

$1 < 2$	Orden de los enteros
$\frac{1}{2} \cdot 1 < \frac{1}{2} \cdot 2$	Postulado 5-4
$\frac{1}{2} < 1$	
$\frac{1}{2} < \frac{\frac{1}{2}+1}{2} < 1$	Problema 3 anterior
$\frac{1}{2} < \frac{\frac{3}{2}}{2} < 1$	
$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$	

5. a) $2 < \frac{2+7}{2} < 7$

media aritmética $\frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$

b) $\frac{-3+5}{2} = 1$

c) $\frac{-3.6+2.5}{2} = \frac{-1.1}{2} = -\frac{11}{20}$

d) $\frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{-2+3}{4}}{2} = \frac{1}{8}$

e) $\frac{\frac{2}{3}+3}{2} = \frac{\frac{11}{3}}{2} = \frac{11}{6}$

6. Teorema 5-9. $w, x, y, z \in R$ $y, z > 0$; $\frac{x}{y} > \frac{w}{z} \Leftrightarrow xz > wy$

$\frac{x}{y} > \frac{w}{z}$, $y, z > 0$	Dado
$y \cdot z > 0$	Problema 6 inciso i) de los Problemas V-1
$yz \cdot \frac{x}{y} > yz \cdot \frac{w}{z}$	Postulado 5-4
$xz > yw$	
$xz > yw$, $y, z > 0$	Dado
$y, z > 0$ $\frac{1}{y}, \frac{1}{z} > 0$	
$(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}) > 0$	Cerradura de P
$(xz)(\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y}) > (yw)(\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y})$	Postulado 5-4
$x \cdot \frac{1}{y} > w \cdot \frac{1}{z}$	
$\frac{x}{y} > \frac{w}{z}$	

7. a) $\frac{-7}{-5} > 0$ porque $\frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \in P$ y $\frac{7}{5} - 0 = \frac{7}{5} \in P$

b) $1.301 > 1.3001$ porque $1.3010 - 1.3001 = 0.0009 \in P$

c) $\frac{-7}{2} < -\frac{9}{4}$ porque $(-7)4 = -28 < (-9)2 = -18$, $-18 - (-28) = 10 \in P$

d) $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$ porque $(-1)4 = -4 < (-1)3 = -3$, $-3 - (-4) = 1 \in P$

e) $\frac{-5}{3} < 0$ porque $\frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$ y $0 - (-\frac{5}{3}) = \frac{5}{3} \in P$

f) $\frac{5}{7} > \frac{3}{5}$ porque $5 \cdot 5 > 7 \cdot 3$, $25 - 21 = 4 \in P$

g) $\frac{16}{-12} = \frac{-4}{3}$ porque $(-16)3 = -48 = (-4)12$

h) $\frac{-3}{-5} > \frac{-5}{7}$ porque $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{5} - (-\frac{5}{7}) = (\frac{3}{5} + \frac{5}{7}) \in P$

i) $-3.002 > -3.020$ porque $-3.002 - (-3.020) = 0.018 \in P$

MODULO 3 - VALIDACION

1.

1er. Método	Comprobación
$2 < 6$	$\overline{AP} = \overline{BP}$ por ser P el punto medio
$2 < \frac{2+6}{2} < 6$	$\overline{AP} = \lvert 2 - 4 \rvert = 2$
$2 < 4 < 6$	$\overline{BP} = \lvert 6 - 4 \rvert = 2$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

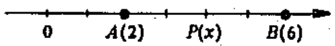
2o. Método $\qquad \overline{AP} = 2 = \overline{BP}$

$\overline{AB} = |2 - 6| = 4 \qquad |2 - x| = 2$ y $2 = |6 - x|$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \qquad \{x \mid 2 - x = 2 \text{ ó } 2 - x = -2\} \cap \{x \mid 6 - x = 2 \text{ ó } 6 - x = -2\}$

$\{x \mid x = 0 \text{ ó } x = 4\} \cap \{x \mid x = 4 \text{ ó } x = 8\}$

$\{0, 4\} \cap \{4, 8\}$



$\{4\}$

$2 < x < 6 \qquad x = 4$

Comprobación: $|2 - (4)| = 2$ y $2 = |6 - (4)|$

2. a) $A(3)$ y $B(-3)$ $\qquad x = \frac{3 + (-3)}{2}$ $\qquad$ Problema 1

Sea $P(x)$ el punto medio $\qquad = \frac{0}{2} = 0$ $\qquad$ Teorema 5-8

Solución $P(0)$. Compruébela.

b) $P(x)$: $\qquad x = \frac{2.1 + (-5.1)}{2}$ $\qquad$ Problema 1

$= \frac{-3.0}{2} = -\frac{3}{2}$

Solución $P(-\frac{3}{2})$

c) $P(x)$: $\qquad x = \frac{7 + 3.4}{2} = \frac{10.4}{2} = 5.2$

Solución $P(5.2)$. Compruébela

3. a) $x = -12$ $\qquad$ b) $x = 12$ $\qquad$ c) $x = -12$

d) $x = |\frac{1-5}{3}| = |-\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$ $\qquad$ e) $x = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$

4. $-|a| \leq a \leq |a|$ es la conjunción $-|a| \leq a$ y $a \leq |a|$

Para esta demostración usamos casi exclusivamente la definición de valor absoluto en donde tenemos $a \in R \Rightarrow |a| \geq 0$.

Demostrar: $a \leq |a|$

1a. parte

$a \geq 0 \Rightarrow a = |a|$ $\qquad$ Definición de valor absoluto

2a. parte

$a < 0$ y $|a| \geq 0$

$a < 0 \leq |a|$

$a < |a|$ $\qquad$ Postulado 5-2

Conclusión: Para todo $a \in R$, $a \leq |a|$

Demostrar: $-|a| \leq a$

1a. parte

$a \geq 0 \Rightarrow \quad |a| = a$ y $-a < 0$ $\qquad$ Definición de valor absoluto

$-|a| = -a$

$-|a| < 0 \leq a$

$-|a| < a$ $\qquad$ Postulado 5-2

2a. parte

$a < 0 \Rightarrow \quad |a| = -a$ $\qquad$ Definición de valor absoluto

$-|a| = a$

Conclusión: Para todo $a \in R$, $-|a| \leq a$

5. a) Resuelto en el texto.
b) $|a - 6| = 1$. La distancia entre a y el punto de coordenada 6 es 1.
c) $|a| > 5$. a es un punto cuya distancia al origen es mayor que 5.
d) $|a - 2| = 4$. La distancia entre a y el punto de coordenada 2 es 4.
e) $|a| < 5$. a es un punto cuya distancia al origen es menor que 5.
f) $3.14 < \pi < 3.15$. π es la coordenada de un punto entre los de coordenada 3.14 y 3.15.
g) $|a + 3| > 1$. La distancia entre a y -3 es mayor que la unidad.
h) $a > 0$. a es un punto a la derecha del origen.

6. Demostrar: $|a + b| \leq |a| + |b|$

1a. parte

De acuerdo con el problema 4 anterior

$$\begin{array}{rcccl} -|a| & \leq & a & \leq & |a| \\ -|b| & \leq & b & \leq & |b| \\ \hline -(|a| + |b|) & \leq & a + b & \leq & |a| + |b| \end{array}$$

Teorema 5-5

2a. parte.

Por definición de valor absoluto debemos demostrar las dos posibilidades

$a + b \geq 0$ y $a + b < 0$

$a + b \geq 0 \Rightarrow |a + b| = a + b$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ $\qquad$ Primera parte de esta demostración y sustitución de la igualdad

$a + b < 0 \Rightarrow \quad |a + b| = -(a + b)$

$-(|a| + |b|) \leq a + b$ $\qquad$ Primera parte de esta demostración

$|a| + |b| \geq -(a + b)$ $\qquad$ Teorema 5-4

$|a + b| \leq |a| + |b|$ $\qquad$ Sustitución de la igualdad

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

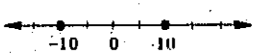
a) $5+|-3| = 5+3 = 8$ b) $|6|+|4| = 6+4 = 10$
c) $|-4|+|4-5| = 4+|-1| = 4+1 = 5$
d) $|-3|\cdot|-4| = 3\cdot 4 = 12$ e) $|7|-|-2| = 7-2 = 5$

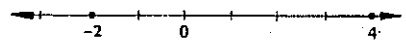
a) $|x| = 2 \Rightarrow x = 2$ ó $x = -2$
$\{-2, 2\}$
b) $|x-2| = 5 \Rightarrow x-2 = 5$ ó $x-2 = -5$
$x = 7$ ó $x = -3$
$\{-3, 7\}$
c) $|3-x| = 6 \Rightarrow 3-x = 6$ ó $3-x = -6$
$x = -3$ ó $x = 9$
$\{-3, 9\}$
d) $|x+5| > 2 \Rightarrow x+5 > 2$ ó $x+5 < -2$
$x > -3$ ó $x < -7$
$\{x \in R \mid x > 3$ ó $x < -7\}$
e) $|x+5| < 2 \Rightarrow x+5 < 2$ y $x+5 > -2$
$x < -3$ y $x > -7$
$\{x \in R \mid -7 < x < -3\}$
f) $|3-2x| \geq 5 \Rightarrow 3-2x \geq 5$ ó $3-2x \leq -5$
$-2x \geq 2$ ó $-2x \leq -8$
$x \leq -1$ ó $x \geq 4$
$\{x \in R \mid x \leq -1$ ó $x \geq 4\}$
g) $|5x+1| \leq 2 \Rightarrow 5x+1 \leq 2$ y $5x+1 \geq -2$
$5x \leq 1$ y $5x \geq -3$
$x \leq \frac{1}{5}$ y $x \geq -\frac{3}{5}$

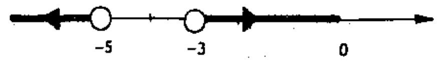
$\{x \in R \mid -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}\}$

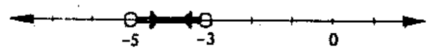
a) $\overline{AB} = |7-3| = |4| = 4$
b) $\overline{MN} = |4-(-2)| = |4+2| = 6$
c) $\overline{AB} = \left|\frac{15}{7} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{30-7}{14}\right| = \left|\frac{23}{14}\right| = \frac{23}{14}$
d) $\overline{TS} = \left|-\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{-8-9}{12}\right| = \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{17}{12}$
e) $\overline{AB} = \left|-\frac{3}{4} - 5\right| = \left|\frac{-3-20}{4}\right| = \frac{23}{4}$
f) $\overline{MN} = \left|-\frac{31}{4} - \left(-\frac{8}{7}\right)\right| = \left|-\frac{31}{4} + \frac{8}{7}\right| = \left|-\frac{185}{28}\right| = \frac{185}{28}$

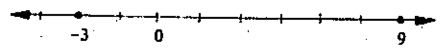
MODULO 4 - VALIDACION

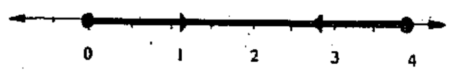
a) $|x| = 10$ $\{x \mid x = 10$ ó $x = -10\} = \{10, -10\}$


b) $|x-1| = 3$ $\{x \mid x-1 = 3$ ó $x-1 = -3\} = \{x \mid x = 4$ ó $x = -2\} = \{4, -2\}$


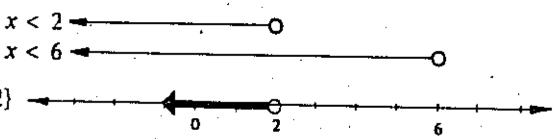
c) $|x+4| > 1$ $\{x \mid x+4 > 1$ ó $x+4 < -1\} = \{x \mid x > -3$ ó $x < -5\}$


d) $|x+4| < 1$ $\{x \mid -1 < x+4 < 1\} = \{x \mid -5 < x < -3\}$


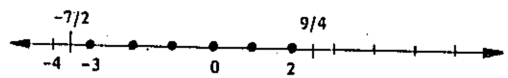
e) $|3-x| = 6$ $\{x \mid 3-x = 6$ ó $3-x = -6\} = \{x \mid x = -3$ ó $x = 9\} = \{-3, 9\}$


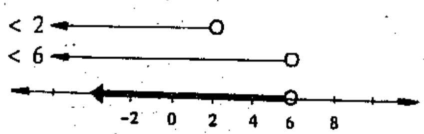
f) $|2-x| \leq 2$ $\{x \mid -2 \leq 2-x \leq 2\} = \{x \mid -4 \leq -x \leq 0\} = \{x \mid 4 \geq x \geq 0\}$


2. a) Resuelto en el texto
b) $\{x \in R \mid x < 2$ y $x < 6$ El conjunto solución es infinito, por lo que queda definido por las condiciones.

$\{x \mid x < 2\} \cap \{x \mid x < 6\}$ $x < 2$
$x < 6$
$\{x \mid x < 2\}$


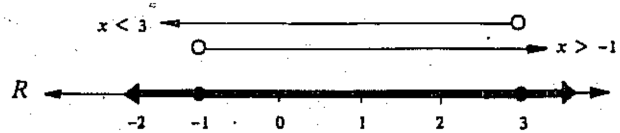
c) $\{x \in E \mid -\frac{7}{2} < x < \frac{9}{4}\}$

$\{x \mid x > -\frac{7}{2}, x \in E\} \cap \{x \mid x < \frac{9}{4}, x \in E\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$


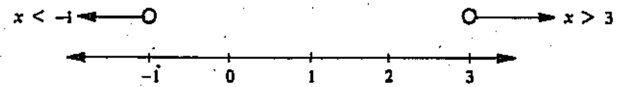
d) $\{x \in R \mid x < 2$ ó $x < 6\}$
$x < 2$
$x < 6$
$\{x \mid x < 6\}$


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

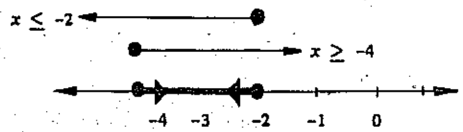
e) $\{x \in R \mid x > -1 \text{ ó } x < 3\}$



f) $\{x \in R \mid x > 3 \text{ y } x < -1\}$ $\{x \mid x > 3\} \cap \{x \mid x < -1\} = \phi$



g) $\{x \in R \mid |x + 3| \leq 1\}$ Conjunto solución infinito
$\{x \mid -1 \leq x + 3 \leq 1\} = \{x \mid -4 \leq x \leq -2\}$



3. a) $|2x + 6| > 4$

$2x + 6 > 4$ ó $2x + 6 < -4$
$2x > -2 \quad 2x < -10$
$x > -1$ ó $x < -5$

No es intervalo
$\{x \mid x > -1 \text{ ó } x < -5\}$

b) $|5x - 1| \leq 9$

$5x - 1 \leq 9$ y $5x - 1 \geq -9$
$5x \leq 10 \quad 5x \geq -8$
$x \leq 2$ y $x \geq -\frac{8}{5}$

Si es intervalo y es cerrado
$\{x \mid x \leq 2 \text{ y } x \geq -\frac{8}{5}\}$
$\{x \mid -\frac{8}{5} \leq x \leq 2\}$

c) $|3 - 2x| < 1$

$3 - 2x < 1$ y $3 - 2x > -1$
$-2x < -2 \quad -2x > -4$
$x > 1$ y $x < 2$

Si es intervalo y es abierto
$\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 2\}$
$\{x \mid 1 < x < 2\}$

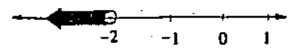
d) $|5 + 3x| < 3$

$5 + 3x < 3$ y $5 + 3x > -3$
$3x < -2 \quad 3x > -8$
$x < -\frac{2}{3}$ y $x > -\frac{8}{3}$
$-\frac{8}{3} < x < -\frac{2}{3}$

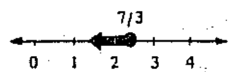
Si es intervalo y es abierto
$\{x \mid -\frac{8}{3} < x < -\frac{2}{3}\}$

4. a)

$-2x > 4$
$(-\frac{1}{2})(-2x) < (-\frac{1}{2})4$
$x < -2$
$\{x \in R \mid x < -2\}$

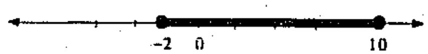


c) $3x - 3 \leq 4$
$3x \leq 4 + 3$
$x \leq \frac{7}{3}$
$\{x \mid x \leq \frac{7}{3}\}$

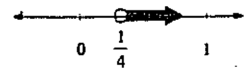


e) $6(z - 2) \geq 2(z - 4)$
$6z - 12 \geq 2z - 8$
$6z - 2z \geq -8 + 12$
$4z \geq 4$
$z \geq 1$
$\{z \mid z \geq 1\}$

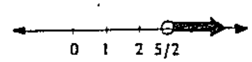
g) $|4 - y| \leq 6$
$4 - y \leq 6$ y $4 - y \geq -6$
$-y \leq 2 \quad -y \geq -10$
$y \geq -2 \quad y \leq 10$
$\{y \in R \mid y \geq -2\} \cap \{y \in R \mid y \leq 10\}$



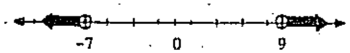
b) $3x + 5 < 7x + 4$
$3x - 7x < 4 - 5$
$-4x < -1$
$4x > 1$
$x > \frac{1}{4}$
$\{x \mid x > \frac{1}{4}\}$



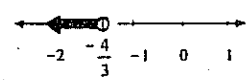
d) $3y - 5 > 4 - (y - 1)$
$3y - 5 > 4 - y + 1$
$3y + y > 5 + 5$
$4y > 10$
$y > \frac{5}{2}$
$\{y \mid y > \frac{5}{2}\}$



f) $|x - 1| > 8$
$x - 1 > 8$ ó $x - 1 < -8$
$x > 9$ ó $x < -7$
$\{x \in R \mid x > 9\} \cup \{x \in R \mid x < -7\}$



h) $1 > \frac{3x + 7}{3}$
$3 > 3x + 7$
$3 - 7 > 3x$
$3x < -4$
$x < -\frac{4}{3}$
$\{x \in R \mid x < -4/3\}$



Preparatoria abiertaOnline
Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

UNIDAD VI

EXPONENTES Y RADICALES

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

En la Unidad IV hablamos de potencias y definimos al exponente como un "número de veces", eso lo limitaba a ser un número natural y limitaba también la flexibilidad de las operaciones con potencias. En esta unidad, extendemos la idea de exponente hasta los números racionales, y conseguimos establecer la correspondencia uno a uno entre las potencias con los racionales como exponentes y los radicales, mediante el **isomorfismo**, facilitando así las operaciones y la simplificación de expresiones algebraicas.

El concepto de **isomorfismo** ha sido de gran utilidad para la misma matemática simplificando operaciones como en esta unidad lo presentamos al conseguir operar con potencias en lugar de radicales cuando así conviene; también se ha conseguido aplicar la matemática en otras áreas del conocimiento, algunas como en la música, en donde no se veía relación alguna, gracias al estudio comparativo de las estructuras que establece el concepto de isomorfismo.

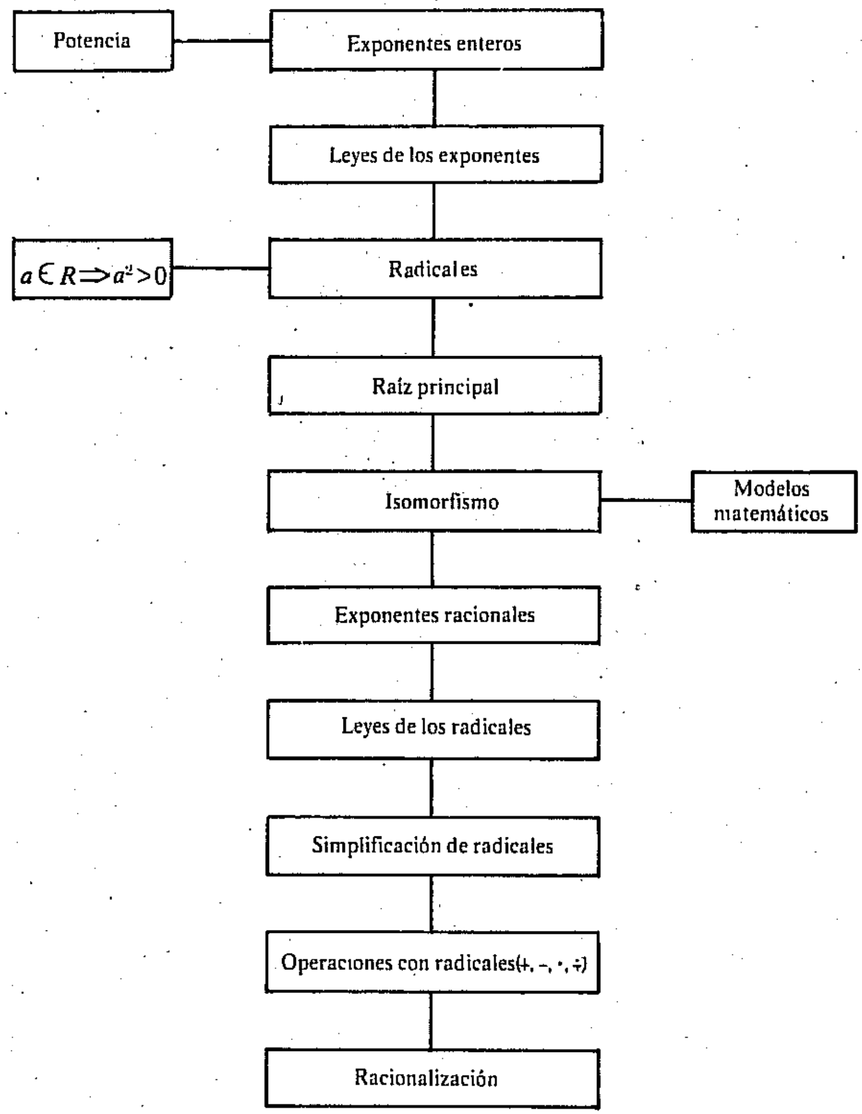
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

- Simplificará expresiones algebraicas con exponentes mediante la aplicación de las leyes de los exponentes.
- Simplificará expresiones algebraicas con radicales.
- Resolverá operaciones con exponentes y radicales, utilizando el isomorfismo de dos conjuntos.
- Resolverá operaciones de suma, resta, multiplicación y división con exponentes y radicales.

Diagrama temático estructural



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Potencia. Es la representación de un producto de factores iguales y se indica $x \cdot x \cdot x ... = x^n$.

Base. Al factor que ha de multiplicarse por sí mismo.

Exponente. Es el número de veces que ha de multiplicarse el factor cuando es **positivo** y el número de veces que ha de multiplicarse el **recíproco** cuando es **negativo.**

Exponente cero. Una forma de potencia para representar a la unidad $x^0 = 1$

Radical. Es el símbolo $\sqrt[n]{\ }$ que nos representa la operación de obtener una raíz enésima.

Raíz enésima. Si n es un entero positivo y si a y $b \in R$ y satisfacen la ecuación $a^n = b$, entonces se dice que a es una raíz enésima de b.

Raíz enésima principal. Se dice que a es la raíz enésima principal de b si y sólo si $a^n = b$ y si $n \in N$

Indice del radical. Es el número que indica la raíz que hay que obtener del factor o expresión.

Radicando. Es la expresión o factor que se encuentra dentro del radical.

Sistema matemático. Está constituido por un conjunto de elementos y la definición de una o más operaciones con esos elementos.

Correspondencia biunívoca. Es la relación uno a uno entre los elementos de dos conjuntos.

Isomorfismo. Cuando existe correspondencia biunívoca entre los elementos de los conjuntos y esta correspondencia se conserva al efectuar una o más operaciones entre los elementos (sin que deban ser las mismas operaciones), se dice que esos dos conjuntos tienen la misma forma o existe isomorfismo entre ellos para esas operaciones.

Modelo matemático. Es una representación por medio de símbolos matemáticos abstractos de un fenómeno físico o de una relación de ideas cualesquiera.

Módulo 5

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Obtendrá números reales mediante la aplicación de las leyes de los exponentes.
2. Aplicará las definiciones $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ en la obtención de expresiones algebraicas enteras.
3. Aplicará las leyes de los exponentes en la simplificación de expresiones algebraicas.
4. Aplicará las leyes de los exponentes en la evaluación de expresiones algebraicas.

ESQUEMA RESUMEN

EXPONENTES ENTEROS Y EXPONENTE CERO

Definiciones:

Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, $a^0 = 1$

Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

LEYES DE LOS EXPONENTES:

Para todo a, $b \in R$, $a \neq 0$ y todo n, $m \in R$ y bases diferentes de 0 para exponentes negativos o cero.

A) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

B) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

C) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

D) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

E) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

5.1 Exponentes enteros y exponente cero. Leyes de exponentes.

En el tema Multiplicación de expresiones algebraicas de la Unidad IV, definimos una potencia (a^n) como la representación del producto de un factor repetido (a), al que llamamos **base de la potencia** y al número en la parte superior derecha (n), **exponente de la potencia** que nos indica las veces que se repetía la base como factor.

Ejemplo:

$$x^2 = x \cdot x, \; (a + 3)^3 = (a + 3)\,(a + 3)\,(a + 3).$$

Exponentes enteros

Obtendremos muchas ventajas si el número natural del exponente lo consideramos un número entero cualquiera, $n \in E$, y probamos que los teoremas demostrados para multiplicar y dividir potencias, (donde $n \in N$), se cumplen igualmente al tomar $n \in E$. Recordemos la parte del Teorema 4-4 que dice

$$\frac{a^m}{a^n} = 1, \text{ si } m = n, \; a \neq 0$$

y si la escribimos en la forma tradicional de las implicaciones. Si

$$m = n \Rightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 = 1, \; a \neq 0$$

esto no es posible ya que m no puede ser igual a n, pero podemos usar esta relación y la ecuación $\frac{1}{a^{m-n}}$ para justificar las siguientes definiciones:

Exponente cero y exponente negativo

> *Definición:* Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, $a^0 = 1$
>
> *Definición:* Para todo $a \in R$, $a \neq 0, n \in E$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Esta segunda definición nos señala que el signo negativo en el exponente, es una forma de indicar que se debe tomar el **recíproco** de esa potencia.

Ejemplos:

a) $5^0 = 1; \; (2xy^3)^0 = 1; \; (x^2 + 2)^0 = 1$

b) $2x^{-3} = 2 \quad \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}; \; (2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{8x^3}$

c) $(x^2 + 3)^{-1} = \frac{1}{x^2 + 3}; \; (3xy^2)^{-2} = \frac{1}{(3xy^2)^2} = \frac{1}{yx^2y^4}$

d) $-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \; (-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$

Con las dos definiciones, las cuales son consistentes con respecto a nuestros postulados y definiciones anteriores podemos probar que nuestros teoremas acerca de multiplicación y división de potencias se cumplen y aun se simplifican al considerar $n, m \in E$.

Leyes de los exponentes

> *Teorema 6.1. Leyes de los exponentes.*
> Para todo $a, b \in R$, $a \neq 0$ y todo $n, m \in E$ y bases diferentes de 0 para exponentes negativos o cero.
>
> A) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
>
> B) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
>
> C) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
>
> D) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
>
> E) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

La demostración de este teorema al que llamamos **Leyes de los exponentes,** puede hacerse usando las definiciones de potencias de la Unidad IV y las dos definiciones aquí presentadas. En los ejemplos siguientes se expresan las potencias eliminando exponentes cero o negativos, identifique con cuidado lo que representa a la **base** en las potencias, sobre todo cuando hay signos negativos para que no se equivoque al obtener el número.

Ejemplos:

a) $x^2 \cdot x^3 = x^5, \; (2y)^{-3}\,(2y)^2 = (2y)^{-1} = \frac{1}{2y}$

b) $(x^3)^2 = x^6, \; (x^2)^{-2} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

c) $(3xy^2)^3 = 3^3x^3y^6 = 27x^3y^6, (2x^3y)^{-2} = 2^{-2}x^{-6}y^{-2} = \frac{1}{2^2x^6y^2} = \frac{1}{4x^6y^2}$

d) $\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x, \; \frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}, \; \frac{2x^3y}{x^3y^2} = 2x^0y^{-1} = 2(1)\;\frac{1}{y} =$

Exponentes negativos y cero

En la manipulación de las expresiones algebraicas unas veces es deseable escribirlas usando exponentes **negativos y cero** para que no aparezcan fracciones, pero en otras ocasiones convendrá más usar sólo exponentes **positivos** aunque tengamos que vérnoslas con las fracciones; la experiencia y habilidad en el manejo de las expresiones algebraicas y

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

las **leyes de los exponentes**, nos señalarán la forma más conveniente de usar estas ideas en cada caso.

Ejemplos: Simplifique las siguientes expresiones y escriba los resultados sin exponentes **cero o negativos.**

1) $\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}}$

(Usaremos dos métodos, el alumno escogerá el que le parezca más práctico según el problema).

1er. Método

$$\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}} = \frac{5x^{2-(-2)}y^{-3}}{3\cdot 1} \qquad \text{Ley D}$$

$$= \frac{5x^4}{3\cdot y^{0+3}} \qquad a^0 = 1 \text{ y Ley D}$$

$$= \frac{5x^4}{3y^3}$$

2o. Método

$$\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}} = \frac{5x^2\,\frac{1}{y^3}}{3\cdot\frac{1}{x^2}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$= \frac{\frac{5x^2}{y^3}}{\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{5x^2}{y^3}\cdot\frac{x^2}{3}$$

$$= \frac{5x^4}{3y^3} \qquad \text{Ley A}$$

Cualquiera que sea el método, el resultado final debe ser el mismo y en ambos, al aplicar la definición de $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, cambiamos el número del numerador al denominador o viceversa, sólo que debe observar que esto es válido **únicamente con factores.** El cambio simultáneo de un factor al denominador y el signo de su exponente no cambian el valor de la expresión.

2) $\frac{x}{y} = xy^{-1} = \frac{1}{x^{-1}y} = \frac{y^{-1}}{x^{-1}}$

3) $\left(\frac{2x^{-2}}{y^{-1}}\right)^{-2}$ (Recuerde, si el exponente es cero o negativo la base debe ser diferente de cero.

1er. Método

$$\left(\frac{2x^{-2}}{y^{-1}}\right)^{-2} = \frac{(2x^{-2})^{-2}}{(y^{-1})^{-2}} \qquad \text{Ley E}$$

$$= \frac{2^{-2}x^4}{y^2} \qquad \text{Leyes B y C}$$

$$= \frac{x^4}{2^2y^2}$$

$$= \frac{x^4}{4y^2}$$

$$\left(\frac{2x^{-2}}{y^{-1}}\right)^{-2} = \left(\frac{y^{-1}}{2x^{-2}}\right)^{2} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^2}{\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{4}{x^4}}$$

$$= \frac{1}{y^2}\cdot\frac{x^4}{4}$$

$$= \frac{x^4}{4y^2}$$

En el ejemplo siguiente se pretende resaltar el hecho de que cambiamos,. de numerador a denominador o viceversa, sólo **factores.**

Ejemplo: $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} \neq \frac{x+y}{x^2+y^2}$

Desarrollo:

$$\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\cdot\frac{xy}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{xy}\quad\frac{1}{x+y} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{xy\,(x+y)}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Evalúe cada uno de los problemas siguientes. Use las **leyes de los exponentes** para obte- r un número real **sin** exponentes **negativos o cero.**

1. 2^5
2. $(2x)^3$
3. $(-2y)^2$
4. $(-4x)^{-2}$
5. $(2y^{-1})^{-1}$
6. $\dfrac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}$
7. 4^{-3}
8. $(10^3)^0$
9. $x^y \cdot x^{4y}$
10. $(4 \cdot 10^3)(3 \cdot 10^{-5})(6 \cdot 10^4)$
11. $3^5 \div (-3)^{-2}$
12. $5^0 \cdot 5^{-2}$
13. $(\frac{7}{5})^{-2}$
14. $(\frac{2}{3})^{-3}(\frac{1}{2})^{-4}$
15. $(\frac{2^4}{2^{-3}})^{-1}$

En los problemas siguientes escriba una expresión equivalente sin usar fracciones. nplifique.

16. $\dfrac{5}{x^3}$
17. $\dfrac{1}{5}$
18. $\dfrac{8x^2}{2x^5}$
19. $\dfrac{4x^3y^{-2}}{3x^{-1}y^3}$
20. $\dfrac{p^{n+1}}{p^{2n+3}}$
21. $\dfrac{a^{m+3}}{a^{m-1}}$

Simplifique las fracciones que se dan en seguida de modo que en el resultado no existan ponentes negativos o cero. Factorice cuando sea necesario.

22. $a^{-1} + b^{-1}$
23. $(a + b)^{-1}$
24. $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-2} : y^{-2}}$
25. $\dfrac{x^n - y^n}{x^{3n} - y^{3n}}$
26. $\dfrac{ab^{-2} + a^{-2}b}{a^{-1} + b^{-1}}$

Evalúe el siguiente problema. Encuentre el numeral que representa la expresión.

27. $\dfrac{(-3)^2\,(-2x)^{-3}}{(x+1)^{-2}}$ para $x = 2$
28. $\dfrac{3a^2\,(-2a)^{-1}}{8+a}$ para $a = -2$
29. $\dfrac{3pq+q}{3pq+p} \cdot \dfrac{3^{2p}}{3^{2q}}$ para $p = 5$ y $q = 3$
30. $\dfrac{3^0\,x^{-1} + 4x^{-2}}{x^{-4}}$ para $x = 3$

Módulo 6

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará cuál es la raíz enésima de un número.
2. Explicará por qué no se pueden obtener raíces cuadradas o pares de números negativos.
3. Explicará cuál es la raíz principal enésima de un número positivo o negativo.
4. Señalará de una raíz cuál es el radical y su índice, y cuál el radicando.
5. Mencionará la utilidad del valor absoluto en operaciones con radicales.
6. Obtendrá la raíz principal de una serie de expresiones dadas.

ESQUEMA RESUMEN

RADICALES — DEFINICIONES   Si $a, b \in R$

Si n es un entero positivo y si a y b son $\in R$ y satisfacen la ecuación $a^n = b$, entonces se dice que a es una raíz enesima de b.

$n \in N$ y $a^n = b \Longrightarrow a$ es la raíz enésima de b

Si $b \in P$ existe otro número positivo único "a" tal que $a^n = b$. Este número se llama la raíz principal enésima de b y se representa como:

$$\sqrt[n]{b} = a$$

Si $b < 0$ y n es impar, existe otro número negativo único "a" tal que $a^n = b$ Ese número se llama la raíz principal enésima de b, se representa como $\sqrt[n]{b} = a$, donde tanto a como b son negativos.

a es la raíz enésima principal de b si y sólo si $a^n = b$ y si $n \in N$ y es par entonces $a, b \in P$.

$n \in N$ y $\sqrt[n]{b} = a \Longleftrightarrow a^n = b$ y (n es par $\Longrightarrow a, b \in P$)

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

6.1 Radicales

En el módulo anterior ampliamos nuestras definiciones de exponentes a exponentes negativos y nulos; ahora las generalizaremos a exponentes racionales, ya que como hemos visto antes los números reales tienen diferentes formas de representarse. Los exponentes racionales nos conducen a una de ellas, llamada forma radical, muy generalizada y su utilidad se manifiesta para representar los números irracionales. El término raíz tiene un significado muy especial en matemáticas, como podemos ver en la siguiente definición.

Raíz enésima

Definición:

> Si n es un entero positivo y si a y b son $\in R$ y satisfacen la ecuación $a^n = b$, entonces se dice que a es una raíz enésima de b.
> $n \in N$ y $a^n = b \Rightarrow a$ es la raíz enésima de b

De acuerdo con la definición anterior podemos decir que: $2^2 = 4$ y el exponente $2 \in N$, entonces 2 es una **raíz cuadrada** de 4 pero, $(-2)^2 = 4$ y el exponente $2 \in N$, entonces -2 también es una **raíz cuadrada** de 4.

En la misma forma podemos considerar que siendo $3^4 = 81$ y $(-3)^4 = 81$ entonces 3 y -3 son ambos **raíces cuartas** de 81.

¿Qué número elevado a la **sexta** potencia nos da 64?

¿Cuáles serán entonces las raíces sextas de 64?

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 \quad (-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$$

¿Qué número elevado al cuadrado nos da -9?

El teorema 3-13" $(-a)(-b) = ab$, nos dice que el producto de dos negativos o de dos inversos de dos números es positivo o el producto de los números respectivamente, y los otros teoremas de esa sección nos llevaron a lo que llamamos las "reglas de los signos en la multiplicación". ¿Qué conclusiones podemos deducir como consecuencia de la respuesta a la pregunta ¿qué número real al cuadrado nos da -9?

$$3^2 = 9 \qquad (-3)^2 = 9$$

Exponentes pares

No hay número real que multiplicado por si mismo o elevado al cuadrado dé un número negativo, de donde se deduce que siempre que el exponente sea par, el resultado es positivo por lo que no podemos encontrar **raíces cuadradas** (índice 2) de números negativos.

¿Cuál es la **raíz cúbica** de -8?, es equivalente a preguntar ¿cuál es el número que elevado al **cubo** nos da -8? Respuesta: -2

Porque $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

¿Y la **raíz cúbica** de -64? (-4)

$$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$$

Por todos los ejemplos anteriores y la definición de raíz enésima de un número concluimos que:

Raíces de números positivos y negativos

> De un número positivo se obtienen dos raíces reales o sólo una, dependiendo de que n sea par o impar respectivamente y que de un número negativo se obtiene una raíz negativa o ninguna dependiendo de que n sea impar o par respectivamente.

Ejemplos:

a) Sea $64 \in P$, las raíces cuadradas (n par) serán 8 y -8 porque $8^2 = (-8)^2 = 64$.

b) Sea $8 \in P$, la raíz cúbica (n impar) es 2 porque es el único número real que al cubo da 8.

c) $-27 \notin P$, la única raíz cúbica es -3 porque $(-3)^3 = -27$; $3^3 \neq -27$.

d) $-64 \notin P$, la raíz cuadrada no existe en el conjunto de los números reales (n par).

En general se puede decir que existen exactamente n raíces enésimas de cualquier número real, sólo que no todas son números reales y quedan fuera del **campo** que estamos estudiando, por lo tanto es muy conveniente que cuando esté trabajando con números reales tenga muy presente la siguiente:

Raíz principal

Definición:

> Si $b \in P$ existe otro número único "a" tal que $a^n = b$. Ese número se llama la raíz principal enésima de b y se representa como
> $\sqrt[n]{b} = a$.

Ejemplo: $\sqrt[4]{16}$. La **raíz principal cuarta** de 16 es un número positivo que elevado a la **cuarta potencia** da 16, es decir 2. Cuando -2 se eleva a la **cuarta potencia** también da 16; pero siendo un número negativo no lo podemos llamar la raíz principal de 16, de ese modo cuando usamos radicales representamos a **números únicos.**

Raíz principal enésima

Definición:

> Si $b < 0$ y n es impar, existe otro número negativo único "a" tal que $a^n = b$. Ese número se llama raíz principal enésima de b, se representa como $\sqrt[n]{b} = a$, donde tanto a como b son negativos.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Ejemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$ que es la raíz principal de -27

Ya vimos antes como siendo b negativo y n par la raíz enésima de b no existe. ($\sqrt[n]{b}$ no existe cuando n es par y $b < 0$).

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{-27}$ es el número que elevado al cubo da -27, es decir (-3). $\sqrt[3]{-27} = -3$.
2. $\sqrt[4]{-16}$ no existe entre los elementos de R ya que n es par.

Todo lo anterior se puede sintetizar diciendo :

Definición:

a es la raíz enésima principal de b si y sólo si $a^n = b$ y si $n \in N$ y par entonces $a, b \in P$.
$n \in N$ y $\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$ y (n **es par** $\Rightarrow a, b \in P$)

En donde $\sqrt{\ }$ se llama **radical.**

Al número n se le llama **índice del radical** y no se acostumbra escribirlo cuando es el 2.

A b o a la expresión debajo o contenida en el radical la llamamos **radicando.**

Ejemplos:

a) $\sqrt{9} = 3$, se lee raíz cuadrada ($n = 2$) de 9 igual a 3.

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, raíz cuarta ($n = 4$) de 81 igual a 3.

c) $\sqrt{-4}$ no existe, raíz cuadrada de -4 no existe.

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$, raíz cúbica de -8 igual -2.

Como consecuencia o conclusión deducida de nuestra definición de **raíz principal** de índice par, en el sentido de que ésta es siempre un número positivo, situación similar a la del valor de una distancia para la que se introdujo el concepto de **valor absoluto,** podemos emplear ese concepto para asegurarnos de tomar la raíz principal cuando usamos literales. Consideremos la definición de raíz enésima de b.

$$\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b \text{ y } (n \text{ es par} \Rightarrow a, b \in P)$$

Podemos deducir que cuando $b = x^n$ la doble implicación queda en la forma siguiente:

$$\sqrt[n]{x^n} = a \Leftrightarrow a^n = x^n \text{ y } (n \text{ es par} \Rightarrow a, x \in P)$$

De la igualdad de potencias $a^n = x^n$ concluimos que las bases son iguales $a = x$, sólo que si n es par, ¿cómo asegurarnos de que se cumpla con: (n es par $\Rightarrow a, x \in P$)? Sabemos que $x^n \in P$ porque n es par, ¿pero el número x?

Una forma de asegurarnos de que se cumpla será escribir $a = |x|$ y entonces

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

Ejemplo:

$$x = -5 \Rightarrow x^2 = (-5)^2 = 25$$
$$x^2 \in P \text{ pero } x \notin P$$

Entonces $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

La raíz cuadrada de -5 al cuadrado es el valor absoluto de -5

$$\text{Sea } x \in R \Rightarrow \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En otras palabras $\sqrt{x^2} = |x|$

Ejemplos:

a) $\sqrt{81a^2} = |9a|$, de este modo a puede representar un número positivo o negativo y de cualquier modo nuestra proposición es verdadera.

b) $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1|$

c) $\sqrt{9x^4} = \sqrt{(3x^2)^2} = 3x^2$. No fue necesario tomar el valor absoluto ¿por qué?

d) $\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$ Este es un caso semejante al ejemplo anterior; siendo x^2 un número **siempre** positivo por su exponente par, no es necesario considerar al valor absoluto.

e) Si suponemos que $\sqrt{x^2} = x$ (sin tomar el valor absoluto), para todo $x \in R$, cuando $x = -1$ tendríamos:

$$\sqrt{(-1)^2} = -1 \text{ es decir } \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = -1$$

entonces tendríamos dos raíces principales para 1; -1 y 1 lo cual es falso pues contradice nuestra definición: n es par $\Rightarrow a, b \in P$, aquí $a = -1$ y $-1 \notin P$.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

f) $\sqrt{(a-3)^2} = |a-3|$ y $|a-3| \neq a-3$ para algunos valores de a.

g) $a > 3$, $\sqrt{(a-3)^2} = a-3$. Una vez condicionados los valores de a de modo que a-3 sea positivo, no es necesario tomar el valor absoluto.

h) $\sqrt[5]{x^5} = x$

i) $\sqrt[3]{245^3} = 245$

j) $\sqrt[4]{(x-2y)^4} = |x-2y|$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. ¿Qué entiende por la raíz enésima de un número? ¿Y por la raíz cuadrada? ¿Y por la cúbica?
2. ¿Cuál es la raíz enésima principal de un número? Explique.

En los problemas del 3 al 22 escriba la **raíz principal** de la expresión que se da. Recuerde que es un número **único**.

3. $\sqrt{16}$
4. $\sqrt{\frac{4}{25}}$
5. $\sqrt[3]{27}$
6. $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$
7. $\sqrt{(-4)^2}$
8. $\sqrt{-64}$
9. $\sqrt[5]{-32}$
10. $\sqrt{16a^2}$
11. $\sqrt[4]{16}$
12. $\sqrt{\frac{9}{a^2}}$
13. $\sqrt{-4^2}$
14. $\sqrt[3]{-27x^3}$
15. $\sqrt{64x^6}$
16. $\sqrt{x^4y^2}$
17. $\sqrt{27a^3b^6}$
18. $\sqrt{a^{4k}b^{2k}}$, $k \in N$
19. $\sqrt[3]{-8a^{6k}b^{3k}c^{9k}}$, $k \in N$
20. $\sqrt{(x-2)^2}$, $x \geq 2$
21. $\sqrt{(x-2)^2}$, $x < 2$
22. $\sqrt{a^2+4a+4}$, $a \in R$

Módulo 7

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá lo que es un sistema matemático.
2. Explicará a qué se refiere el isomorfismo de dos conjuntos.
3. Explicará qué es un modelo matemático.
4. Explicará el concepto de exponentes racionales.
5. Explicará la ampliación de la ley de exponentes.
6. Aplicará el conocimiento sobre exponentes racionales, en la obtención de expresiones algebraicas equivalentes con radicales.
7. Simplificará expresiones algebraicas con exponentes racionales y radicales usando las leyes de los exponentes.

ESQUEMA RESUMEN

—Isomorfismo de dos conjuntos
—Modelo matemático
—Exponentes racionales
—Ampliación de la ley de los exponentes

Para todo $a, b \in R$ $a, b \neq 0$ y $m, n \in D$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

7.1 Isomorfismo de dos conjuntos. Exponentes racionales

Un conjunto de elementos y la definición de una o más operaciones con esos elementos nos sirve para constituir lo que se llama un **sistema matemático;** existen infinidad de sistemas matemáticos y a muchos de ellos se les ha encontrado una aplicación práctica, ya sea en la física, la química, la economía, la lingüística, la informática, etc., aun en las artes hay aplicación de los sistemas matemáticos, y a eso se debe la importancia de estudiar la **estructura** de esos sistemas matemáticos y poder así establecer comparación con los conjuntos de fenómenos físicos o de elementos artísticos y de ahí el descubrimiento de correspondencia entre los elementos de esos conjuntos y los elementos del conjunto de números reales. Así se descubrió que a cada sonido le corresponde un número y viceversa, por ejemplo al sonido **Do** le corresponde el número 256 que son las vibraciones por segundo que nuestro oído registra con esa nota musical. Dos sonidos simultáneos como el **Do** y el **Mi** se corresponden con el número $\frac{3}{2}$, que es la relación de sus frecuencias. Del mismo modo se estableció una correspondencia entre los elementos de la pintura, el color básicamente, y los números reales, pues a cada color le corresponde una frecuencia, sólo que ahora la percibe la vista en lugar del oído.

Definición:

Isomorfismo

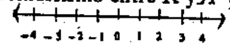
> Cuando existe **correspondencia biunívoca** o uno a uno entre los elementos de dos conjuntos y esta correspondencia se conserva al efectuar una o más operaciones entre los elementos, (sin que deban ser las mismas operaciones), se dice que esos dos conjuntos **tienen la misma forma** para esas operaciones o que existe **isomorfismo** entre ellos para esas operaciones.

Lo anterior significa que un conjunto cuyos elementos son fáciles de manejar en una operación nos puede servir como **modelo** del otro en el que la operación **correspondiente** pudiera ser muy difícil o inclusive, pudiera ser imposible provocar la operación a voluntad, por ejemplo: podemos trabajar con números reales y crear arte, pues las operaciones válidas que efectuemos con los números tienen resultados que se cumplen en su conjunto **isomorfo** sea música o pintura y decimos que trabajamos con un **modelo matemático** de una realidad artística.

Modelo matemático

Esto hace de las matemáticas instrumento formidable para el físico que en muchas ocasiones no puede producir un modelo real para comprobar una teoría o tiene que esperar años a que la naturaleza lo produzca, en cambio los **modelos matemáticos** son prácticos, económicos y accesibles.

Aun entre los mismos sistemas matemáticos el **isomorfismo** de diferentes conjuntos nos permite simplificar las operaciones en un

conjunto, efectuando otras más simples en un conjunto **isomorfo**, (en el tema Representación geométrica de los números reales, sin saberlo aplicamos el isomorfismo entre R y A para "visualizar las operaciones graficándolas  Las operaciones con potencias o radicales presentan muchas dificultades y es conveniente buscar el **isomorfismo** con otro conjunto que nos permita simplificar el manejo de esos elementos. Consideremos pues los siguientes conjuntos:

M: conjunto de potencias enteras de x, x un valor indeterminado.
E: conjunto de enteros.

$$M = \{\ldots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}, \ldots\}$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
$$E = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Analizando la **correspondencia biunívoca** entre los elementos de M y E y dos operaciones definidas en cada uno de ellos, podremos establecer si existe **isomorfismo** entre ellos.

En el conjunto M están definidas dos operaciones de acuerdo con el teorema Leyes de los Exponentes, la multiplicación y la elevación de potencias. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; $(x^m)^n = x^{m\cdot n}$ $(m, n, \in E)$

La elevación de potencias la simbolizamos con * (léase estrella) de modo de escribir $(x^m)^n$ como $x^m * x^n = x^n = x^{m\cdot n}$ $(m, n, \in E)$

M es *cerrado* para esas dos operaciones.

$$x^5 \cdot x^{-2} = x^3; \quad (x^2)^3 = x^6$$

Como ya sabemos E es **cerrado** para la suma y la multiplicación, observemos entonces que hay **correspondencia** de esas operaciones con las dos mencionadas para M.

$$x^{-3} \cdot x^{2} = x^{-1} \qquad x^{2} * x^{3} = x^{6}$$
$$M = \{\ldots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}, x^{4}, x^{5}, x^{6}, \ldots\}$$
$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow$$
$$E = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$
$$-3 + 2 = -1 \qquad 2 \cdot 3 = 6$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Es decir que la operación de sumar enteros corresponde a la de multiplicar potencias enteras de una misma base. $\quad \begin{array}{c} M \\ \updownarrow \\ + \; E \end{array}$

Y la de multiplicar enteros corresponde a la de elevar a una potencia entera las potencias enteras de x. $\quad \begin{array}{c} * \; M \\ \updownarrow \\ E \end{array}$

Sabemos por el estudio de la **estructura** del conjunto E que las operaciones vistas cumplen con todos los **postulados de campo,** excepto el de inversos para la multiplicación, razón por la cual se amplió este conjunto, formando el conjunto D de los números racionales con cuyos elementos siempre son posibles las cuatro operaciones fundamentales. Entonces ampliemos también nuestro conjunto M, considerando ahora exponentes racionales para las potencias de x y formando así el conjunto que llamaremos $I = \{x^{\frac{a}{b}} \mid a, b \in E\}$. Verifiquemos si se conserva el **isomorfismo** entre los conjuntos I y D para las operaciones ya discutidas.

$$x^{-2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} \qquad\qquad x^{\frac{1}{2}} * x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$$

$$I = \{\ldots, x^{-2}, \ldots, x^{-\frac{3}{2}}, \ldots, x^{-1}, \ldots, x^{-\frac{1}{2}}, \ldots, x^{0}, \ldots, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{4}}, x^{1}, \ldots, x^{\frac{3}{2}}, \ldots, x^{2}, \ldots\}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$D = \{\ldots, -2, \ldots, -\frac{3}{2}, \ldots, -1, \ldots, -\frac{1}{2}, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \ldots, \frac{3}{2}, \ldots, 2, \ldots\}$$

$$-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Ambos conjuntos son **campos** porque siendo I de la misma forma que D y D un campo, entonces I también lo es, y para cada elemento existe un inverso en las operaciones correspondientes.

$$\text{En } D \quad n + (-n) = 0; \quad n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad n \in D,\ n \neq 0$$

$$\text{En } I \quad x^{n} \cdot x^{-n} = x^{0}; \quad x^{n} * x^{\frac{1}{n}} = x^{1} \quad n \in D,\ n \neq 0$$

El elemento inverso para la elevación de potencias (*) es $x^{\frac{1}{n}}$ de modo que siendo estrella (*) una operación conmutativa, (I es un campo), podemos escribir:

$$x^{n} * x^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} * x^{n}$$

es decir $\quad x^{\frac{1}{n}} * x^{n} = (x^{\frac{1}{n}})^{n} = x^{1}$ $\quad$ por la definición de *.

"$x^{\frac{1}{n}}$ elevado a la potencia n nos da x".

Compare la expresión anterior con las definiciones de raíz enésima.

"2 elevado a la sexta potencia da 64" por lo tanto 2 es la raíz sexta de 64.

$2 = \sqrt[6]{64}$

"a elevado a la potencia n nos da b", por lo tanto, a es la raíz enésima de b. $\quad a = \sqrt[n]{b}.$

Complete usted la siguiente implicación:

"Si $x^{\frac{1}{n}}$ elevado a la potencia n nos da x, entonces..."

De su conclusión podemos decir que el número $x^{\frac{1}{n}}$ existe, es real y es único y que utilizando el **isomorfismo** podemos considerar las operaciones con los elementos de I en lugar de las operaciones con los radicales.

Definiciones:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},\ x \in R,\ n \in N \text{ y si } n \text{ es par} \Rightarrow x \geq 0$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^{m}} = (\sqrt[n]{x})^{m},\ x \in R,\ \frac{m}{n} \in D \text{ y si } n \text{ es par} \Rightarrow x \geq 0$$

Ejemplos:

a) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

b) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

c) $(-16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-16}$ $\quad$ que no está definido porque siendo n un número par la base de la potencia o radicando es negativo.

d) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{2}} = (\sqrt[3]{8})^{2}$

$= \sqrt[3]{64} = (2)^{2}$

$= 4$

Como los números racionales tienen un número infinito de representaciones que podemos conocer o encontrar aplicando el teorema 3-19 $(\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz})$, debemos tener cuidado de cumplir exactamente con las

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

definiciones, en el sentido de que **la base de la potencia debe ser un número positivo** para poder aplicar el teorema 3-19, ya que se corre el riesgo de cometer errores al cambiar la representación del exponente como se muestra en los ejemplos siguientes:

1) $(-16)^{\frac{1}{2}} \neq (-16)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}} = (-16)^{\frac{2}{4}}$ El **numerador** del exponente cambió de impar a par, siendo la base un número negativo.

$(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16}$ que no existe. **Correcto**

$(-16)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-16)^2}$ ó $(\sqrt[4]{-16})^2$

$= \sqrt[4]{256}$ ó (número que no existe)^2

$= 4$ o no existe ese número real. **Incorrecto**

2) $(-27)^{\frac{1}{3}} \neq (-27)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}} = (-27)^{2/6}$. El **denominador** cambió de impar a par, siendo la base negativa.

$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3.$ **Correcto**

$(-27)^{2/6} = \sqrt[6]{(-27)^2}$ ó $(\sqrt[6]{(-27)})^2$

$= \sqrt[6]{729}$ ó (número que no existe)^2

$= 3$ ó no existe ese número real. **Incorrecto**

Podemos ver entonces que la aplicación del teorema 3-19 al exponente nos conduce de una respuesta única, a una disyunción en la que no se dice cuál de las proposiciones es la verdadera y en ocasiones la **disyunción** es falsa como en el ejemplo 2.

Una conclusión que podemos deducir del **isomorfismo** entre los conjuntos I y D, es la ampliación de las Leyes de los Exponentes o Teorema 6-1, considerando a m y n **números racionales** en lugar de elementos de E.

Para todo $a, b \in R$, $a, b \neq 0$ y $m, n \in D$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Al igual que se indicó con los exponentes negativos y cero, en el manejo de expresiones algebraicas unas veces es conveniente el uso de **radicales** y otras su equivalente con **exponentes racionales**, equivalencia demostrada con el isomorfismo entre los conjuntos I y D.

Ejemplos:

Cambie la expresión de modo que **no tenga exponentes fraccionarios o negativos** y encuentre el **valor más simple** para ella:

1) $(2^{-6})^{2/3} = 2^{-\frac{12}{3}} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

2) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{125^{2/3}}{8^{2/3}} = \frac{(\sqrt[3]{125})^2}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

3) $(2^2 + 3^4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 + 3^4} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$

NOTA: $(2^2 + 3^4)^{\frac{1}{2}} \neq (2^2)^{\frac{1}{2}} + (3^4)^{\frac{1}{2}}$

Cambie la expresión de modo que no contenga radicales.

4) $\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}}$

5) $\sqrt[4]{81a^3} = (81a^3)^{\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}}(a^3)^{\frac{1}{4}} = 3a^{3/4}$

6) $\sqrt{a^2 + b^4} = (a^2 + b^4)^{1/2}$

7) $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)c^3} = [(a^3 + b^3)c^3]^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}(c^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}c$

Cambie la expresión de modo que **toda** sea un **radicando** del índice que se da. Considere sólo **valores positivos para las variables.**

8) Indice 2

a) $2x = (2x)^{\frac{1}{1}} = (2x)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(2x)^2} = \sqrt{4x^2}$

b) $3r^{2/3} = (3r^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(3r^{\frac{2}{3}})^2} = \sqrt{9r^{\frac{4}{3}}}$

c) $5x^{\frac{1}{2}} + (2x)^{\frac{3}{2}} = [5x^{\frac{1}{2}} + (2x)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{2}} = \sqrt{[5x^{\frac{1}{2}} + (2x)^{\frac{3}{2}}]^2}$

$$= \sqrt{(5x^{\frac{1}{2}})^2 + 2(5x^{\frac{1}{2}})(2x)^{3/2} + [(2x)^{3/2}]^2}$$

$$\sqrt{5^2 x^{2/2} + 2(5)\,(2x)^{2/2}\,(x^{1/2})\,(2x)^{1/2} + (2x)^3} =$$

$$= \sqrt{25x + 2(5)\,(2)\,x(x)^{1/2}\,(2x)^{1/2} + 8^3 x^3} = \sqrt{25x + 20x\sqrt{2x^2} + 8x^3}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

d) $a + 2 = (a + 2)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(a + 2)^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 4}$

9) Indice 3

a) $3a = (3a)^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{(3a)^3} = \sqrt[3]{27a^3}$

b) $3\sqrt{x} = (3x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{(3x^{\frac{1}{2}})^3} = \sqrt[3]{27x^{\frac{3}{2}}}$

c) $x + 2 = (x + 2)^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{(x + 2)^3} = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Escriba en los problemas del 1 al 6 una expresión equivalente usando **radicales**, toda la expresión debe ser **radicando.**

1. $x^{\frac{1}{3}}$
2. $3^{\frac{2}{3}}$
3. $4a^{3/4}$
4. $(2b)^{5/3}$
5. $(27a^8)^{1/4}$
6. $(256)^{1/8}$

En los problemas del 7 al 11, escriba una expresión equivalente que no **contenga radicales** ni fracciones.

7. $\sqrt[5]{a^2} \quad \sqrt{b^5}$
8. $\sqrt{x^2 + y^2}$
9. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2 + y^2}}$
10. $\sqrt{a^2 - 4^2}$
11. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt[3]{2xy^2}}$

En los problemas siguientes, efectúe las operaciones indicadas y simplifique **usando las leyes de los exponentes** ya generalizada a **exponentes racionales.** Considere que todas las variables son números positivos y **no debe dejar exponentes negativos, cero o fraccionarios en la respuesta.**

12. $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$
13. $(.01)^{3/2}$
14. $\dfrac{(100)^0}{2x^{\frac{1}{3}}}$
15. $\left(\dfrac{4a^3 x}{a x^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
16. $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}}$
17. $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{2}}}$
18. $\dfrac{25^{-\frac{1}{2}}}{5^{-1}}$
19. $(8r^3 s^{-6})(2r^{-\frac{1}{2}} s^2)$
20. $\dfrac{3r^2}{s} + \dfrac{2s^{-1}}{r^{-2}}$
21. $4x^{-1} - \dfrac{5}{x}$
22. $(16a^2 b^4)^{\frac{1}{2}} (2a^{-2})$
23. $(2x^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} c)^3$
24. $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
25. $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$
26. $(\sqrt{x + y})\,(x + y)$
27. $(x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}\,(x^2 + 1)^0\,(x^2 + 1)^2$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 8

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Demostrará algunas leyes de los radicales.
2. Utilizará las leyes anteriores en la simplificación de expresiones con radicales.
3. Resolverá multiplicaciones con radicales simplificando el resultado.
4. Definirá las condiciones para la simplificación de radicales.
5. Resolverá divisiones de expresiones con radicales, simplificando el resultado.
6. Racionalizará denominadores en cualquier fracción simplificando los resultados.
7. Obtendrá expresiones equivalentes con índices propuestos a expresiones con radicales dados.
8. Simplificará el índice de radicales dados.
9. Resolverá sumas y restas de expresiones con radicales, simplificando el resultado.

ESQUEMA RESUMEN

LEYES DE LOS RADICALES

A) $\sqrt[n]{b^n} = b$

B) $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}\, b^{1/n} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

C) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b \neq 0$

D) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

Condiciones para la simplificación de radicales:

1. Todos los factores con potencias enésimas exactas o múltiplos de n, deben eliminarse del radicando.
2. El índice del radical debe ser el mínimo posible.
3. No debe haber fracciones en el radicando, es decir que su denominador debe ser racionalizado.

OPERACIONES CON RADICALES:

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

LEYES DE LOS RADICALES

Si $a, b \in R$, $n \in N$ y ningún radicando es negativo si n es par:

A) $\sqrt[n]{b^n} = b$ Demostración: $\sqrt[n]{b^n} = b^{n/n}$; como $\frac{n}{n} = 1 \Longrightarrow b^1 = b$

B) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ Demostración: $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}\, b^{1/n} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

C) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$ Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

D) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ Demostración:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/n \cdot 1/m} = a^{1/m \cdot n} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

A continuación las leyes de los radicales se usan en casos numéricos para observar su funcionamiento.

Ejemplos:

A) $\sqrt[3]{3^3} = 3$; $\sqrt[4]{(x^2+y^2)^4} = x^2 + y^2$

$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ (Recordar definición de valor absoluto en la Unidad V Módulo 3 y su relación con los radicales en esta unidad al final del Módulo 6.

B) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[7]{x^2 y^5} = \sqrt[7]{x^2}\,\sqrt[7]{y^5}$

C) $\sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{(y-2)^6}} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(y-2)^6}} = \frac{(x+1)^{3/3}}{(y-2)^{6/3}} = \frac{(x+1)}{(y-2)^2}$

D) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$.

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = (x^2)^{1/3 \cdot 1/5} = (x^2)^{1/15} = \sqrt[15]{x^2}$

8.1. Leyes de los radicales. Simplificación de radicales. Multiplicación y división

Las expresiones de la forma $\sqrt[n]{b}$ nos representan a un **número único** a, al que llamamos **raíz principal** enésima de b y como se menciona antes hay casos en los que es más ventajoso expresar la cantidad con un radical en lugar de usar exponentes fraccionarios.

Las leyes de los radicales se desprenden de las leyes de los exponentes (Teorema 6-1) ya generalizadas, y es necesario tenerlas presentes al trabajar con radicales. Recuerde que

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} \text{ y si } n \text{ es par} \Rightarrow b \geq 0.$$

Como una actividad complementaria proporciona las justificaciones en las demostraciones de las leyes B, C y D.

Aprovechando estas leyes de los radicales puede cambiarse la forma radical de las siguientes maneras:

a) Quitar del radicando las potencias múltiplo del índice, para lo cual factorizamos antes.

1. $\sqrt[3]{32}$, se factoriza $\sqrt[3]{2^5}$ se separan los factores que sean cubos perfectos $\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2}$ y se aplican las leyes B y A.
$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

2. $\sqrt[3]{81x^5y^7} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3x^5y^7} = \sqrt[3]{3^3x^3y^6}\,\sqrt[3]{3x^2y} = 3xy^2\,\sqrt[3]{3x^2y}$

b) Reducir el índice del radical, sin olvidar que el radicando debe ser positivo.

1. $\sqrt[6]{25x^6} = \sqrt[6]{(5x^3)^2} = (5x^3)^{2/6} = (5x^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5x^3}$. Un segundo método podría ser:

$\sqrt[6]{25x^6} = \sqrt[3 \cdot 2]{25x^6} = \sqrt[3]{\sqrt{(5x^3)^2}} = \sqrt[3]{5x^3}$

c) Racionalizar el denominador. Racionalizar significa reemplazar la expresión por una equivalente sin radical en donde se indique.

1. $\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}}$ Ley C

Se busca un factor (z) tal que haga que el radicando en el denominador tenga un exponente múltiplo del índice del radical y usando el teorema $\frac{x}{y} = \frac{xy}{yz}$, se efectúa el producto.

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\cdot\frac{2^2}{2^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9\cdot 4}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{x^2}} = \sqrt[4]{\frac{a}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}} = \sqrt[4]{\frac{ax^2}{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{ax^2}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{ax^2}}{(x)^{4/4}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{ax^2}}{(x)^1} = \frac{\sqrt[4]{ax^2}}{x}$$

$$\sqrt[4]{\frac{7a^3\,y^2}{8x^3\,b^6}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{7a^3y^2}}{\sqrt[4]{8x^3b^6}} = \sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{2^3x^3b^6}\cdot\frac{2xb^2}{2xb^2}} = \sqrt[4]{\frac{(7a^3y^2)(2xb^2)}{2^4x^4b^8}} = \frac{\sqrt[4]{14a^3b^2xy^2}}{\sqrt[4]{(2xb^2)^4}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{14a^3b^2xy^2}}{2xb^2}$$

En algunos problemas lo conveniente puede ser la **racionalización** del numerador para lo cual seguirá el mismo método, buscando entonces que sean las potencias en el numerador múltiplos del índice. La **racionalización,** ya sea del numerador o del denominador nos simplifica una división de radicales, pues sólo se busca una raíz y se efectúa la división en lugar de buscar dos raíces y luego hacer la división.

mplificación e radicales

Decimos que un radical está en su forma **más simple** o que **ha sido simplificado** cuando se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Todos los factores con potencias enésimas exactas o múltiplos de n, han sido eliminados del radicando como en los ejemplos del inciso a) anterior.
2. El índice del radical es el mínimo posible, simplificándolo como en el ejemplo del inciso b).
3. No hay fracciones en el radicando, es decir que su denominador fue racionalizado, ejemplos en el inciso c).

Una vez que los radicales están en su forma **más simple,** se procede a efectuar las operaciones con ellos, aunque no es condición indispensable haberlos simplificado. En las operaciones de multiplicar y dividir radicales se consideran dos casos: 1) radicales con igual índice, 2) radicales con índice diferente.

Multiplicación caso 1.

La operación se efectúa aplicando la ley de radicales B.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

a) $(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{16}) = 2\cdot 3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{4\cdot 16} = 6\sqrt[3]{64} = 6\cdot 4 = 24$

b) $\sqrt{15ax^3}\,\sqrt{45a^2xy^3} = \sqrt{(15ax^3)(45a^2xy^3)} =$

$$= \sqrt{(15\cdot 15\cdot 3)\,(a\cdot a^2)\,(x^3\cdot x)\,(y^3)} = \sqrt{(15^{1+1})\,3(a^{1+2})\,(x^{3+1})\,(y^3)} =$$

$$= \sqrt{15^2\cdot 3a^3\,x^4\,y^3} = \sqrt{15^2\cdot x^4}\,\sqrt{3a^3\,y^3} =$$

$$= (15^{2/2}\cdot x^{4/2})\,\sqrt{3a^3\,y^3} = 15\cdot x^2\,\sqrt{3a^3\,y^3}$$

Multiplicación caso 2.

La operación se efectúa aprovechando el **isomorfismo,** con los **exponentes racionales** y sus leyes **para cambiar a radicales con índices iguales.**

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{5}\,\sqrt{2} = 5^{\frac{1}{3}}\,2^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6}}\cdot 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{25\cdot 8} = \sqrt[6]{200}$

b) $\sqrt{6x^3}\,\sqrt[3]{4x^4\,y^2} = (3\cdot 2x^3)^{\frac{1}{2}}\,(2^2\,x^4\,y^2)^{\frac{1}{3}} = (3\cdot 2x^3)^{3/6}\,(2^2\,x^4\,y^2)^{2/6}$

$$= \sqrt[6]{(3\cdot 2x^3)^3}\,\sqrt[6]{(2^2\,x^4\,y^2)^2}$$

$$= \sqrt[6]{3^3\cdot 2^7\,x^{17}\,y^4}$$

$$= 2x^2\,\sqrt[6]{54x^5\,y^4}$$

División caso 1.

Esta operación se efectúa usando la ley de radicales C.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$ y se simplifica usando el teorema $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$

Ejemplo: $\dfrac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{3}} = \dfrac{6}{2}\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{5\cdot 3^2}{3\cdot 3^2}} = 3\,\dfrac{\sqrt[3]{45}}{3} = \sqrt[3]{45}$

División caso 2.

Al igual que en la multiplicación buscamos cambiar a **radicales con el mismo índice, usando los exponentes racionales.**

Ejemplos:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}} = \sqrt[6]{\dfrac{16}{8}} = \sqrt[6]{2}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

b) $\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{\sqrt[4]{48a}} = \dfrac{(3a)^{\frac{1}{3}}}{(48a)^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{(3a)^{\frac{4}{12}}}{(48a)^{3/12}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^4a^4}{3^3 2^{12} a^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3a}{2^{12}}} = \dfrac{\sqrt[12]{3a}}{\sqrt[12]{2^{12}}}$

$= \dfrac{\sqrt[12]{3a}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt[12]{3a}$

El problema de la **racionalizacion** de radicales en una fracción puede ser en algunos casos bastante complicado y es necesario que vea en seguida algunos problemas de los tipos de **racionalización** más frecuentes.

Ejemplos:

Racionalización de radicales

a) $\dfrac{4}{5-\sqrt{5}}$

El factor que agreguemos debe ser tal que la potencia del radicando iguale al índice, pero que no deje otro radical en el otro término. En este caso usamos los binomios conjugados.

$(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5}) = 25-5.$

$$\frac{4}{5-\sqrt{5}} = \frac{4}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{4(5+\sqrt{5})}{5^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{4(5+\sqrt{5})}{25-5} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2-4\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{-10}$$

c) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1})^2}{(1)^2-(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{1-(x+1)} =$$

$$\frac{\sqrt{x+1}-x-1}{-x}$$

8.2 Suma y resta de radicales

Radicales semejantes

Se dice que 2 o más radicales son **semejantes,** cuando tienen el **mismo** índice y el **mismo radicando.**

La suma algebraica de radicales se reduce a combinar **todos los radicales semejantes en un solo término.**

Ejemplos:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

Ninguno de estos radicales es semejante, por lo que debemos cambiar su forma o simplificarlos.

$$= \sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{36\cdot 2} = 3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}$$
$$= (3+5-6)\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

b) $4\sqrt{12}+5\sqrt{8}-\sqrt{50}-7\sqrt{48}$

$$4\sqrt{4\cdot 3}+5\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}-7\sqrt{16\cdot 3} = 8\sqrt{3}+10\sqrt{2}-5\sqrt{2}-28\sqrt{3}$$
$$= 10\sqrt{2}-5\sqrt{2}+8\sqrt{3}-28\sqrt{3}$$
$$= (10-5)\sqrt{2}+(8-28)\sqrt{3}$$
$$= 5\sqrt{2}-20\sqrt{3}$$

c) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{81}-\sqrt{27}+5\sqrt[3]{3}$

$$= \sqrt{3}+\sqrt[3]{27\cdot 3}-\sqrt{9\cdot 3}+5\sqrt[3]{3} = \sqrt{3}+3\sqrt[3]{3}-3\sqrt{3}+5\sqrt[3]{3}$$
$$= -2\sqrt{3}+8\sqrt[3]{3}$$

d) $\sqrt[3]{432}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{32}}$

$$\sqrt[3]{6^3\cdot 2}-\sqrt[3]{5^3\cdot 2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2^5}} = 6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{2}{2^6}}$$
$$= 6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$$
$$= (6-5+\tfrac{1}{4})\sqrt[3]{2}$$
$$= \frac{5}{4}\sqrt[3]{2}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Demuestre la ley de radicales C.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

2. Demuestre la ley de radicales D.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

En los problemas del 3 al 16 reduzca el radical a la forma más simple.

uerde que: $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt[3]{80}$ 4. $5\sqrt[3]{243}$ 5. $a\sqrt{9b^4c^3}$ 6. $\sqrt[4]{32}$

. $\sqrt{192a^3b^7}$ 8. $\sqrt[3]{81z^4x^6y^5}$ 9. $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}$

. $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}}$ 11. $2a\sqrt{a^2+6a+9}$ 12. $\frac{x-25}{\sqrt{x}+5}$

. $\sqrt{12x^4-36x^2y^2+27y^4}$ 14. $\sqrt[n]{a^n b^{2n} c^{3n+1} d^{n+2}}$

. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6ab^2}}$ 16. $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^3}}}$

ectúe las multiplicaciones y simplifique el resultado.

. $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{26}$ 18. $\sqrt{x^2-y^2}\sqrt{x-y}$ 19. $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2\sqrt{3})$

. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ 21. $\sqrt[3]{9x}\sqrt[6]{27x^4}$ 22. $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}$

. $(2+\sqrt[3]{3})(2-\sqrt[3]{3})$ 24. $(\sqrt{x+y}-z)(\sqrt{x+y}+z)$

ectúe las divisiones y simplifique el resultado.

5. $\frac{4\sqrt{28}}{3\sqrt{7}}$ 26. $\frac{10\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **NOTA:** $\left(\frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)$ 28. $\frac{\sqrt[4]{24a^3b}}{\sqrt[4]{8ab^3}}$

9. $\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2b}}$

cionalice los denominadores y simplifique.

. $\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$ 31. $\frac{2\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{5}}$ 32. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

. $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ 34. $\frac{x}{x+\sqrt{y}}$ 35. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ Ver el Problema de VI-3

36. $\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x}$ $(a+b+c=[a+b]+c)$ 37. $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$

38. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 39. $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

Convierta los radicales dados a otros de índice 12.

40. $\sqrt[3]{5}$ 41. $\sqrt{xy}$ 42. $\sqrt[6]{a^n}$ 43. $\sqrt[3]{2x^2}$

Simplifique el índice de los radicales dados.

44. $\sqrt[4]{9}$ 45. $\sqrt[12]{8a^3b^6}$ 46. $\sqrt[6]{x^2+2xy+y^2}$

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique

47. $3\sqrt{8}+2\sqrt{18}$ 48. $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}$ 49. $5\sqrt{2}-\sqrt[4]{64}+2\sqrt{32}$

50. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}$ 51. $\sqrt{4(x+y)}-2\sqrt{9(x+y)}+3\sqrt{x+y}$

52. $2a\sqrt[3]{27x^3y}+3b\sqrt[3]{8x^3y}-6c\sqrt[3]{-x^3y}$

53. $2\sqrt{\frac{a}{b}}-3\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{4}{\sqrt{ab}}$ 54. $\sqrt{a^3bc^5}+\sqrt{ab^7c^3}+\sqrt{a^9b^5c}$

55. $\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\sqrt{108}-\sqrt[4]{9}$ 56. $\frac{4}{2+\sqrt{5}}+\frac{3}{5+2\sqrt{5}}$

BIBLIOGRAFIA DE ESTA UNIDAD

Dolciani, Mary, Berman, Simón, Wooton, William. "ALGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRIA". Ed. Publicaciones Cultural. México. 1967.

Cárdenas, Luis, Raggi, Tomás. "TEMAS I. ALGEBRA". Ed. Sociedad Matemática. México. 1970.

Paneles de verificación

MODULO 5 - VALIDACION

1. 32 2. $8x^3$ 3. $4y^2$ 4. $\frac{1}{(-4x)^2} = \frac{1}{16x^2}$

5. $\frac{1}{2y^{-1}} = \frac{y}{2}$ 6. $\frac{2^2x^2x^3}{3y^3y^4} = \frac{4x^5}{3y^7}$ 7. $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

8. $(1000)^0 = 1$ 9. x^5y 10. $4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10^2 = 7200$

11. $\frac{3^5}{(-3)^{-2}} = 3^5 \cdot (-3)^2 = 3^5 \cdot 3^2 = 3^7$ 12. $1 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

13. $(\frac{5}{7})^2 = \frac{25}{49}$ 14. $(\frac{3}{2})^3(\frac{2}{1})^4 = \frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3} = 3^3 \cdot 2 = 54$

15. $(\frac{2^{-3}}{2^4}) = \frac{1}{2^3 \cdot 2^4} = \frac{1}{2^7}$

16. $5x^{-3}$ 17. 5^{-1} 18. $4x^{-8}$ 19. $4 \cdot 3^{-1}x^4y^{-5}$

20. $p^{(n+1)-(2n+3)} = p^{-n-2} = p^{-(n+2)}$ 21. a^4

22. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ 23. $\frac{1}{a+b}$

24. $$\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2y^2}} = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{\frac{1}{x^2y^2}} = y^2 - x^2$$

25. $$\frac{x^n - y^n}{(x^n - y^n)(x^{2n} + x^ny^n + y^{2n})} = \frac{1}{x^{2n} + x^ny^n + y^{2n}}$$

26. $$\frac{\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{a^3+b^3}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)(ab)}{a^2b^2(a+b)}$$

$$= \frac{a^2-ab+b^2}{ab}$$

27. $$\frac{9(x+1)^2}{(-2x)^3} = \frac{9(3)^2}{(-4)^3} = \frac{9 \cdot 9}{-64} = -\frac{81}{64}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$\frac{3a^2(-2a)^{-1}}{8+a} = \frac{3a^2\dfrac{1}{-2a}}{8+a} = \frac{-\dfrac{3a^2}{2a}}{8+a} = \frac{-\dfrac{3}{2}a}{8+a}$$

$$= \frac{-\dfrac{3}{2}(-2)}{8+(-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3^{pq+q}}{3^{pq+p}} \cdot \frac{3^{2p}}{3^{2q}} = \frac{3^{pq+q+2p}}{3^{pq+p+2q}} = 3^{(pq+q+2p)-(pq+p+2q)}$$

$$= 3^{p-q} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$$

$$\frac{3^0 x^{-1} + 4x^{-2}}{x^{-4}} = x^4\left(1 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = x^4\left(\frac{x+4}{x^2}\right) = x^2(x+4) =$$

$$= 9(3+4) = 63$$

MODULO 6 - VALIDACION

Se entiende por **raíz enésima** de un número, otro número tal que elevado a la potencia n se obtenga el número dado. La raíz cuadrada de un número es otro número que elevado al cuadrado da el primero y la raíz cúbica es otro número que al elevarlo al cubo da el primero.

La **raíz principal** enésima de un número es, como se define en el problema anterior, otro número que elevado a la potencia n da el primer número sólo que si el primer número es positivo, la raíz principal también lo es y si es negativo, la raíz principal sólo existe cuando el índice es impar, y también es un número negativo.

$\sqrt{16} = 4$ 4. $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{2}{5}$ 5. $\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{4}$ 7. $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$ 8. $\sqrt{-64}$ No existe

$\sqrt[5]{-32} = -2$ 10. $\sqrt{16a^2} = |4a|$ 11. $\sqrt[4]{16} = 2$

2. $\sqrt{\dfrac{9}{a^2}} = \dfrac{3}{|a|}$ 13. $\sqrt{-4^2}$ No existe   14. $\sqrt[3]{-27x^3} = -3x$

15. $\sqrt{64x^8} = 8x^4$ 16. $\sqrt{x^4y^2} = |x^2y|$ 17. $\sqrt[3]{27a^3b^6} = 3ab^2$

18. $\sqrt{a^{4k}b^{2k}} = |a^{2k}b^k|$ (Se toma valor absoluto porque k puede ser impar y b negativo)

19. $\sqrt[3]{-8a^{6k}b^{3k}c^{9k}} = -2a^{2k}b^kc^{3k}$ 20. $\sqrt{(x-2)^2},\ x \geq 2 = x-2$

21. $\sqrt{(x-2)^2},\ x < 2 = |x-2|$ 22. $\sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = |a+2|$

MODULO 7 - VALIDACION

1. $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ 2. $3^{2/3} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

3. $4a^{\frac{3}{4}} = 4^{\frac{4}{4}}a^{\frac{3}{4}} = (4^4a^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4^4a^3} = \sqrt[4]{256a^3}$

4. $(2b)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(2b)^5} = \sqrt[3]{32b^5}$ 5. $(27a^3)^{.25} = (27a^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{27a^3}$

6. $(256)^{.125} = (256)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{256}$ 7. $\sqrt[5]{a^2}\,\sqrt{b^5} = a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{5}{2}}$

8. $\sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ 9. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

10. $\sqrt{a^2-4^2} = (a^2-4^2)^{\frac{1}{2}}$ 11. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{2xy^2}} = (x^2y)^{\frac{1}{3}}(2xy^2)^{-\frac{1}{3}}$

12. $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}} = (\frac{27}{8})^{\frac{1}{3}} = \dfrac{27^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{3}{2}$

13. $(.01)^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{100})^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{100^{3/2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{100})^3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}$

14. $\dfrac{(100)^0}{2x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$ 15. $\left(\dfrac{4a^3x}{ax^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{ax^{-1}}{4a^3x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{4a^2x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4a^2x^2}} =$

16. $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{x^{23}}$

17. $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{3}}y^{3/2}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = xy^{-1} = \dfrac{x}{y}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

18. $\dfrac{25^{-\frac{1}{2}}}{5^{-3}} = \dfrac{(5^2)^{-\frac{1}{2}}}{5^{-3}} = \dfrac{5^{-1}}{5^{-3}} = \dfrac{5^3}{5} = 5^2$

19. $(8r^3 s^{-6})(2r^{-\frac{1}{2}}s^2) = 16r^{3-\frac{1}{2}}s^{-6+2} = 16r^{\frac{5}{2}}s^{-4} = \dfrac{16\sqrt{r^5}}{s^4}$

20. $\dfrac{3r^2}{s} + \dfrac{2s^{-1}}{r^{-2}} = \dfrac{3r^2}{s} + \dfrac{2r^2}{s} = \dfrac{5r^2}{s}$

21. $4x^{-1} - \dfrac{5}{x} = 4x^{-1} - 5x^{-1} = -x^{-1} = -\dfrac{1}{x}$

22. $(16a^2 b^4)^{\frac{1}{2}}(2a^{-2}) = (4^2 a^2 b^4)^{\frac{1}{2}}(2a^{-2}) = (4ab^2)(2a^{-2}) = 8a^{-1}b^2 = \dfrac{8b^2}{a}$

23. $(2x^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c)^3 = 2^3x^{-1}b^2c^3 = \dfrac{8b^2c^3}{x}$

24. $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 = a-b$

25. $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 = a-b$

26. $\sqrt{x+y}\,(x+y) = (x+y)^{\frac{1}{2}}(x+y) = (x+y)^{3/2} = \sqrt{(x+y)^3}$

27. $(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(x^2+1)^0(x^2+1)^2 = \dfrac{1}{(x^2+1)^{5/2}} \cdot (x^2+1)^2 = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

MODULO 8 - VALIDACION

1. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

$= \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$

$= a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}$

$= a^{\frac{1}{m\,n}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

3. $\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{8.10} = \sqrt[3]{2^3.10} = 2\sqrt[3]{10}$

4. $5\sqrt[3]{243} = 5\sqrt[3]{27.9} = 5\sqrt[3]{3^3.9} = 15\sqrt[3]{9}$

5. $a\sqrt{9b^4c^3} = a\sqrt{3^2b^4c^2c} = 3ab^2c\sqrt{c}$

6. $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4\,2} = 2\sqrt[4]{2}$

7. $\sqrt{192a^3b^7} = \sqrt{(2^6a^2b^6)(3ab)} = 8ab^3\sqrt{3ab}$

8. $\sqrt[3]{81z^4x^6y^5} = \sqrt[3]{(3^3z^3x^6y^3)(3zy^2)} = 3zx^2y\sqrt[3]{3zy^2}$

9. $\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{4+9}{36}} = \dfrac{\sqrt{13}}{6} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

10. $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}} = \sqrt[3]{(4^3x^6y^{-6})x} = 4x^2y^{-2}\sqrt[3]{x}$

11. $2a\sqrt{a^2+6a+9} = 2a\sqrt{(a+3)^2}$

$= 2a|a+3|$

12. $\dfrac{x-25}{\sqrt{x}+5} = \dfrac{(x-25)(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \dfrac{(x-25)(\sqrt{x}-5)}{x-25} = \sqrt{x}-5$

13. $\sqrt{12x^4-36x^2y^2+27y^4} = \sqrt{3(4x^4-12x^2y^2+9y^4)} = \sqrt{3(2x^2-3y^2)^2} =$

$= (2x^2-3y^2)\sqrt{3}\,;\; 2x^2-3y^2 \geq 0$

14. $\sqrt[n]{a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2}} = (a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2})^{\frac{1}{n}} = ab^2c^3c^{\frac{1}{n}}dd^{\frac{2}{n}} = ab^2c^3d\sqrt[n]{cd^2}$

15. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6ab^2}} = \sqrt[4\cdot3]{6ab^2} = \sqrt[12]{6ab^2}$

16. $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2}}} = \{x^2[x^2(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}} = \{x^2[x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}} = \{x^2[x^{\frac{8}{3}}]^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}}$

$= \{x^2\cdot x^{\frac{8}{9}}\}^{\frac{1}{3}} = \{x^{\frac{26}{9}}\}^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{26}{27}} = \sqrt[27]{x^{26}}$

Método Alterno

$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^6\cdot x^2\sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^8\sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{24}\cdot x^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{26}}}}$

$= \sqrt[3.3.3]{x^{26}} = \sqrt[27]{x^{26}}$

17. $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{26} = \sqrt[3]{4\cdot26} = \sqrt[3]{2^3\cdot2\cdot13} = 2\sqrt[3]{13}$

18. $\sqrt{x^2-y^2}\,\sqrt{x-y} = \sqrt{(x^2-y^2)(x-y)} = \sqrt{(x+y)(x-y)^2} = |x-y|\,\sqrt{x+y}$

19. $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2\sqrt{3}) = 6-2\sqrt{18}+\sqrt{18}-2\cdot3 = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$

20. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+2\sqrt{xy}+y$

21. $\sqrt[3]{9x}\,\sqrt[6]{27x^4} = (9x)^{\frac{1}{3}}(27x^4)^{\frac{1}{6}} = (9x)^{\frac{2}{6}}(27x^4)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{(9x)^2(27x^4)} = \sqrt[6]{(3^6x^6)3} = 3$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

22. $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{\ldots}$

23. $(2+\sqrt[3]{3})(2-\sqrt[3]{3}) = (2)^2 - (\sqrt[3]{3})^2 = 4 - \sqrt[3]{9}$

24. $(\sqrt{x+y} - z)(\sqrt{x+y} + z) = (\sqrt{x+y})^2 - (z)^2 = x+y - z^2$

25. $\dfrac{4\sqrt{28}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{4\sqrt{28\cdot 7}}{3\cdot 7} = \dfrac{4\sqrt{4\cdot 7^2}}{3\cdot 7} = \dfrac{4\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 7} = \dfrac{8}{3}$

26. $\dfrac{10\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = 2\sqrt{\dfrac{6}{2}} = 2\sqrt{3}$

27. $\dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{4}-5\sqrt{16}}{2} =$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{2} + 4 - 10 = \dfrac{1}{2}\sqrt{6} - 6$

28. $\dfrac{\sqrt[4]{24a^3b}}{\sqrt[4]{8ab^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{24a^3b}{8ab^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3a^2}{b^2}} = \dfrac{1}{b}\sqrt{3a^2b^2}$

29. $\dfrac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2b}} = \dfrac{(ab^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2b)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(ab^2)^{3/6}}{(a^2b)^{2/6}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^3b^6}{a^4b^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{b^4}{a}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^5b^4}{a^5\cdot a}} = \dfrac{1}{a}\sqrt[6]{a^5b^4}$

30. $\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{4\cdot 5} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$

31. $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{5^2}}{4\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{75}}{4\cdot 5} = \dfrac{\sqrt[3]{75}}{10}$

32. $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{3(2-\sqrt{3})}{(2)^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4-3} = 3(2-\sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3}$

33. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{(1)^2-(\sqrt{2})^2} = -(1+\sqrt{2})^2$

34. $\dfrac{x}{x+\sqrt{y}} = \dfrac{x(x-\sqrt{y})}{x^2-y}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1\cdot(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x+y}$

36. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x} = \dfrac{x+\sqrt{x}}{(1+x)+\sqrt{x}} = \dfrac{(x+\sqrt{x})[(1+x)-\sqrt{x}]}{(1+x)^2-(\sqrt{x})^2} = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{(1+2x+x^2)-x} =$

$= \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1+x+x^2}$

37. $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} = \dfrac{(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})}{(a\sqrt{b})^2-(b\sqrt{a})^2} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$

38. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{1\cdot[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{2\cdot 6} = \dfrac{1}{6}\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2}-\dfrac{1}{12}\sqrt{30}$

39. $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{(1-\sqrt{x+1})^2}{1-(x+1)} = \dfrac{2+x-2\sqrt{x+1}}{-x}$

40. $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{625}$

41. $\sqrt{xy} = (xy)^{\frac{1}{2}} = (xy)^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{x^6y^6}$

42. $\sqrt[6]{a^n} = a^{\frac{n}{6}} = a^{\frac{2n}{12}} = \sqrt[12]{a^{2n}}$

43. $\sqrt[3]{2x^2} = (2x^2)^{\frac{1}{3}} = (2x^2)^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{16x^8}$

44. $\sqrt[4]{9} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt{3}$

45. $\sqrt[12]{8a^3b^6} = (2^3a^3b^6)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{3}{12}}a^{\frac{3}{12}}b^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{2ab^2}$

46. $\sqrt[8]{x^2+2xy+y^2} = \sqrt[8]{(x+y)^2} = (x+y)^{\frac{2}{8}} = (x+y)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x+y}$

47. $3\sqrt{8}+2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

48. $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

49. $5\sqrt{2} - \sqrt[4]{64} + 2\sqrt{32} = 5\sqrt{2} - \sqrt{8} + 2\sqrt{32} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

50. $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{8\cdot 2} - \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = 0$

51. $\sqrt{4(x+y)} - 2\sqrt{9(x+y)} + 3\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x+y} - 6\sqrt{x+y} + 3\sqrt{x+y} = -\sqrt{x+y}$

52. $2a\sqrt[3]{27x^3y} + 3b\sqrt[3]{8x^3y} - 6c\sqrt[3]{-x^3y} = 6ax\sqrt[3]{y} + 6bx\sqrt[3]{y} - 6c(-x)\sqrt[3]{y}$

$= 6x(a+b+c)\sqrt[3]{y}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

53. $2\sqrt{\frac{a}{b}} - 3\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{4}{\sqrt{ab}} = 2\sqrt{\frac{a \cdot b}{b \cdot b}} - 3\sqrt{\frac{b \cdot a}{a \cdot a}} + \frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\sqrt{ab}} =$

$$= \frac{2}{b}\sqrt{ab} - \frac{3}{a}\sqrt{ab} + \frac{4}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{2a - 3b + 4}{ab}\right)\sqrt{ab}$$

54. $\sqrt{a^3bc^5} + \sqrt{ab^7c^3} + \sqrt{a^9b^5c} = ac^2\sqrt{abc} + b^3c\sqrt{abc} + a^4b^2\sqrt{abc}$

$$= (uc^2 + b^3c + a^4b^2)\sqrt{abc}$$

55. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{108} - \sqrt[4]{9} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = (\frac{1}{3} + 9 - 1)\sqrt{3} = \frac{25}{3}\sqrt{3}$

56. $\frac{4}{2+\sqrt{5}} + \frac{3}{5+2\sqrt{5}} = \frac{4(2-\sqrt{5})}{2^2 - 5} + \frac{3(5-2\sqrt{5})}{5^2 - 20} = -4(2-\sqrt{5}) + \frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})$

$$= -8 + 4\sqrt{5} + 3 - \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

$$= \frac{14}{5}\sqrt{5} - 5$$

UNIDAD VII

APLICACIONES

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

En las unidades anteriores hemos completado nuestras nociones fundamentales de la estructura del conjunto de números reales y de la manipulación de las expresiones algebraicas que los representan. Es muy importante que se haya adquirido suficiente habilidad y destreza en la manipulación de las expresiones algebraicas antes de iniciar esta unidad, para poder concentrarnos en los temas que aquí trataremos.

En esta unidad presentamos quizá la parte más difícil en la solución de problemas, el planteo en lenguaje algebraico.

Veremos como traducir el lenguaje ordinario que usamos al proponer los problemas o las situaciones reales, al lenguaje matemático que nos facilitará la simplificación o la solución de dichos problemas; las expresiones algebraicas resultantes pueden ser lo que llamamos ecuaciones o inecuaciones.

Los reactivos de autoevaluación se agrupan según el tema considerado como problemas sobre mediciones, dígitos, comerciales, de mezclas, de movimiento, trabajo, etcétera, y en la misma forma se presentarán cuando vayamos a practicar con nuevas técnicas algebraicas o nuevos conceptos matemáticos, procurando mantener una relación lo más estrecha posible, entre los temas abstractos y su aplicación a la realidad.

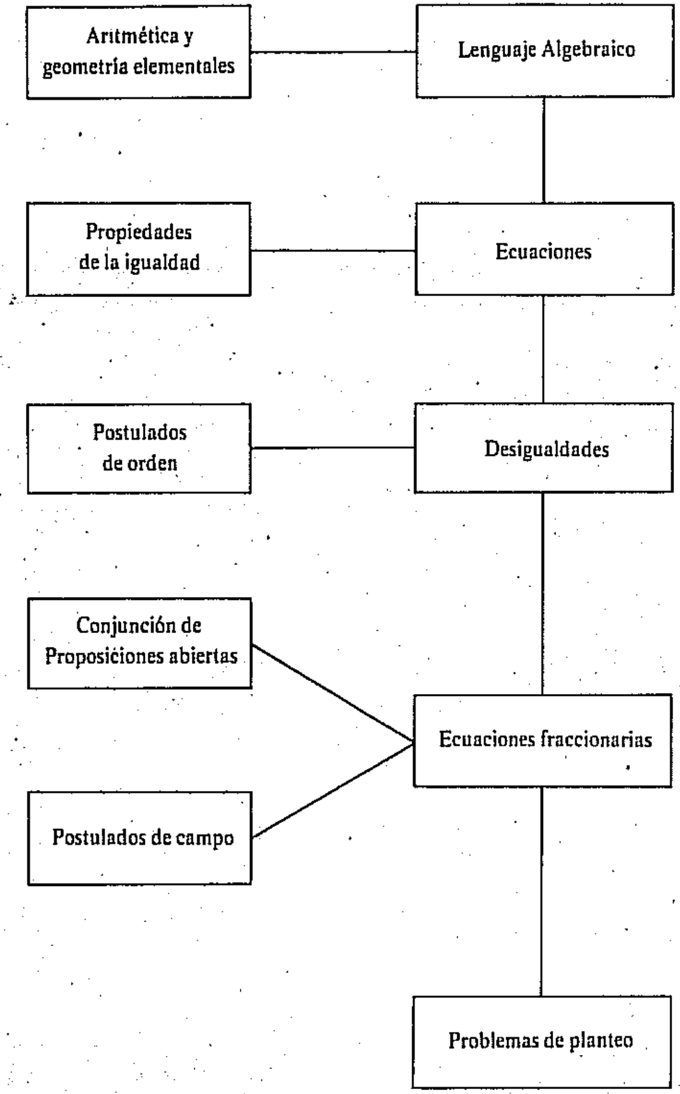
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Traducirá a expresiones algebraicas las condiciones de problemas planteados en lenguaje común.
2. Resolverá ecuaciones de primer grado con una incógnita.
3. Resolverá desigualdades que contengan una variable.
4. Resolverá ecuaciones fraccionarias que contengan una variable.
5. Planteará y resolverá problemas en términos de ecuaciones.

Diagrama temático estructural



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Idioma o lenguaje matemático. Conjunto de símbolos y reglas que sirven para expresar proposiciones.

Traducir a lenguaje matemático. Proceso por el cual se pasa del lenguaje ordinario al lenguaje matemático.

Ecuación. Es una expresión algebraica que tiene una igualdad condicionada para ciertos valores de la variable.

Resolver la ecuación. Proceso de despejar la variable o incógnita.

Grado de la ecuación. Es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable.

Desigualdades o inecuaciones. Son los problemas que al simbolizarse algebraicamente contienen símbolos de **mayor que**, **menor que** o **diferente a.**

Solución de inecuaciones o desigualdades. Es el proceso de encontrar el conjunto solución, el cual generalmente es infinito.

Ecuaciones fraccionarias. Son las expresiones algebraicas que tienen por lo menos en algún denominador a la variable cuyo conjunto solución se está buscando.

Mínimo común múltiplo. Es el número mínimo que tiene como factores a todos los denominadores de una ecuación fraccionaria.

Módulo 9

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Traducirá al lenguaje matemático expresiones del español.
2. Reescribirá problemas utilizando lenguaje matemático.

ESQUEMA RESUMEN

LENGUAJE COMUN —— LENGUAJE ALGEBRAICO

ESPAÑOL —— ALGEBRA

Ejemplo:

El doble de un número

es 25 —— $2x=25$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

9.1 Planteo de problemas

Uso del álgebra

Una vez comprendidos los postulados de campo y de orden, y después de haber practicado su aplicación así como la aplicación de los teoremas que se derivaron de los postulados, el trabajo con los elementos del conjunto R, es decir con los números reales, empieza a mecanizarse y como en los deportes aquellos que más practiquen llegarán a dominar mejor esas mecanizaciones. Llega un momento en que se preguntan ¿para qué me sirve esta habilidad en el manejo de los símbolos y de las expresiones algebraicas? ¿Cómo aplico esto a la vida real si en ella no encuentro esas expresiones algebraices producto de la mente humana? Bien, para contestar a éstas y otras preguntas de quienes estudian materias abstractas consideremos las siguientes reflexiones:

El lenguaje matemático

Hemos aprendido **un nuevo idioma, otro lenguaje;** el de la Ciencia Matemática; nos servirá para desarrollar más esa misma ciencia si eso nos atrae; pero también utilizaremos en las demás ciencias esta forma de expresarnos; el razonamiento matemático nos conduce sin dudas o desviaciones a la verdad, y esto es muy importante aun en los problemas de la vida diaria, pues es necesario tener la certeza de que, aplicando correctamente nuestros postulados y teoremas, llegamos **siempre** a una conclusión **válida** o **verdadera;** pero los problemas de las ciencias experimentales y los de la vida diaria los encontramos o los planteamos en el lenguaje ordinario y aquí está realmente el problema más difícil, necesitamos **traducir** al idioma matemático para poder usar nuestros conocimientos y habilidades matemáticas y encontrar con certeza la verdad.

Como en la traducción de un idioma a otro cualquiera es necesario, en primer lugar, comprender totalmente la proposición, interpretando correctamente los términos y modismos que pudieran utilizarse; en segundo lugar, debemos estar familiarizados con las formas de expresión y modismos del otro idioma para traducir correctamente.

Ejemplo: Debemos interpretar correctamente la oración en inglés **what is up?** Pues la traducción literal no nos dice gran cosa en español, sobre todo **no dice** lo que realmente **se pretende decir.** Es necesario conocer ambos idiomas para darle la forma más fácilmente comprensible. Literalmente sería ¿qué está arriba? y la traducción correcta es ¿qué sucede?

Lo mismo tenemos que hacer para traducir del español al lenguaje matemático; primero debemos asegurarnos de comprender las condiciones de un problema para después escribir las expresiones algebraicas que "digan" lo mismo.

Traducción del español al lenguaje matemático

Ejemplos:

	ESPAÑOL	ALGEBRA
a)	Encontrar dos números reales.	Sean $x, y \in R$...
b)	El doble de un número es 25.	$2x = 25$
c)	La suma de dos números.	$x + y$
d)	La suma de dos números dividida entre su producto.	$\frac{x+y}{xy}$
e)	Un número es el triple de otro.	$x = 3y$
f)	El triple de la suma de dos números.	$3(x + y)$
g)	El perímetro de un cuadrado es 20 (aquí son necesarios conocimientos geométricos además de algebraicos para interpretar el término cuadrado).	$4x = 20$
h)	El área de un rectángulo es de 25 unidades cuadradas (igual que en el anterior, rectángulo debe estar definido como el área de esa figura geométrica).	$x \cdot y = 25$
i)	El cinco por ciento de un número.	$\frac{5}{100} \cdot x$ ó $.05x$
j)	Las dos terceras partes de una cantidad.	$\frac{2}{3}x$
k)	**La parte menor** de 50 si la mayor es x.	$50 - x$
l)	El producto de dos números es **como mínimo** 230.	$xy \geqslant 230$
m)	La suma de dos números es mayor que 12.	$x + y > 12$
n)	La ganancia **máxima** es de 20 pesos.	$G \leqslant 20$
o)	Un número es 8 unidades menor que otro.	$x = y - 8$
p)	En un rectángulo el largo es 20 unidades más que el ancho.	$\mathcal{L} = a + 20$
q)	¿Cuánto cuestan n artículos de 20 centavos c/u? (Aquí es necesario conocer las unidades monetarias)	$20\,n$ centavos
r)	¿Cuántos pesos cuestan n artículos de 5 centavos cada uno?	$.05\,n$ pesos

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

s)	El precio de un artículo si dos artículos cuestan 25	$\frac{25}{2}$
t)	El precio de n artículos si tres artículos cuestan 15	$\frac{15}{3} \cdot n$
u)	Dos números que sumen 50	$x,\ 50 - x$

Como puede ver en los ejemplos anteriores las expresiones en español se pueden **traducir** a expresiones algebraicas en donde **es** o **ser** se traduce como $=$, **como máximo** se traduce $\leq$, **como mínimo** se traduce $\geq$, **una cantidad y otra** se traducen $x - y$, etc.; pero la traducción en muchos casos no es posible hacerla directamente de la expresión verbal o escrita que nos dan y es necesario cambiar la forma o aplicar otros conocimientos para interpretar correctamente esa expresión, y en algunos casos tendremos que **reescribir** las condiciones de un problema para poderlas comprender y después **traducirlas** al lenguaje simbólico o matemático.

Cuando un problema es fácil y la condición o condiciones son claras, nos es posible traducirlas a símbolos matemáticos sin vacilación. **Ejemplos:**

1. Encuentre dos cantidades cuya suma sea 13 y cuyo producto sea 24.

ESPAÑOL	ALGEBRA
Dos cantidades...	x, y
...cuya suma sea 13...	$x + y = 13$
...cuyo producto sea 24	$x \cdot y = 24$

2. Encuentre las dimensiones de un terreno rectangular con un perímetro de 540 metros, si sabemos que el largo mide 30 metros más que el ancho.

ESPAÑOL	ALGEBRA
Encuentre las dimensiones de un terreno rectangular con...	largo $= x$ ancho $= y$
...un perímetro de 540 metros,	$2x + 2y = 540$
si sabemos que el largo mide 30 m más que el ancho	$x = 30 + y$

(el conocimiento del término rectangular, nos dice que tiene dos dimensiones) (Conocimiento de perímetro)

En los dos ejemplos anteriores las condiciones son proposiciones muy claras y es posible traducirlas de inmediato a símbolos matemáticos. En los casos más difíciles las proposiciones **no** dan con mucha claridad las condiciones y es entonces cuando se necesita el conocimiento del idioma español para concentrarnos más **en el significado de las proposiciones** que en las palabras mismas y así poder **reescribir** el problema utilizando otras palabras, términos o modismos que sean fácilmente traducibles a símbolos. **Ejemplos:**

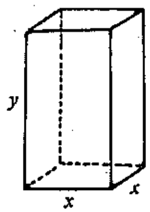
1. Encontrar un número entero menor que 100 que sea 12 unidades mayor que 5 veces la suma de sus dígitos. El cuadrado de la suma de sus dígitos es 39 unidades menor que el triple del entero inmediato mayor.

ESPAÑOL	ALGEBRA
Encontrar un entero menor que 100 Se reescribe: **Encontrar un número de dos dígitos como máximo**	x dígito de las decenas y dígito de las unidades
El número es...	$10x + y$ (valor de posición de los dígitos)
12 unidades mayor que 5 veces la suma de sus dígitos Se reescribe:	
5 veces la suma de sus dígitos	$5(x + y)$
más 12 unidades	$5(x + y) + 12$
nos dan el número	$5(x + y) + 12 = 10x + y$
El cuadrado de la suma de sus dígitos es 39 unidades menor que el triple del entero inmediato mayor Se reescribe:	
El entero inmediato mayor,	$(10x + y) + 1$
tres veces	$3(10x + y + 1)$
menos 39 unidades	$3(10x + y + 1) - 39$
nos dan el cuadrado de la suma de sus dígitos	$(x + y)^2$ $3(10x + y + 1) - 39 = (x + y)^2$

2. Encontrar el lado de la base y la altura de un prisma recto de base cuadrada, si su superficie tiene un área de 96 cm^2 y su volumen es de 60 cm^3

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

x – lado de la base
y – altura



ESPAÑOL	ALGEBRA
Encontrar el lado de la base y la altura de un prisma recto de base cuadrada si su superficie tiene un área de 96 cm^2	Los conocimientos geométricos nos permiten "visualizar" la figura, observando que tiene dos bases y sus lados son rectángulos
Se re-escribe:	
El área de una base	x^2
más el de la otra base	$2x^2$
y el área de cada uno de los 4	4
lados rectangulares (ancho por largo)	$4xy$
nos suman un área de 96 cm^2	$2x^2 + 4xy = 96$
Su volumen es de 60 cm^3	
Se re-escribe:	
El área de una base	x^2
por la altura	x^2y
nos dan un volumen de 60 cm^3	$x^2y = 60$

Los ejemplos nos dan una idea de la **traducción** del español al lenguaje simbólico o matemático y, podemos observar que no es fácil; sólo la práctica que obtengamos nos ayudará, y como sucede con los idiomas que si se abandona la práctica, se olvidan fácilmente los vocablos y modismos, así la falta de práctica hace que se nos olviden los símbolos y expresiones algebraicas.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Exprese las siguientes proposiciones en símbolos algebraicos, no se intenta resolver problemas, sólo plantearlos.

1. 2 unidades más que 5 veces un cierto número.

2. La parte menor de 100 si la mayor es x.
3. Las dos partes que forman 100.
4. Tres enteros consecutivos.
5. Los dos números cuya diferencia es 10.
6. Cualquier número impar.
7. Tres números impares consecutivos.
8. *La cantidad* que 5 veces un número excede de 60.
9. *La cantidad* que 75 excede de tres veces un número.
10. Si $2n$ representa al primer número entero ¿cómo representa al tercer número entero?
11. Si $2n$ representa al primer número entero, ¿cómo representa la suma de los primeros cuatro números enteros?
12. El número de centavos en pesos.
13. El cuadrado de cualquier entero.
14. Tres veces el entero inmediato mayor.
15. Lo que excede el cuadrado de un número a su doble.
16. La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos.
17. El costo en centavos de n artículos si tres se adquieren con 10 centavos.
18. El costo en pesos de n artículos si dos valen 15 centavos.
19. La fracción cuyo denominador es 4 unidades mayor que el doble del cuadrado del numerador.
20. El perímetro de un rectángulo si un lado es 3 cm más corto que el triple del otro lado.
21. El perímetro y el área de un rectángulo si un lado es 4 metros mayor que el doble del otro lado.
22. Los litros de alcohol contenidos en un tanque A que tiene x litros de una mezcla de 40% de alcohol.
23. El total de litros de alcohol si juntamos los del tanque A del problema anterior a los de un tanque B que tiene y litros de mezcal al 20%.
24. La suma de dos números es 21 y un número es el triple del otro.
25. El producto de dos enteros consecutivos es 72.
26. La suma de un número y su recíproco es 34/15.
27. Hace 10 años Juan tenía cuatro veces la edad de Memo: ahora la edad de Juan sólo duplica la de Memo.
    Planteé la expresión que nos lleve a la solución.
28. Un papá es 24 años mayor que su hijo. Dentro de 8 años el papá tendrá el doble de años que su hijo. Escriba una expresión que nos lleve a la solución.
29. Cuando se aumentan 4 metros a cada lado de un área cuadrada, el area aumenta 64 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del área original? Sólo planteélo.
30. La longitud de un rectángulo es el triple de su ancho. Si el ancho se disminuye en un metro y se aumentan 3 metros al largo, el área será de

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

72 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original? Sólo planteélo.

I. El perímetro de un triángulo isósceles es de 84 centímetros y la longitud de uno de sus lados iguales es dos tercios de la longitud de la base. Encuentre la longitud de la base del triángulo.

Módulo 10

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá el término ecuación.
2. Despejará la incógnita que se señale de cualquier fórmula.
3. Resolverá ecuaciones de primer grado con una incógnita.

ESQUEMA RESUMEN

SOLUCION DE ECUACIONES:

1. Despejar una incógnita.
2. Resolución de la ecuación.
3. Fórmulas.—Ecuaciones que expresan una ley.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

10.1 Solución de ecuaciones

Las ecuaciones incluyen símbolos de igualdad

En la **traducción** del idioma ordinario al lenguaje simbólico, hemos visto que el planteamiento nos conduce con frecuencia a expresiones en las que se incluye el **símbolo de la igualdad.** Estas expresiones las definimos en el tema de la Unidad III con el nombre de **ecuaciones;** dijimos que **una ecuación es una igualdad condicionada para ciertos valores de la variable.** Encontrar esos valores que forman el conjunto solución es el proceso de **resolver la ecuación** o como también se le llama, **el proceso de despejar la variable o incógnita.**

Como recordaremos, el proceso de **resolver una ecuación** o **despejar una incógnita** consiste en ir paso a paso transformando la ecuación dada en otra equivalente, utilizando para ello las **propiedades de la igualdad, postulados y teoremas** ya demostrados. Por ejemplo:

$$4x + 6 = 2x + 18 \Rightarrow 2x + 6 = 18$$

(Agregamos $-2x$ a cada lado de la igualdad)

Con la misma propiedad **aditiva de la igualdad** podemos transformar la expresión

$$2x + 6 = 18 \Rightarrow 4x + 6 = 2x + 18$$

(Agregamos $2x$ a cada lado de la igualdad)

Es decir que podemos usar la **doble implicación**

$$4x + 6 = 2x + 18 \Leftrightarrow 2x + 6 = 18 .$$

por lo que ambas expresiones son **equivalentes** o significan lo mismo y por lo tanto podemos estar seguros de que tienen el mismo conjunto solución para x.

$2x + 6 = 18 \Leftrightarrow 2x = 12$ (Agregando -6)

$2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$ (Propiedad multiplicativa $\frac{1}{2}$, y teorema de la división)

por lo tanto $4x + 6 = 2x + 18 \Leftrightarrow x = 6$

Regla de **inferencia de la cadena**

Comprobación: $4(6) + 6 \stackrel{?}{=} 2(6) + 18$

$$24 + 6 \stackrel{?}{=} 12 + 18$$

$$30 = 30$$

Despejar la incógnita

Por supuesto que la mecanización del proceso, nos permite saltar más o menos pasos de acuerdo con la destreza adquirida en el manejo de las expresiones algebraicas.

El nombre **despejar la incógnita** proviene principalmente de la solución de ecuaciones **literales**, es decir, **ecuaciones en las que además de la variable se utilizan otras letras para representar números reales**, de modo que la solución no es numérica sino una expresión algebraica y la letra que representa a la variable de la expresión puede cambiar en cada ocasión que se usa esa expresión, dependiendo de las cantidades que se conozcan; a esas expresiones se les conoce en las diferentes especialidades con el nombre de **fórmulas**, y son ecuaciones que expresan una ley, una regla o un principio general.

Ejemplos: a) $F = ma$; esta fórmula expresa una ley física en donde F representa el valor de una **fuerza**, m el valor de una **masa** y a representa el valor de una **aceleración**.

La fórmula se lee: **Fuerza igual a masa por aceleración** y cuando se conoce el valor de m y de a, se sustituyen para encontrar el valor de F; pero algunas veces nos interesa conocer el valor de a ya que conocemos los valores de F y m, por lo que a es ahora la **variable o incógnita** y debemos resolver para a, o despejar a

$F = ma \Leftrightarrow a = \dfrac{F}{m}$ (Propiedad multiplicativa $\frac{1}{m}$ y Teorema de la división)

o también $F = ma \Leftrightarrow m = \dfrac{F}{a}$

b) $$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

Esta fórmula se usa en las progresiones aritméticas en donde S_n (S índice n) representa la suma de n **términos** de una progresión, a_1 representa el **valor del primer término** y d la **diferencia común** entre términos consecutivos de una progresión; se lee, la suma de n términos de una progresión es igual al número de términos n por la suma del doble del primero, más el número de términos menos uno, por la diferencia común, todo dividido entre dos.

Supongamos que conocemos los valores de S_n, n y d, en tal caso, la incógnita será a_1, el primer término y debemos despejar a_1 o resolver para a_1

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$\frac{2S_n}{n} = 2a_1 + (n-1)d$$ (Multiplicamos ambos lados por el recíproco de $\frac{n}{2}$)

$$\frac{2S_n}{n} - (n-1)d = 2a_1$$ (Agregamos el inverso de $(n - 1)d)$

$$\frac{2S_n - n(n-1)d}{n} = 2a_1$$ (Efectuamos la resta en el miembro izquierdo de la ecuación)

$$a_1 = \frac{2S_n - n(n-1)d}{2n}$$ (Multiplicamos por el recíproco de 2 y la propiedad simétrica de la igualdad).

Ahora sabemos el valor literal de a_1 y será cuestión de **sustituir** los valores de las demás literales para obtener un valor numérico.

Sustitución

Algunas veces las ecuaciones pueden contener fracciones y en tales casos es conveniente principiar la solución con los pasos que nos lleven a una ecuación equivalente sin fracciones o quebrados y para eso, podemos aplicar la propiedad multiplicativa de la igualdad usando como factor el mínimo común múltiplo (MCM) de todos los denominadores y luego proseguir en la forma ya explicada.

Ejemplos: a) $4x - 9 = \frac{x}{4}$ $\qquad MCM = 4$

$$4(4x - 9) = 4(\tfrac{x}{4})$$
$$16x - 36 = x$$
$$\ldots = \ldots$$

b) $3 - \frac{1}{5}x = x - \frac{1}{7}$ $\qquad MCM = 35$

$$35(3 - \tfrac{1}{5}x) = 35(x - \tfrac{1}{7})$$
$$105 - 7x = 35x - 5$$
$$\ldots = \ldots$$

c) $\frac{2a}{3} - \frac{a+4}{2} = 6 - \frac{a-2}{2}$ $\qquad MCM = 6$

$$6(\tfrac{2a}{3} - \tfrac{a+4}{2}) = 6(6 - \tfrac{a-2}{2})$$
$$4a - 3(a + 4) = 36 - 3(a - 2)$$
$$\ldots = \ldots$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Resuelva las ecuaciones y compruebe la solución en los problemas del 1 al 11.

1. $2(x + 3) = 3(x - 1)$
2. $3y - 2(y - 1) = 4(y + 2)$
3. $2y + 3 = 7y - 10$
4. $7x + \sqrt{3} = 2$
5. $9 - 2[a - 3(a - 4) - 5] = 1 - 5(a - 2)$
6. $3 + |x| = 4$
7. $5 - |x + 3| = 6$
8. $|14x - 97| = -8$
9. $|3 - x| = 6$
10. $\sqrt{(2 - x)^2} = 4$
11. $\sqrt{(x - 4)^2} = -1$

En las fórmulas siguientes resuelva para la variable que se indica.

12. $A = \pi r^2$, despeje r
13. $°F = \frac{9}{5}\,°C + 32$, despeje °C $\qquad$ °C se lee grados centígrados y °F se lee grados farenheit
14. $P = 2a + 2b$, resuelva para b
15. $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$, resuelva para b_1
16. $V = IR$, despeje R
17. $d = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$, despeje a

Resuelva las siguientes ecuaciones que ahora contienen fracciones.

18. $8x + \frac{11}{3} = \frac{1}{5}x - 7$
19. $\frac{2y}{3} - \frac{y}{6} = 2$
20. $7 - \frac{1}{3}(6x - 3) = \frac{5}{2}(2x + 4)$
21. $\frac{2a}{3} - \frac{a+4}{2} = 6 - \frac{a-2}{2}$
22. $3 - \frac{1}{5}x = x - \frac{1}{7}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

23. $\frac{9a + 1}{15} = \frac{2}{3}$

24. $\frac{r - 1}{2} - \frac{r - 2}{3} - \frac{r + 3}{2} = 0$

25. $\frac{1}{2}(3y - 4) - \frac{2}{3}(y - 6) = \frac{1}{6}(y - 6)$

Módulo 11

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Resolverá desigualdades e inecuaciones que contengan una variable.
2. Graficará en la recta numérica el conjunto solución de una desigualdad.
3. Resolverá ecuaciones fraccionarias.
4. Explicará con sus propias palabras qué es una ecuación fraccionaria.

ESQUEMA RESUMEN

Desigualdades
- Conjunto solución
- Gráfica en la recta numérica

Ecuaciones fraccionarias
- Solución
- Comprobación

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

11.1 Solución de desigualdades

Las inecuaciones incluyen desigualdades

En el tema anterior nos concentramos en la solución de ecuaciones para poder resolver los problemas que al simbolizarse contienen igualdades, pero como vimos antes del planteo de los problemas, resultan también expresiones que contienen **desigualdades** o **combinación de igualdades con desigualdades.** El proceso para encontrar el conjunto solución o sencillamente la solución para expresiones con desigualdades, también llamadas **inecuaciones,** es muy semejante al que hemos empleado para la ecuaciones; sólo que ahora **las justificaciones para las transformaciones son los postulados de orden y los teoremas sobre desigualdades ya demostrados en el tema de la Unidad V.**

En la Unidad V vimos la diferencia en las gráficas del conjunto solución, cuándo se trataba de una ecuación, y cuándo se trataba de una inecuación; en la ecuación, el conjunto solución puede ser vacío o tener varios valores, por lo que su gráfica es ningún punto o varios puntos. **En la inecuación o desigualdad, el conjunto solución generalmente es infinito y si el conjunto de reemplazamiento o universo son los números reales, la gráfica de los números sucesivos es un segmento de la recta numérica llamado intervalo que puede ser cerrado o abierto, según que sus extremos estén o no definidos respectivamente.**

Ejemplos: a) $4x + 5 > 2x + 9$

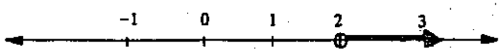
Solución:

$2x + 5 > 9$ (Agregamos $-2x$ en ambos miembros)

$2x > 4$ (Agregamos -5)

$x > 2$ (Agregamos el factor $\frac{1}{2}$ que es mayor que 0)

Gráfica



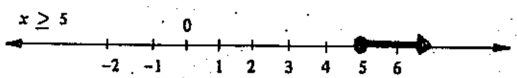
b) $2x + 7 \leq 5x - 8$

Solución:

$-3x + 7 \leq -8$ (Agregamos $-5x$)

$-3x \leq -15$ (Agregamos -7)

$x \geq \frac{-15}{-3}$ (Agregamos el factor $-\frac{1}{3}$ que por ser $-\frac{1}{3} < 0$ obliga a cambiar el sentido de la desigualdad de **menor que a mayor que).**



11.2 Ecuaciones fraccionarias

Hemos resuelto ecuaciones que contienen fracciones, pero un tipo muy especial de éstas son las que tienen por lo menos en algún **denominador** a la variable cuyo conjunto solución se está buscando, las llamamos **ecuaciones fraccionarias.**

En este tipo de ecuaciones algunas operaciones no dan **ecuaciones equivalentes.** Por ejemplo:

Sea la ecuación fraccionaria $\frac{1}{x-3} = 1 - \frac{2x-7}{x-3}$

el MCM $= x - 3$ $\quad (x-3)\left(\frac{1}{x-3}\right) = (x-3)\left(1 - \frac{2x-7}{x-3}\right)$

$$1 = (x-3) - (x-3)\ \frac{2x-7}{x-3}$$

$$1 = x - 3 - 2x + 7$$

$$x = 3$$

estas ecuaciones no son equivalentes a la original, porque el conjunto solución es $\{3\}$ para ambas, pero no para la ecuación original que entonces sería ϕ .

Sustituyendo tenemos $\frac{1}{(3)-3} = 1 - \frac{2(3)-7}{(3)-3}$ y vemos que con ese valor para x los números quedan indefinidos:

$$\frac{1}{0} = 1 - \frac{-1}{0}$$

Universo de las ecuaciones fraccionarias

En otras palabras, podemos decir que en las **ecuaciones fraccionarias el Universo para la variable ya no son todos los números reales y deben excluirse aquellos valores que hagan que un denominador cualquiera sea 0;** en nuestro ejemplo excluiríamos al número 3 escribiendo la ecuación como sigue:

$$\frac{1}{x-3} = 1 - \frac{2x-7}{x-3} \qquad \{x \mid x \neq 3\}$$

con lo que indicamos que ese valor no puede pertenecer al conjunto solución; generalmente al plantear la ecuación no se excluyen números de su conjunto de reemplazamiento, considerándose tentativamente que son todos los números reales y ya obtenido un conjunto solución, se prueban sus elementos en la ecuación original excluyéndose los que no satisfacen a la ecuación. Ejemplo:

Encontrar el conjunto solución para x. $\quad \frac{2x-11}{x-2} = 1 - \frac{7}{x-2}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$(x-2)\left(\frac{2x-11}{x-2}\right) = (x-2)\left(1-\frac{7}{x-2}\right)$$
$$2x-11 = (x-2)-(7)$$
$$2x-11 = x-9$$
$$x-11 = -9$$
$$x = 2$$

Comprobación: $\dfrac{2(2)-11}{(2)-2} = 1 - \dfrac{7}{(2)-2}$

$$\frac{-7}{0} = 1 - \frac{7}{0}$$

Con el elemento 2 la igualdad tiene un valor de verdad indefinido y siendo 2 la única solución encontrada, la solución a la ecuación original será $\{\ \}\ \varnothing$.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Resuelva las **desigualdades** o **inecuaciones** siguientes, **grafique en la recta numérica el conjunto solución** y diga cuando se trate de un **intervalo** si éste es abierto o cerrado.

1. $5x - 7 < 9x$
2. $2(x+3) > 3(x-1) + 6$
3. $7x - 6 \leq 4 + 17(x-5)$
4. $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{1}{6}$
5. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{3} > \frac{5}{8}x$
6. $\frac{1}{3}y - \frac{1}{2} \leq 4 - \frac{1}{6}y$
7. $7(3x-1) \geq 4 + 5(2x+1)$
8. $\frac{a-3}{5} > \frac{1-a}{4}$
9. $|a+1| > 3$
10. $|2a+1| < 3$

En los problemas siguientes resuelva las inecuaciones en **conjunción** o **disyunción**. Recuerde que $a < x < b \Leftrightarrow x > a$ y $x < b$

11. $5a > a + 2$ ó $3a + 1 > 8$
12. $5x + 7 < 2$ y $3x - 4 > 8$
13. $-1 < x + 2 < 6$
14. $-3 < 3x + 2 < -1$
15. $5x + 7 < 2$ ó $3x - 4 > 8$

Encuentre el **conjunto solución** de los siguientes problemas:

16. $x - \frac{1}{8} = \frac{x}{4} - \frac{x-5}{2}$
17. $\frac{a+4}{5} - 7 = 3 - \frac{a+2}{4}$
18. $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$
19. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1}$
20. $\frac{1}{y} = 8 - \frac{3}{y}$
21. $\frac{6}{3y-1} - \frac{1}{y} = \frac{4}{y(3y-1)}$
22. $\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2}$
23. $\frac{3x}{x-3} = \frac{9}{x-3} + 4$
24. $\frac{y-2}{2y-8} - 5 = \frac{5}{3y-12}$

NOTA: Algunas expresiones son polinomios de 2o. grado, sin embargo, los problemas están diseñados de modo que la solución es posible con los conocimientos hasta aquí adquiridos.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

25. $\frac{4y+2}{2y-1} = \frac{2y-5}{y+2} + \frac{3}{2y^2+3y-2}$

INDICACION: Antes de factorizar para buscar el MCM déle a las expresiones la forma polinomial.

26. $\frac{3}{k^2+k-6} + \frac{4}{3-5k-2k^2} = 0$

27. $\frac{3-x}{x^2+x-2} = \frac{2x-4}{3-2x-x^2} + \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

Módulo 12

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. **Planteará problemas en términos de ecuaciones.**
2. **Resolverá los problemas planteados.**
3. **Aplicará los conceptos sobre problemas de planteo a diferentes áreas de la ciencia.**

ESQUEMA RESUMEN

PROBLEMAS DE PLANTEO:

Una cantidad es igual a la razón por la base tomada

$$C = R \times B$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

12.1 Problemas de planteo

Ya hemos visto y practicado la forma de plantear un problema real en lenguaje algebraico y también, aprendimos ya a resolver los diferentes tipos de ecuaciones o inecuaciones que nos presenta el lenguaje algebraico utilizando en ello los postulados de la igualdad, de campo y de orden, así como los teoremas que nos han permitido una cierta mecanización en las operaciones o manipulación de las expresiones algebraicas. Completaremos lo anterior concentrándonos ahora en la solución de los problemas propuestos en el lenguaje ordinario usando las técnicas algebraicas.

Existen en el lenguaje ordinario expresiones que utilizamos con mucha frecuencia y que se refieren a una fracción o razón, la cual es muy importante que sepamos identificar. Me refiero a términos como el de: **velocidad** que se refiere a la fracción $\frac{\text{kilómetros}}{\text{hora}}$, $\frac{\text{metros}}{\text{segundo}}$ etc. y que mencionamos como kilómetros por hora, metros por segundo, etc. dando la apariencia de un producto. **Precio unitario:** que se refiere a $\frac{\text{pesos}}{\text{artículo}}$, $\frac{\text{centavos}}{\text{artículo}}$, etc. y que leemos como pesos por un artículo, centavos por un artículo, etc., o también pesos por kilo, pesos por litro, etc.

Para el tratamiento de los problemas en donde intervenga algún tipo de razón podemos utilizar como una fórmula la siguiente proposición:

> **Una cantidad es igual a la razón por la base tomada** $C = R \times B$

Ejemplos:

a) Cantidad de kilómetros (distancia) = razón en kilómetros por hora (velocidad) x las horas (tiempo)

b) Cantidad de dinero (Costo) = razón en pesos por unidad (precio unitario) x las unidades (unidades)

c) Cantidad de trabajo desarrollado = razón en trabajo hecho cada día x días trabajados.

Pasos para resolver problemas de planteo

En la solución de los problemas de planteo vamos a considerar los siguientes pasos:

1. Interpretar correctamente el significado de la expresión hablada o escrita, asignando a las variables o incógnitas las últimas letras del alfabeto (x, y, z).
2. Escribir la expresión o expresiones algebraicas procurando referir todas las variables a una sola que pudiera llamarse x Esta restricción es temporal mientras aprendamos a resolver expresiones con más de una variable).
3. Relacionar la información ya simbolizada para establecer una ecuación o una inecuación.

4. Resolver la ecuación o inecuación.
5. Interpretar la solución algebraica en términos del lenguaje ordinario comprobando que satisface las condiciones estipuladas.

Ejemplos:

1. Encuentre las dimensiones de un terreno rectangular con un perímetro de 540 metros, si sabemos que el largo mide 30 metros más que el ancho. Este es el ejemplo 2 del tema Planteo de problemas, sólo que ahora debemos simbolizar usando solamente una variable).

Largo mide 30 metros más que el ancho   largo $= x$ ancho $= x - 30$
y el perímetro es de 540 metros
perímetro = 2 veces el largo + 2 veces el ancho $2x + 2(x - 30) = 540$

Ecuación: $2x + 2(x - 30) = 540$

Solución:
$$2x + 2x - 60 = 540$$
$$4x = 600$$
$$x = 150$$

Interpretación:
largo = 150 metros   ancho = 120 metros

Comprobación:
Perímetro $= 2(150) + 2(120) = 300 + 240 = 540$ metros

2. Si la suma de dos números es 21 y un número es el triple del otro. ¿Cuáles son esos dos números?

Dos números cuya suma es 21 $x,\ 21 - x$
uno es el triple del otro $(21 - x) = 3x$

Ecuación: $21 - x = 3x$

Solución:
$$21 = 4x$$
$$x = \frac{21}{4}$$

Interpretación: un número $= \frac{21}{4}$ y el otro $= (3)\frac{21}{4} = \frac{63}{4}$

Comprobación:
$$\frac{21}{4} + \frac{63}{4} = \frac{84}{4} = 21$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

3. El dígito de las decenas de un cierto número de dos dígitos es 4 unidades mayor que el dígito de las unidades y es una unidad menor que el doble del dígito de las unidades. ¿Cuál es ese número?

Dígito de las decenas	x
es 4 unidades mayor que el dígito de las unidades	$x - 4$
el doble del dígito de las unidades	$2(x - 4)$
menos 1 es el dígito de las decenas	$2(x - 4) - 1 = x$

Ecuación: $2(x - 4) - 1 = x$

Solución:
$$2x - 8 - 1 = x$$
$$2x - x = 9$$
$$x = 9$$

Interpretación: dígito de las decenas $= 9$
dígito de las unidades $= 9 - 4 = 5$
Número 95

Comprobación: x es una unidad menor que el doble de 5
$2(5) - 1 = 10 - 1 = 9$

4. ¿Que bonificación recibe un empleado si cobra $ 1,496.00 después de deducirle 15% de impuestos?

Bonificación	x
Impuestos	$.15x$

La bonificación menos impuestos da 1,496.00

$$x - .15x = 1{,}496.00$$
$$100x - 15x = 149{,}600$$
$$85x = 149{,}600$$
$$x = \frac{149{,}600}{85} = 1{,}760.00$$

5. Dos corredores recorren una pista circular de un kilómetro en 6 y 10 minutos respectivamente. Si arrancan al mismo tiempo del mismo lugar y en la misma dirección ¿en cuántos minutos pasará el más rápido al más lento?

$C = R \times B$, en este caso la fórmula será:

distancia = velocidad x tiempo

$$d = V \cdot t$$

El más rápido será el que hace menos tiempo y lo llamaremos A, su velocidad $= \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{1 \text{ km}}{6 \text{ min.}}$ $V_A = \frac{1}{6}$ km/min.

El más lento lo llamaremos B y su velocidad $V_B = \frac{1}{10}$ km/min.

Para que A alcance a B tiene que recorrer un kilómetro más de lo que lleve B es decir, la diferencia es de 1 km o una vuelta más a la pista.

$$d = Vt \quad \underbrace{\text{distancia recorrida por } A}_{V_A t} - \underbrace{\text{distancia recorrida por } B}_{V_B t} = 1 \text{ km}$$

$$\frac{1}{6}t - \frac{1}{10}t = 1 \qquad MCM = 30$$
$$30\left(\frac{1}{6}t - \frac{1}{10}t\right) = 30 \cdot 1$$
$$5t - 3t = 30$$
$$2t = 30$$
$$t = 15 \text{ minutos}$$

Comprobación

distancia recorrida por B en 15 minutos $d_B = \frac{1}{10}(15) = 1.5$ km

distancia recorrida por A en 15 minutos $d_A = \frac{1}{6}(15) = \frac{15}{6}$ km $= 2.5$ km

6. Un obrero A efectúa un trabajo en 3 días y un obrero B tarda para el mismo trabajo 6 días ¿en cuántos días harán ese trabajo entre los dos?

Fórmula: $C = R \times B$

Ahora:
Cantidad de trabajo desarrollado = trabajo hecho cada día x número de días.

Si llamamos x al **número de días** cuando trabajan juntos y la cantidad de trabajo es 1, A que tarda 3 días trabaja a razón de $\frac{1}{3}$ $(R = \frac{C}{B})$ y B a razón de $\frac{1}{6}$

La razón R trabajando juntos será, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$$C = R \times B$$

Ecuación: $1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot x$ $\qquad C = R \times B \qquad 1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot x$

Solución:
$$6 \cdot 1 = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x$$
$$6 = 2x + x$$
$$x = 2 \text{ días}$$

Comprobación

A efectúa: $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$ del trabajo

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

B efectúa: $\frac{1}{6} \times 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ del trabajo

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ trabajo terminado

7. ¿Cuántos kilos de nuez criolla que cuesta \$ 20.00 el kilo, deben mezclarse con 30 kilos de nuez de castilla que cuesta \$ 38.00 el kilo para obtener una mezcla que se vende a \$ 26.00 el kilo?

kilos de nuez de castilla	30
kilos de nuez criolla	x
kilos de mezcla resultante	$30 + x$

Fórmula: $C = R \times B$ que ahora nos representa:
valor total = precio unitario x número de unidades

Valor de nuez de castilla $= 38 \cdot 30 = 1{,}140.00$
Valor de nuez criolla $= 20 \cdot x = 20x$
Valor de la mezcla $= 26 \cdot (30 + x)$

Ecuación: Valor de nuez de castilla + valor nuez criolla = valor mezcla

$$1{,}140 + 20x = 26(30 + x)$$

Solución:

$$1{,}140 - 780 = 26x - 20x$$

$$x = \frac{360}{6} = 60 \text{ kilos}$$

Comprobación:

30 kilos a 38.00 kilo = 1,140.00
60 kilos a 20.00 kilo = 1,200.00 +
90 kilos a 26.00 kilo = 2,340.00

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

PROBLEMAS SOBRE MEDICIONES

1. Si al aumentar 4 metros a cada lado de un cuadrado el área aumenta 64 metros cuadrados ¿cuáles erán las medidas del cuadrado original?
2. El perímetro de un triángulo isósceles es de 84 centímetros y la longitud de uno de los lados iguales es dos tercios de la longitud de la base. Encuentre la longitud de la base.
3. Si la lectura en grados fahrenheit de temperatura equivalen a $\frac{9}{5}$ de los grados centígrados más 32. ¿A qué temperatura las mediciones o lecturas serán iguales?

PROBLEMAS NUMERICOS ABSTRACTOS

4. El numerador de cierta fracción tiene 5 unidades más que el denominador. ¿Cuál será esa fracción si al restar 9 unidades al numerador y sumarle 1 al denominador la fracción resulta ser $\frac{1}{2}$?
5. La suma de dos números es 37. Si el mayor se divide entre el menor el cociente es tres y el residuo 5. Encuentre esos números.
6. La mitad de cierto número es 10 unidades mayor que $\frac{1}{6}$ del mismo. ¿Cuál es ese número?

PROBLEMAS CON DIGITOS

7. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 10. Si los dígitos se escriben en orden inverso el nuevo número es una unidad menor que el doble del número original. Encuentre el número original.
8. En un número de dos dígitos, el de las decenas excede en 3 unidades, al de las unidades y la suma de los dos es $\frac{1}{7}$ del número que forman. ¿Qué número forman?

PROBLEMAS COMERCIALES

9. El Sr. Pérez invirtió \$4,000.00; una parte al 5% y el resto al 3% de interés simple. Al año recibió un total de \$168.00 como pago de intereses. ¿Cuánto invirtió al 5% y cuánto al 3%?
10. Si a un comerciante le cuesta un mueble \$1,200.00 y es su política ofrecer un 20% de descuento sobre el precio de lista. ¿Cuál debe ser el precio de lista de modo que la utilidad aún con el descuento sea de 25%?
11. La recaudación total de una pelea de box fue de \$9,778.00. Los boletos para caballero se vendieron a \$15.00 y los de damas a \$8.50. ¿Cuántos boletos de caballero y cuántos de dama se vendieron si en total se vendieron 755 boletos?

PROBLEMAS SOBRE MOVIMIENTO

12. Dos automóviles A y B separados 280 km promedian velocidades de 30 y 40 km/hr. respectivamente. Si a las 3:00 p.m. empezaron a acercarse ¿a qué hora y lugar se encontrarán?
13. Un automóvil viajando al Norte sale al mismo tiempo que un avión que viaja al Sur. Si la velocidad del avión es $2\frac{1}{2}$ veces la del automóvil y después de 1 hora 15 minutos los separan 210 km ¿cuáles son las velocidades de cada uno?
14. Una lancha de carreras que alcanza 60 millas por hora persigue a otra lancha que corre a 32 millas por hora. Si a los 45 minutos la lancha más

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

rápida sobrepasa a la más lenta ¿cuántas millas la adelanta 15 minutos después de haberla alcanzado?

PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS

15. Un tanque contiene 20 litros de una mezcla de alcohol y agua con 40% de alcohol por volumen. ¿Cuántos litros de mezcla deben sustituirse por agua para que la mezcla resultante tenga 25% de alcohol?
16. Dos cantidades de minerales contienen 40% y 25% de manganeso (Mn) respectivamente. ¿Cuántas toneladas de cada mineral deben mezclarse para obtener 100 ton de mezcla con 35% de manganeso? Los porcentajes son por peso.

PROBLEMAS SOBRE TRABAJO

17. Dos obreros *A* y *B* trabajando juntos terminan una tarea en 6 días. *A* trabaja dos veces más rápido que *B*. ¿Cuántos días tardará *A* en hacer el mismo trabajo? ¿Cuántos le tomaría a *B*?
18. Una persona cobra durante su turno $18.00 por cada hora que trabaja y $3.00 por cada hora que pierde en trasladarse. ¿Cuántas horas perdió en trasladarse si después de 40 de labores cobró $540.00.
19. En la apertura de una carretera un tractor pequeño niveló un kilómetro en 6 días. Usando un tractor más grande se redujo el tiempo por el mismo trabajo a 3 días. ¿Cuánto tiempo les tomará el mismo trabajo si se usan los dos tractores simultáneamente?
20. Se usan tres tuberías para llenar un aljibe con agua. Con la tubería más grande sola se tardan 20 min. si se usa la mediana sola se lleva 30 minutos y si se usa la más pequeña tarda 60 minutos. ¿En cuántos minutos se llena usando las tres tuberías?

Paneles de verificación

MODULO 9 - VALIDACION

1. Consideramos que x es ése cierto número
   5 veces cierto número será: $5x$
   y dos unidades más: $5x + 2$

2. La parte mayor x
   Las dos son 100
   La parte menor será: $100 - x$

3. Las dos partes que forman 100
   una puede ser x, la otra será: $100 - x$
   de modo que ambas $x + (100 - x) = 100$

4. Si el primer entero es y
   el segundo será: $y + 1$
   y el tercero será: $y + 2$

5. Uno de los números es x, el otro será $x + 10$

   NOTA: Recuerde que las soluciones o respuestas no son únicas, su respuesta puede ser diferente y ser válida. Compruebe.

6. $2n + 1,\ n \in E$ porque siendo n entero $2n$ siempre es par luego al sumarle 1 será impai

7. La diferencia entre números impares consecutivos es 2.
   Si $2x + 1$ es el primer impar, entonces los tres serán
   $2x + 1,\ 2x + 3,\ 2x + 5$

8. Si el número es x la respuesta será $5x - 60$
9. Si el número es n la respuesta será $75 - 3n$.
10. $2n$ es el primero, $2n + 1$ el segundo entonces $2n + 2$ será el tercero.
11. $8n + 6$. $(2n) + (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 3)$.
12. 1 peso = 100 centavos, entonces x pesos = $100\ x$ centavos.
13. Si el entero es x. x^2.
14. Si el entero es n, el inmediato mayor es $n + 1$, por lo tanto $3(n + 1)$ es la respuesta.
15. El cuadrado de un numero: x^2

El doble de un número; $2x$
respuesta: $x^2 - 2x$

16. Si un entero es y el otro $y + 1$
$y^2 - (y + 1)^2$ ó $(y + 1)^2 - y^2$
$-2y - 1$ $\quad$ $2y + 1$

17. Un artículo cuesta $\frac{10}{3}$ centavos luego n artículos cuestan $\frac{10n}{3}$ centavos.

18. Un artículo vale $\frac{15}{2}$ centavos luego n artículos valen $\frac{15n}{2}$ centavos pero 1 centavo $= \frac{1}{100}$ pesos y x centavos $= \frac{x}{100}$ pesos $\frac{15n}{2}$ centavos serán $\frac{15n}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{15n}{200}$ pesos.

19. El numerador es x, el doble del cuadrado del numerador $2x^2$
El denominador 4 unidades mayor que $2x^2$ es decir $2x^2 + 4$
La fracción es: $\frac{x}{2x^2 + 4}$

20. El perímetro es la suma de los cuatro lados, si un lado es n cms., el otro será $(3n - 3)$ cms. y el perímetro $2n + 2(3n - 3) = 2n + 6n - 6 = 8n - 6$ centímetros.

21. Perímetro $= 2n + 2(2n + 4) = 6n + 8$ metros
Area $= n(2n + 4)$

22. x litros de mezcla al 40% (porcentaje por volumen)
Cantidad de alcohol en el tanque $A = .4x$

23. Alcohol en tanque $A = .4x$
Alcohol en tanque $B = .2y$
Total de alcohol $= .4x + .2y$

24. Si un número es x el otro será $3x$ y la suma:
$$x + 3x = 21$$

25. Un entero es n el otro es $n + 1$ y el producto:
$$n(n + 1) = 72$$

26. Un número n, su recíproco $\frac{1}{n}$ y la suma:
$$n + \frac{1}{n} = \frac{34}{15}$$

27. Sea x la edad presente de Memo y $2x$ la edad actual de Juan de manera que hace 10 años:
La edad de Juan = 4 veces la de Memo
$$2x - 10 = 4(x - 10)$$

28. Edad del hijo: x
Edad del padre: $x + 24$
8 años después:
$(x + 24) + 8 = 2(x + 8)$

29. Un lado del cuadrado es x el área es x^2
Se aumenta el lado a: $x + 4$ la nueva área $= (x + 4)^2$
El área aumenta 64, es decir $(x + 4)^2 - x^2 = 64$ y este último planteamiento nos sirve para encontrar la solución.

30. Ancho $= x,\ x - 1$
Largo $= 3x,\ 3x + 3$
Area $= (x - 1)(3x + 3) = 72$
De la expresión $(x - 1)(3x + 3) = 72$ podemos despejar x para encontrar las dimensiones originales.

31. Si el triángulo es isósceles dos de sus lados son iguales, por tanto si un lado de los iguales es x y el lado desigual es la base, será: $84 - 2x$ y entonces tendremos $x = \frac{2}{3}(84 - 2x)$ de donde podremos obtener el valor de x y de ahí la medida de la base.

MODULO 10 - VALIDACION

1.
$$\begin{aligned} 2(x + 3) &= 3(x - 1) \\ 2x + 6 &= 3x - 3 \\ 2x - 3x &= -3 - 6 \\ -x &= -9 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Comprobación:
$$\begin{aligned} 2(9 + 3) &= 3(9 - 1) \\ 2 \cdot 12 &= 3 \cdot 8 \\ 24 &= 24 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 3y - 2(y - 1) &= 4(y + 2) \\ 3y - 2y + 2 &= 4y + 8 \\ y - 4y &= 8 - 2 \\ -3y &= 6 \\ y &= -\frac{6}{3} = -2 \end{aligned}$$

Comprobación:
$$\begin{aligned} 3(-2) - 2[(-2) - 1] &= 4[(-2) + 2] \\ -6 - 2(-3) &= 4 \cdot 0 \\ -6 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 2y + 3 &= 7y - 10 \\ 2y - 7y &= -10 - 3 \\ -5y &= -13 \\ y &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Comprobación:
$$\begin{aligned} 2(\tfrac{13}{5}) + 3 &= 7(\tfrac{13}{5}) - 10 \\ \frac{26}{5} + 3 &= \frac{91}{5} - 10 \\ \frac{26}{5} + \frac{15}{5} &= \frac{91}{5} - \frac{50}{5} \\ \frac{41}{5} &= \frac{41}{5} \end{aligned}$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

4. $7x + \sqrt{3} = 2$

$$7x = 2 - \sqrt{3}$$
$$x = \frac{2 - \sqrt{3}}{7}$$

Comprobación: $7\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{7}\right) + \sqrt{3} = 2$

$$(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2$$
$$2 = 2$$

5. $9 - 2[a - 3(a - 4) - 5] = 1 - 5(a - 2)$

$$9 - 2[a - 3a + 12 - 5] = 1 - 5a + 10$$
$$9 - 2(-2a + 7) = -5a + 11$$
$$9 + 4a - 14 = -5a + 11$$
$$4a - 5 = -5a + 11$$
$$4a + 5a = 11 + 5$$
$$9a = 16$$
$$a = \frac{16}{9}$$

Comprobación:

$$9 - 2\left[\frac{16}{9} - 3\left(\frac{16}{9} - 4\right) - 5\right] = 1 - 5\left(\frac{16}{9} - 2\right)$$
$$9 - 2\left(\frac{16}{9} - \frac{16}{3} + 12 - 5\right) = 1 - \frac{80}{9} + 10$$
$$9 - 2\left(\frac{-32}{9} + 7\right) = -\frac{80}{9} + 11$$
$$9 + \frac{64}{9} - 14 = 11 - \frac{80}{9}$$
$$\frac{64}{9} - 5 = 11 - \frac{80}{9}$$
$$\frac{64}{9} - \frac{45}{9} = \frac{99}{9} - \frac{80}{9}$$
$$\frac{19}{9} = \frac{19}{9}$$

6. $3 + |x| = 4$

$$|x| = 4 - 3$$
$$|x| = 1$$
$$x = 1 \text{ ó } x = -1$$
$$\{-1, 1\}$$

Comprobación:

$x = 1$	$x = -1$
$3 + \|1\| = 4$	$3 + \|-1\| = 4$
$3 + 1 = 4$	$3 + 1 = 4$

7. $5 - |x + 3| = 6$

$$-|x + 3| = 6 - 5$$
$$-|x + 3| = 1$$
$$|x + 3| = -1$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por definición de valor absoluto ningún número cumple la proposición.

8. $|14x - 97| = -8$ Igual que en el problema anterior no existe solución.

9. $|3 - x| = 6$

$$3 - x = 6 \text{ ó } 3 - x = -6$$
$$x = -3 \text{ ó } x = 9$$
$$\{-3, 9\}$$

Comprobación:

$\|3 - (-3)\| = 6$	$\|3 - 9\| = 6$
$\|3 + 3\| = 6$	$\|-6\| = 6$
$\|6\| = 6$	

10. $\sqrt{(2 - x)^2} = 4$

Un valor equivalente al valor absoluto dijimos que era como sigue: $|x| = \sqrt{x^2}$

$$|2 - x| = 4$$
$$2 - x = 4 \text{ ó } 2 - x = -4$$
$$x = -2 \text{ ó } x = 6$$
$$\{-2, 6\}$$

11. $\sqrt{(x - 4)^2} = -1$ No existe solución de acuerdo con la definición del problema anterior ya que no existen valores absolutos negativos.

12. $A = \pi r^2$ Esta es la fórmula para el área de un círculo de radio r.

$$r^2 = \frac{A}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

13. $°F = \frac{9}{5}°C + 32$ Fórmula para convertir temperaturas. Grados fahrenheit igual a $\frac{9}{5}$ de los grados centígrados + 32

$$°F - 32 = \frac{9}{5}°C$$
$$\frac{5}{9}(°F - 32) = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}°C\right)$$
$$\frac{5}{9}(°F - 32) = °C$$
$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$$

Grados centígrados igual a $\frac{5}{9}$ de la diferencia grados fahrenheit y 32.

14. $P = 2a + 2b$ Fórmula para el perímetro de un rectángulo.

$$2b = P - 2a$$
$$b = \frac{P - 2a}{2} \quad \text{ó} \quad b = \frac{P}{2} - a$$

15. $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ Fórmula para el área de un trapecio donde h es la altura y b_1, b_2 las bases.

$$2A = h(b_1 + b_2)$$
$$\frac{2A}{h} = b_1 + b_2$$
$$b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

16. $R = \frac{V}{I}$ Fórmula para electricidad

Resistencia $= \frac{\text{Voltaje}}{\text{Corriente}}$

17. $d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ Fórmula para obtener distancia "d"

$\frac{1}{2} at^2 = d - v_0 t$ conocidos: V_0 – velocidad inicial

$at^2 = 2(d - v_0 t)$ t – tiempo

$a = \frac{2}{t^2}(d - v_0 t)$ a – aceleración

18. $8x + \frac{11}{3} = \frac{1}{5}x - 7$ $MCM = 15$

$$15(8x + \tfrac{11}{3}) = 15(\tfrac{1}{5}x - 7)$$
$$120x + 55 = 3x - 105$$
$$120x - 3x = -105 - 55$$
$$117x = -160$$
$$x = -\frac{160}{117}$$
$$\{-\tfrac{160}{117}\}$$

19. $\frac{2y}{3} - \frac{y}{6} = 2$ $MCM = 6$

$$6(\tfrac{2y}{3} - \tfrac{y}{6}) = 12$$
$$4y - y = 12$$
$$3y = 12$$
$$y = 4$$
$$\{4\}$$

20. $7 - \frac{1}{3}(6x - 3) = \frac{5}{2}(2x + 4)$ $MCM = 6$, pero los sumandos son múltiplos del factor afuera del paréntesis, luego el desarrollo nos dará enteros.

$$7 - 2x + 1 = 5x + 10$$
$$-2x - 5x = 10 - 8$$
$$-7x = 2$$
$$x = -\frac{2}{7}$$
$$\{-\tfrac{2}{7}\}$$

21. $\frac{2a}{3} - \frac{a+4}{2} = 6 - \frac{a-2}{2}$ $MCM = 6$

$$4a - 3(a + 4) = 36 - 3(a - 2)$$
$$4a - 3a - 12 = 36 - 3a + 6$$
$$4a = 54$$
$$a = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$
$$\{\tfrac{27}{2}\}$$

22. $3 - \frac{1}{5}x = x - \frac{1}{7}$ $MCM = 35$

$$105 - 7x = 35x - 5$$
$$42x = 110$$
$$x = \frac{55}{21}$$
$$\{\tfrac{55}{21}\}$$

23. $\frac{9a + 1}{15} = \frac{2}{3}$ $MCM = 15$

$$9a + 1 = 10$$
$$9a = 9$$
$$a = 1$$
$$\{1\}$$

24. $\frac{r-1}{2} - \frac{r-2}{3} - \frac{r+3}{2} = 0$ $MCM = 6$

$$3(r - 1) - 2(r - 2) - 3(r + 3) = 0$$
$$3r - 3 - 2r + 4 - 3r - 9 = 0$$
$$-2r - 8 = 0$$
$$2r = -8$$
$$r = -4$$
$$\{-4\}$$

25. $\frac{1}{2}(3y - 4) - \frac{2}{3}(y - 6) = \frac{1}{6}(y - 6)$ NOTA: Podemos reducir términos semejantes.

$$\tfrac{1}{2}(3y - 4) - \tfrac{2}{3}(y - 6) - \tfrac{1}{6}(y - 6) = 0$$
$$\tfrac{1}{2}(3y - 4) - \tfrac{5}{6}(y - 6) = 0 \quad MCM = 6$$
$$3(3y - 4) - 5(y - 6) = 0$$
$$9y - 12 - 5y + 30 = 0$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

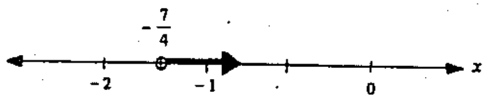
$4y = -18$

$y = -\frac{9}{2}$

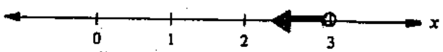
$\{-\frac{9}{2}\}$

MODULO 11 - VALIDACION

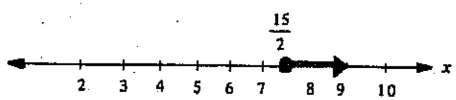
1. $5x - 7 < 9x$
$5x - 9x < 7$
$-4x < 7$
$x > -\frac{7}{4}$



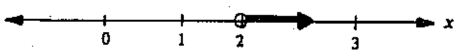
2. $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6$
$2x + 6 > 3x - 3 + 6$
$-x > -3$
$x < 3$



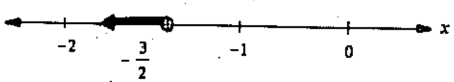
3. $7x - 6 \leq 4 + 17(x - 5)$
$7x - 6 \leq 4 + 17x - 85$
$75 \leq 10x$
$x \geq \frac{75}{10}$
$x \geq \frac{15}{2}$



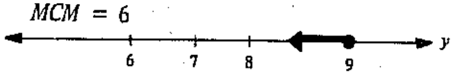
4. $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{1}{6}$
$3x + 8 < 8x - 2$
$-5x < -10$
$x > 2$



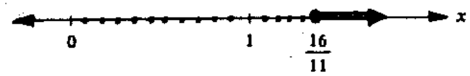
5. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{3} > \frac{5}{8}x$ $\qquad MCM = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
$48x - 40 > 75x$
$-40 > 27x$
$x < -\frac{40}{27}$



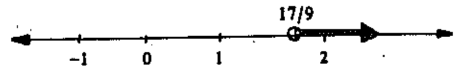
6. $\frac{1}{3}y - \frac{1}{2} \leq 4 - \frac{1}{6}y$ $\qquad MCM = 6$
$3y \leq 27$
$y \leq 9$



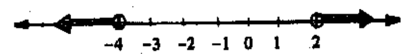
7. $7(3x - 1) \geq 4 + 5(2x + 1)$
$21x - 7 \geq 4 + 10x + 5$
$11x \geq 16$
$x \geq \frac{16}{11}$



8. $\frac{a - 3}{5} > \frac{1 - a}{4}$ $\qquad MCM = 20$
$4(a - 3) > 5(1 - a)$
$4a - 12 > 5 - 5a$
$9a > 17$
$a > \frac{17}{9}$



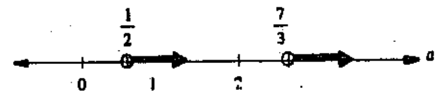
9. $|a + 1| > 3$
$a + 1 > 3$ ó $a + 1 < -3$
$a > 2 \qquad a < -4$



10. $|2a + 1| < 3$
$2a + 1 < 3$ y $2a + 1 > -3$
$a < 1 \qquad a > -2$
$-2 < a < 1$

Sí es intervalo y es **abierto**

11. $5a > a + 2$ ó $3a + 1 > 8$
$4a > 2 \qquad 3a > 7$
$a > \frac{1}{2}$ ó $a > \frac{7}{3}$
$a > \frac{1}{2}$



12. $5x + 7 < 2$ y $3x - 4 > 8$
$5x < -5 \qquad 3x > 12$
$x < -1$ y $x > 4$
$-1 > x > 4$

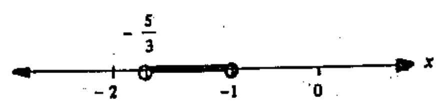
ϕ

No existe un valor que cumpla las dos desigualdades como lo pide la conjunción

13. $-1 < x + 2 < 6$
$-3 < x < 4$

Sí es intervalo y es abierto

14. $-3 < 3x + 2 < -1$
$-5 < 3x < -3$
$-\frac{5}{3} < x < -1$

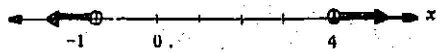


Sí es intervalo y es abierto

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

15. $5x + 7 < 2$ ó $3x - 4 > 8$
$5x < -5 \qquad 3x > 12$
$x < -1$ ó $x > 4$

Las desigualdades son del problema 12 cambiando a disyunción. Ahora si existe solución.



16. $x - \frac{1}{8} = \frac{x}{4} - \frac{x-5}{2}$ $\qquad MCM = 8$

$8x - 1 = 2x - 4(x - 5)$
$8x - 1 = 2x - 4x + 20$
$10x = 21$
$x = \frac{21}{10}$
$\{\frac{21}{10}\}$

17. $\frac{a+4}{5} - 7 = 3 - \frac{a+2}{4}$ $\qquad MCM = 20$

$4(a + 4) - 140 = 60 - 5(a + 2)$
$4a + 16 - 140 = 60 - 5a - 10$
$9a = 174$
$a = \frac{174}{9}$
$\{\frac{174}{9}\}$

18. $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$ $\qquad MCM = 2x$

$6 - 1 = x$ y $x \neq 0$
$x = 5$ y $x \neq 0$
$\{5\} \cap \{x \mid x \neq 0\}$
$\{5\}$

Esta conjunción es equivalente a la ecuación original
La solución es la intersección de los conjuntos solución como ya vimos en lógica, pero esto se va mecanizando y en el futuro lo haremos mentalmente.

19. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1}$ $\qquad MCM = (x - 1)2x$

$2(x - 1) + (x - 1) = 2x$ y $x \neq 0, x \neq 1$
$2x - 2 + x - 1 = 2x$
$x = 3$ y $x \neq 0, x \neq 1$
$\{3\}$

Ya sea que la intersección se haga mentalmente o que se pruebe la solución 3 en la ecuación original para comprobar si es también solución de ella.

20. $\frac{1}{y} = 8 - \frac{3}{y}$ $\qquad MCM = y$

$1 = 8y - 3 \quad , y \neq 0$
$8y = 4$
$y = \frac{1}{2}$
$\{\frac{1}{2}\}$

21. $\frac{6}{3y-1} - \frac{1}{y} = \frac{4}{y(3y-1)}$ $\qquad MCM = y(3y - 1)$

$6y - (3y - 1) = 4, \ y \neq 0, y \neq \frac{1}{3}$
$3y = 3$
$y = 1$
$\{1\}$

22. $\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2}$ $\qquad MCM = (x + 2)(x - 2)$

$\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2}$
$2x + 1 - (x - 2) = x + 2$
$x + 3 = x + 2$
$0 = -1$
$x = \phi$
$\{\}$

Esta proposición es falsa.
Una inconsistencia, un absurdo debido a que la expresión original no es ecuación, es decir no es válida para ningún número real.

23. $\frac{3x}{x-3} = \frac{9}{x-3} + 4$ $\qquad MCM = (x - 3)$

$3x = 9 + 4(x - 3)$
$3x = 9 + 4x - 12$
$-x = -3$
$x = 3$ y $x \neq 3$
$\{\}$

24. $\frac{y-2}{2y-8} - 5 = \frac{5}{3y-12}$

$\frac{y-2}{2(y-4)} - 5 = \frac{5}{3(y-4)}$ $\qquad MCM = 6(y - 4)$
$3(y - 2) - 5[6(y - 4)] = 2 \cdot 5, \qquad y \neq 4$
$3y - 6 - 30y + 120 = 10$
$-27y = -104$
$y = \frac{104}{27}$
$\{\frac{104}{27}\}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

25. $\frac{4y+2}{2y-1} = \frac{2y-5}{y+2} + \frac{3}{2y^2+3y-2} \qquad MCM = (2y-1)(y+2)$

$\frac{4y+2}{2y-1} = \frac{2y-5}{y+2} + \frac{3}{(2y-1)(y+2)}$

$(4y+2)(y+2) = (2y-5)(2y-1) + 3, \; y \neq -2, \frac{1}{2}$

$4y^2 + 10y + 4 = 4y^2 - 12y + 5 + 3$

$22y = 4$

$y = \frac{2}{11}$

$\{\frac{2}{11}\}$

26. $\frac{3}{k^2+k-6} + \frac{4}{3-5k-2k^2} = 0$

Al segundo denominador le damos la forma polinomial en k y cambiamos el signo al numerador para que el primer término quede positivo, facilitándose la factorización.

$\frac{3}{k^2+k-6} + \frac{-4}{2k^2+5k-3} = 0$

$\frac{3}{(k+3)(k-2)} + \frac{-4}{(2k-1)(k+3)} = 0$

$3(2k-1) + [-4(k-2)] = 0$

$6k - 3 - 4k + 8 = 0$

$2k = -5$

$k = -\frac{5}{2}, \quad k \neq -3, \frac{1}{2}, 2$

$\{-\frac{5}{2}\}$

27. $\frac{3-x}{x^2+x-2} = \frac{2x-4}{3-2x-x^2} + \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

$\frac{-(x-3)}{x^2+x-2} = \frac{2(x-2)}{-(x^2+2x-3)} + \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

$\frac{-(x-3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{-2(x-2)}{(x+3)(x-1)} + \frac{x-1}{(x+3)(x+2)} \qquad MCM = (x+3)(x+2)(x-1)$

$-(x-3)(x+3) = -2(x-2)(x+2) + (x-1)(x-1)$

$-(x^2-9) = -2(x^2-4) + (x^2-2x+1)$

$-x^2 + 9 = -2x^2 + 8 + x^2 - 2x + 1$

$9 = -2x + 9$

$2x = 0$

$x = 0, \; x \neq -3, -2, 1 \qquad \{0\}$

MODULO 12 - VALIDACION

1. Lado $= x$ — Area $= x^2$

Nuevo lado $= x + 4$ — Nueva área $= (x+4)^2$

Nueva área − área $= 64$

$(x+4)^2 - x^2 = 64$

$x^2 + 8x + 16 - x^2 = 64$

$8x + 16 = 64$

$x + 2 = 8$

Solución $x = 6$ mts.

2. Cada lado igual mide x cms.
La base medirá: $84 - 2x$ cms.

$x = \frac{2}{3}(84 - 2x)$

$3x = 168 - 4x$

$7x = 168$

$x = 24$

Base $= 84 - 2(24)$

$= 36$ centímetros

3. $°F = \frac{9}{5}°C + 32$

$°F = °C$ en lectura x es decir

$x°F = x°C$

$x = \frac{9}{5}x + 32$

$5x = 9x + 160$

$x = \frac{160}{-4}$

$x = -40°$

$-40°F = -40°C$

4. Denominador $= x$

Fracción $= \frac{x+5}{x}$

Fracción $= \frac{14}{9}$

$\frac{(x+5)-9}{x+1} = \frac{1}{2} \qquad MCM = 2(x+1)$

$2(x-4) = x + 1, \; x \neq -1$

$x = 9$

5. El número menor $= x$, entonces el mayor es $37 - x$

$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$

$\frac{37-x}{x} = 3 + \frac{5}{x} \qquad MCM = x$

$37 - x = 3x + 5, \; x \neq 0$

$x = 8$

Los números son 8 y 29

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

6. Sea x el número buscado, $\frac{x}{2}$ será la mitad que es igual a: $\frac{x}{6} + 10$

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{6} + 10 \qquad MCM = 6$$
$$3x = x + 60$$
$$x = 30$$

7. Sea x un dígito, el otro será $10 - x$
Si el primero es el dígito de las decenas el número que forman es:
$10x + (10 - x)$
Al revés $10(10 - x) + x$
El número formado al revés es igual al doble del original menos 1
$$10(10 - x) + x = 2(10x + 10 - x) - 1$$
$$100 - 9x = 18x + 19$$
$$x = \frac{81}{27} = 3$$
El número original es $10(3) + (10 - 3) = 30 + 7 =$ **37**

8. decenas $= x$
unidades $= x - 3$
número que forman $= 10x + (x - 3)$
$$x + (x - 3) = \frac{1}{7}[10x + (x - 3)]$$
$$2x - 3 = \frac{1}{7}(11x - 3)$$
$$x = 6$$
Solución **63**

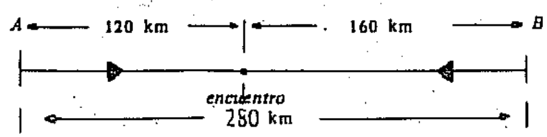
9. Consideremos que la cantidad invertida al 5% es x
$4000 - x =$ cantidad invertida al 3%
interés de la inversión al 5% + interés de la inversión al 3% = 168
$$.05x + .03(4000 - x) = 168$$
Para manejar números más fáciles o con los que tenemos más experiencia que son los enteros multipliquemos la ecuación por 100
$$5x + 3(4000 - x) = 16800$$
$$x = 2{,}400$$
Solución: al 5% – \$2,400.00
al 3% – \$1,600.00

10. Precio de lista x, utilidad 25% del precio de venta
Precio de venta $x - .20x = .80x$
$$\text{Utilidad} = \text{precio de venta} - \text{costo}$$
$$.25(.80x) = .80x - 1{,}200$$
$$.25(.80x) - .80x = -1{,}200$$

$$.80x - (.25)(.80x) = 1{,}200$$
$$.80x(1 - .25) = 1{,}200$$
$$.80x(.75) = 1{,}200$$
$$.6x = 1{,}200$$
$$x = \frac{1{,}200}{.6} = 2{,}000.00$$
Precio de lista \$2,000.00

11. Sea x el número de boletos de caballero
boletos de dama $755 - x$
La recaudación total = recaudación x caballeros + recaudación x damas
$$9{,}778.00 = 15x + 8.5(755 - x)$$
$$9{,}778.00 = 15x + 6{,}417.5 - 8.5x$$
$$6.5x = 3{,}360.5$$
$$x = \frac{3{,}360.5}{6.5} = 517$$
Boletos de **caballero 517**
Boletos de **dama 238**

12. Llamemos t al tiempo transcurrido hasta encontrarse
Distancia = velocidad x tiempo
Distancia recorrida por A + Distancia recorrida por B = 280
$$30t + 40t = 280$$
$$70t = 280$$
$$t = 4 \text{ horas}$$
Se encuentran a las **7:00 p.m.**
A una distancia de la posición inicial **de A de 120 km** ó si se mide de la posición **de B serán 160 km**



13. velocidad del auto $= x$
velocidad del avión $= 2.5x$
como 15 min. $= \frac{1}{4}$ hora
$t = 1.25$ horas
Distancia = velocidad x tiempo
Distancia que recorre el auto + distancia que recorre el avión = 210 km
$$1.25x + 1.25(2.5x) = 210$$

Muchas veces es más rápido operar con fracciones que con decimales probaremos ahora

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

$$\frac{5}{4}x + \frac{5}{4}\left(\frac{5}{2}x\right) = 210$$
$$\frac{5}{4}x + \frac{25}{8}x = 210$$
$$10x + 25x = 1{,}680$$
$$x = 48$$

velocidad del automóvil = **48 km/hr.**
velocidad del avión = **120 km/hr.**

14. La información de 45 minutos para que la lancha rápida alcance a la lenta no es necesaria ya que nos preguntan la diferencia que se establece en 15 minutos.
Distancia = velocidad x tiempo
Distancia de adelanto = Distancia recorrida por lancha rápida − Distancia recorrida por lancha lenta.

Tiempo = 15 minutos = $\frac{1}{4}$ hora

$$\text{Distancia de adelanto} = \frac{1}{4}(60) - \frac{1}{4}(32)$$
$$= 15 - 8$$
$$= 7 \text{ millas}$$

15. Sea x el volumen por sustituir de 40%
Volumen que queda $20 - x$
El volumen de alcohol en los 20 litros al 25% es el mismo que el de la solución que queda al 40%

$$.25(20) = .40(20 - x)$$
$$x = 7.5 \text{ litros}$$

16. Toneladas con 40% de Mn = x Contenido = Porcentaje x Tonelaje
Toneladas con 25% de Mn = $100 - x$
Contenido de Mn al 40% + Contenido de Mn al 25% = Contenido total de Mn al 35%

$$.40x + .25(100 - x) = .35(100)$$

$x = 67$ toneladas al 40% $100 - x = 33$ ton. al 25%

17. Para hacer una tarea A requiere x días mientras B necesita $2x$ días.
Tarea = rapidez diaria x número de días

La rapidez de $A = \frac{1}{x}$ de tarea/día

La rapidez de $B = \frac{1}{2x}$ de tarea/día

En 6 días
Tarea de A + Tarea de B = Tarea Total o terminada

$$\frac{1}{x}\cdot 6 + \frac{1}{2x}\cdot 6 = 1$$
$$6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\right) = 1$$
$$x = 9 \text{ días}$$

A necesita 9 días
B necesita 18 días

18. Horas perdidas en traslado = x Cantidad = Razón x base
Horas trabajadas = $40 - x$

Cantidad ganada en traslado + Cantidad ganada trabajando = 540.00

$$3x + 18(40 - x) = 540$$
$$3x + 720 - 18x = 540$$
$$-15x = -180$$
$$x = 12 \text{ horas}$$

19. Rapidez de trabajo del tractor pequeño = $\frac{1}{6}$ km/día

Rapidez de trabajo del tractor grande = $\frac{1}{3}$ km/día

Tiempo necesario usando ambos tractores = x días

Cantidad de trabajo del tractor pequeño + Cantidad de trabajo del tractor grande = 1 km.

$$\frac{1}{6}\cdot x + \frac{1}{3}x = 1$$
$$\frac{1}{2}x = 1$$
$$x = 2 \text{ días}$$

20. Tiempo requerido por las tres tuberías = t minutos

En un minuto una llena $\frac{1}{20}$ de aljibe (esta es la razón) otra $\frac{1}{30}$ y la más pequeña $\frac{1}{60}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Cantidad = razón x base

$$\frac{1}{20}\cdot t + \frac{1}{30}\cdot t + \frac{1}{60}\cdot t = 1 \text{ aljibe lleno}$$

$$t \;\; \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} \;\; = 1$$

$$t = 10 \text{ minutos}$$

UNIDAD VIII

FUNCIONES, RELACIONES Y GRAFICAS

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Introducción

Los **sistemas matemáticos** como el que forman los números reales sirven de modelo a sistemas de la vida real, sean éstos los complicados sistemas sociales o los menos complicados sistemas físicos de nuestro ambiente, de ahí la gran importancia que le damos al aprendizaje y comprensión de postulados, definiciones y teoremas, acerca de la estructura de los números reales.

En todos los sistemas se establecen relaciones entre conjuntos de individuos, objetos, números o ideas, según que el sistema sea social, físico o matemático, por lo tanto hemos de continuar nuestro estudio de los números reales con los conceptos acerca de las **relaciones** entre los subconjuntos de números reales, de manera que su comprensión facilite el desarrollo de conceptos y habilidades que nos conduzcan a un mejor conocimiento de nuestra sociedad así como del uso y abuso de la tecnología y de las ciencias en general.

La Revolución Industrial se empequeñece ante la promesa de grandes y rápidos cambios en nuestro desarrollo con la aplicación del procesamiento de datos y la computación electrónica; aprovechamos los temas de la presente unidad para dar al estudiante una idea de los métodos y técnicas de estas áreas del conocimiento que pudieran despertar inquietudes que los inclinen al estudio en esas direcciones de gran actualidad y futuro.

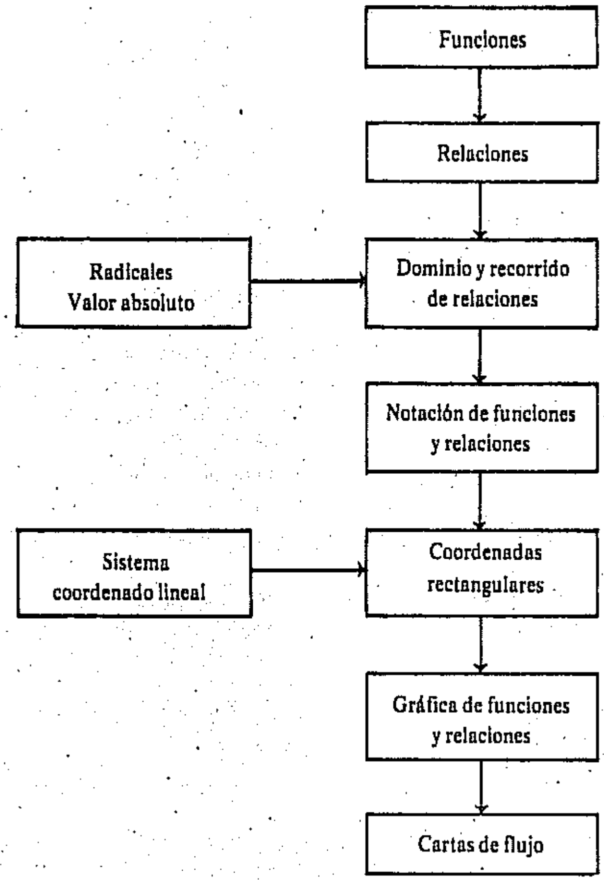
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Diferenciará entre relaciones y funciones de varios pares de conjuntos.
2. Dada la regla de correspondencia, determinará los elementos de una función o relación.
3. Utilizará el sistema de coordenadas para graficar pares ordenados.
4. Dada la regla de correspondencia podrá graficarla en un sistema de coordenadas rectangulares.
5. Dada una serie de instrucciones podrá dibujar una carta de flujo.
6. Dada una carta de flujo podrá interpretarla.

Diagrama temático estructural



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Glosario

Función. Es la correspondencia que se establece entre los elementos de dos conjuntos y asocia a cada elemento del primer conjunto (x) con un elemento único del segundo conjunto [y o $f(x)$].

ó Función. Una función es un conjunto de pares ordenados en el que dos pares distintos no coinciden en el primer elemento.

Dominio. Es el conjunto formado con los primeros elementos x y se le conoce también como variable independiente.

Recorrido o contradominio. Es el formado por los elementos del segundo conjunto Y y se le conoce también como variable dependiente.

Regla de correspondencia. Es la relación que se establece entre el dominio (x) y el contradominio (y).

Pares ordenados. Es la relación uno a uno que se establece entre los elementos del dominio y los elementos del contradominio.

Conjunto de reemplazamiento. Son los números reales que al sustituirlo en la variable x hacen verdadera la función.

Relación. Es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que asocia a cada elemento del primer conjunto x con un elemento cualquiera del segundo conjunto y.

Sistema de coordenadas. Este sistema se forma usando dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, y que se intersectan en sus orígenes.

Modelo geométrico. Es la representación gráfica de un conjunto de números reales.

Origen. Los ejes x y y (abscisa y ordenada). Es el punto donde se intersectan las rectas del sistema coordenado y coinciden con el elemento 0.

Abscisa. Es la coordenada de un número real sobre el eje de las x (horizontal).

Ordenada. Es la coordenada de un número sobre el eje y (vertical).

Proyección perpendicular. Es el proceso de trazar una línea desde la gráfica a uno de los ejes.

Cuadrante. Es el sistema coordenado. La intersección de dos rectas divide al plano en cuatro partes siendo cada una de ellas los cuadrantes.

Diagrama de flujo. Es una representación esquemática de un conjunto de operaciones indicando su secuencia en forma lógica con el objeto de facilitar su visualización.

Algoritmo. Es una lista de instrucciones o secuencia de operaciones que debe seguirse para resolver un problema, efectuar un cálculo o un trabajo.

Información de entrada. Son los datos que introducimos en un algoritmo para encontrar una solución del problema.

Simulación de modelos. Es un proceso por medio del cual se efectúan pruebas dentro del laboratorio de fenómenos reales, considerando ciertas variables.

Módulo 13

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Definirá el concepto de función.
2. Explicará en qué consiste un par ordenado.
3. Explicara cuál es el dominio y contradominio de una función.
4. Definirá el concepto de relación.
5. Mencionará las diferencias y semejanzas entre función y relación.
6. De una lista dada de problemas señalará las expresiones que sean funciones y las que sean relaciones.
7. De una lista de ecuaciones señalará cuál es el dominio y cuál el contradominio.

ESQUEMA RESUMEN

FUNCION:

—Simbología $f: x \Rightarrow y; \quad x \Rightarrow y, \quad f(x) = y, \quad (x, f(x))$

—Dominio

—Regla de correspondencia

—Contradominio o recorrido

IGUALDAD DE PARES ORDENADOS

$(x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z$ y $y = w$

x Variable independiente.

y Variable dependiente.

RELACIONES

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

13.1 Funciones. Notación

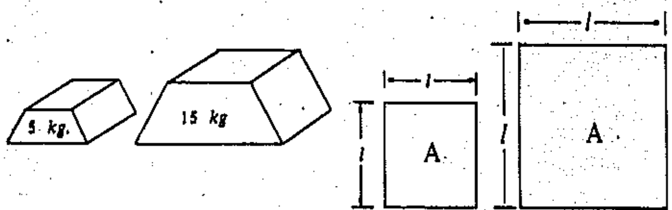
Función matemática

El concepto de **función** es de gran importancia en las ciencias en general y aun en nuestra vida cotidiana. Aunque con frecuencia se mal interpreta o se confunde con el verbo funcionar, es necesario distinguir la diferencia, pues cuando hablamos de **algo que funciona** o no **funciona** nos referimos al verbo funcionar, es decir, hablamos del actuar o del desempeño que tiene ese **algo** sea una persona, una máquina o un ser cualquiera. **Función** en matemática tiene un significado muy especial y no es exclusivo de la matemática como ya dijimos, pues lo encontramos en todas las ciencias.

Antes de dar una definición precisa y formal del concepto de función intentaré mediante ejemplos prácticos dar la idea que nos ayude a comprender esa definición.

Ejemplos de funciones

En nuestra vida diaria el concepto está muy ligado al concepto de **variación**, y así decimos por ejemplo, que en muchos objetos el peso varía con el volumen, si aumenta el volumen aumenta el peso, si disminuye el volumen disminuye el peso; expresamos entonces la **relación** que



existe entre el peso y el volumen, estableciendo que el peso **está en función del volumen** y que a un valor del peso le corresponde un **valor único** de volumen.

En las figuras geométricas, por ejemplo, un cuadrado de lado l, tiene un área A que **varía** al cambiar la medida del lado l, si aumenta l aumenta A, si disminuye l disminuye A; en otras palabras A **está en función de** l; existe una **relación** entre el valor de A y el valor de l y a **un valor** de l sólo le corresponde **un valor de** A.

Correspondencia entre dos conjuntos

En los dos ejemplos anteriores encontramos una **relación de correspondencia** entre los elementos de **dos conjuntos**; en el primer ejemplo son, el conjunto de valores de peso y el de valores de volumen, en el segundo ejemplo son, el conjunto de valores de área y el conjunto de valores del lado; para poder identificar cuáles son los elementos que están en correspondencia puesto que son **elementos únicos**, necesitamos conocer **cómo se relacionan esos conjuntos**; en el primer ejemplo necesitamos saber **cómo varía** el peso según el material y forma del objeto y en el segundo ejemplo necesitamos saber **cómo varía** el área según la figura de que se trate. Existe pues una regla para cada problema en particular que nos da **ese cómo**.

Reglas de correspondencia

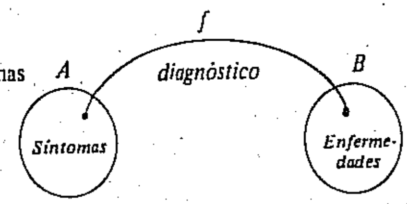
Cuando hablamos de **función** intervienen siempre **tres cosas**, **dos conjuntos y la regla que establece la correspondencia entre los elementos de cada conjunto**, de manera que a un elemento de un conjunto se le pueda identificar el **elemento único** del otro conjunto que le corresponde.

Existen muchas actividades humanas que pueden ser descritas mediante esas tres cosas mencionadas arriba, **dos conjuntos** cualquiera y una **regla de correspondencia.**

Ejemplos:

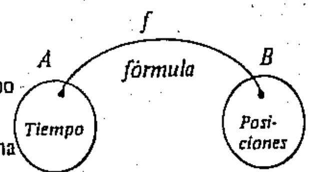
En medicina:

A puede ser un conjunto de síntomas
B un conjunto de enfermedades
f la regla llamada **diagnóstico** que relaciona un síntoma con una enfermedad.

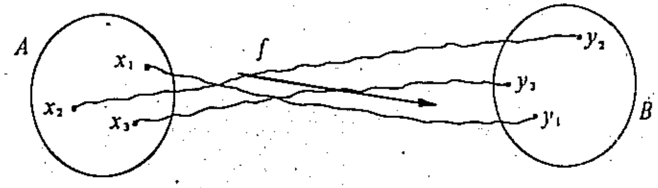


En física:

A puede ser un conjunto de valores de tiempo
B un conjunto de valores de posición
f la regla llamada **fórmula** que nos relaciona para cada valor de tiempo con una posición.



Así podríamos **relacionar** también, un conjunto de valores de distancia con el conjunto de valores de pasajes, y podríamos seguir con más ejemplos o también podríamos generalizar cualquier actividad por medio del álgebra hablando en términos abstractos de los conjuntos A y B, y de la regla de correspondencia f, sin especificar qué elementos forman esos conjuntos, sencillamente diríamos "si x es un elemento de A entonces en B existe un elemento y, asociado a x por medio de la regla de correspondencia f"; en diagramas de Venn esquematizaríamos como sigue:



Representación simbólica de una función

Una práctica generalizada es la de representar a una función por la letra f o también por g, h o r. El hecho de que f asocia cada elemento de

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

A con un elemento único de B se representa simbólicamente en varias formas, a saber.

$$f: x \Rightarrow y, \quad x \Rightarrow y, \quad f(x) = y, \quad \big(x, f(x)\big)$$

De las cuatro formas de simbolizar esta relación la tercera y la cuarta son las más comunes y se leen: $f(x) = y$ "f de x es igual a y". El paréntesis **no indica** multiplicación, señala o destaca el elemento al que se le busca su correspondiente usando la **regla de correspondencia** y que está representado precisamente por $f(x)$ ó por y.

$\big(x, f(x)\big)$ ó (x, y) "$x, f(x)$" ó "x, y". Forman un **par** de números o elementos al que se le llama **par ordenado.**

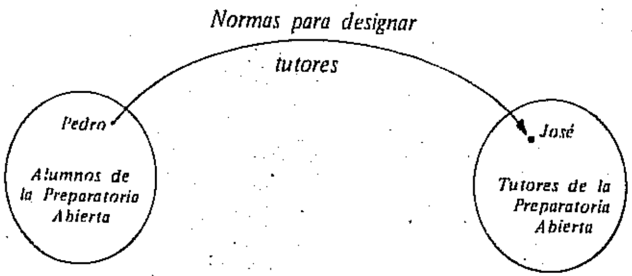
El **orden** es de gran importancia ya que se estableció de manera de que el **primer** elemento sea siempre al que se le busca su correspondiente por medio de la regla de correspondencia y el **segundo** elemento es precisamente el que le corresponde y se representa por $f(x)$ o por y.

La **relación de correspondencia** se establece entonces entre los elementos representados por x y los representados por y, de modo que:

Relación de correspondencia

> A cada elemento x le corresponde un valor único y, de acuerdo con la regla de correspondencia f.

Pero a un valor de y le pueden corresponder uno o más de un valor de x; formando **pares ordenados** podemos simbolizar cualquier relación de correspondencia, por ejemplo; podemos convenir que en un par de nombres el primero sea un alumno de la Preparatoria Abierta y el segundo su Tutor en la misma, entonces (Pedro, José) (Juan, Tomás) (Javier, José)... forman un conjunto de pares ordenados y sabemos sin lugar a dudas que Pedro es un alumno de la Preparatoria Abierta y José es su tutor, que Javier también es alumno y José es su tutor y que de todos los pares el primero es un alumno y el segundo es su tutor; pero, y aquí tenemos algo muy importante, **ese conjunto de pares ordenados sólo será función si para cada alumno sólo hay un tutor,** aunque un tutor le corresponda a varios alumnos, la correspondencia así es unívoca. ¿Cuál sería la regla que relaciona estos nombres? ¿Cómo se sabe que a Juan le corresponde como tutor Tomás?



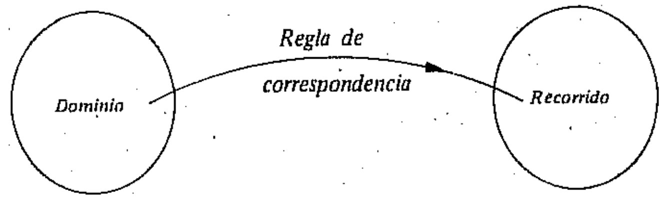
Esto lo decidió un organizador del sistema educativo mencionado y posiblemente no haya seguido una regla específica sino varios factores como: lugar de residencia, lugar de trabajo, etc. Esto nos enseña que una **función es un concepto,** una idea, y no como con frecuencia se confunde, una regla o una ecuación; no confundir entonces a la **función, que está formada por dos conjuntos y una regla de correspondencia,** con la misma regla de correspondencia que muchas veces se representa por una ecuación.

Definición:

> 1. Una **función** es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, que asocia a cada elemento del primer conjunto (x) con un elemento **único** del segundo conjunto (y ó $f(x)$)

Dominio y contradominio

Al primer conjunto se le llama **Dominio de la función** y al segundo **Recorrido o Contradominio de la función.**



> **2. Una función es un conjunto de pares ordenados en el que dos pares distintos no coinciden en el primer elemento. Al conjunto formado con los primeros elementos se le llama el Dominio y al que forman los segundos elementos el Recorrido o Contradominio.**

En la segunda definición hablamos de **pares ordenados distintos** y nunca antes los habíamos comparado, por lo que definiremos la **igualdad de pares ordenados como sigue:**

Dos pares ordenados $(x, y)\,(z, w)$ son iguales si y sólo si $x = z$ y $y = w$.

$(x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z$ y $y = w$

Ejemplos:

$(2, 3) = (2, 3)$ $(4, 2) \neq (2, 4)$ $(a, b) = (2, 5) \Leftrightarrow a = 2$ y $b = 5$.

La regla de correspondencia no define una función

De los ejemplos anteriores vemos que no basta que los pares tengan los mismos números, además **es necesario que tengan el mismo orden.**

De acuerdo con las definiciones dadas para el concepto de función comprenderemos **que la regla de correspondencia por sí sola no define a una función y que es importante conocer los conjuntos Dominio y**

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Recorrido y comprobar que con la regla dada a un elemento del dominio le corresponde un único elemento del recorrido.

Ejemplos:

a) Supongamos que X es el conjunto de habitantes de una ciudad y Y es el conjunto de números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y f una regla que dice, cada elemento de X lo asociamos con su edad en años cumplidos, que será un elemento de Y. La **función** está definida puesto que tenemos dos conjuntos y la **regla de correspondencia** que asocia a cada elemento de X con un elemento **único** de Y, porque a cada persona le corresponde una edad y no más de una, ya que una persona no puede tener dos edades.

$X = \{$Juan Pérez, José Talavera, Javier García,...$\}$

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Como no sería práctico escribir todos los elementos de cada conjunto usamos la notación para construir conjuntos:

$\{(x, y) \mid$ cada persona (x) se asocia con su edad $(y)\}$

Que se lee: El conjunto de pares ordenados (x, y) tales que a cada persona se asocia con su edad (y).

b) Sean los conjuntos $X = \{10, 20, 30\}$ y $Y = \{15, 25, 35\}$ Y la regla de correspondencia h: $x < y$.

Escribimos un conjunto de pares ordenados (x, y) si $x \in X$, $y \in Y$ y deben cumplir con h.

$$H = \{(x, y) \mid x < y\} =$$
$$= \{(10, 15), (10, 25), (10, 35), (20, 25), (20, 35), (30, 35)\}$$

Diga si el conjunto H de pares ordenados representa o no una función.

La respuesta correcta se explica observando la correspondencia que se establece en seguida.

$X = \{10, 20, 30\}$ Dominio

$Y = \{15, 25, 35\}$ Recorrido

Al 10, elemento del dominio vemos que le corresponden 3 elementos (15, 25, 35) del recorrido por lo tanto, H **no** es una función.

Ya vimos como usando la notación de construir conjuntos podemos escribir una función, veamos ahora un ejemplo más frecuente en matemática.

c) Consideremos primero la proposición abierta, $2x + y = 3$, ya que convenimos no escribirlo, **recuerde que el conjunto de reemplazamiento son los números reales**, es decir que las variables x,y representan **números reales.** Si le asignamos a x el valor 1, para que la proposición sea verdadera y debe valer 1, es decir a $x = 1$, le corresponde $y = 1$, el par ordenado será: $(1, 1)$.

con dos variables

Ahora le asignamos a x el valor 3 y el valor de y debe ser:

$$2(3) + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2(3)$$
$$y = -3$$

el par ordenado será: $(3, -3)$

A los **pares ordenados** que así se obtienen les **llamamos soluciones de la ecuación.**

Diga si los siguientes pares **son** o **no** soluciones de la ecuación dada.

$$(2, -1) \quad (5, -7) \quad (-2, 7) \quad (7, -2)$$

Los tres primeros pares ordenados **son** solución de la ecuación porque la **satisfacen**, o **hacen verdadera** a la proposición abierta, en cambio el último, aunque tiene los mismos elementos del tercer par, **no los tiene en el mismo orden** y como el primer elemento es un valor de x y el segundo un valor de y, entonces, $x = 7$ y $y = -2$ y la proposición quedará:

$2(7) + (-2) = 3$ falsa

Conjunto de pares ordenados infinito

Todas las **soluciones** de la ecuación con dos variables forman un **conjunto infinito,** por lo que esta relación se escribe usando la notación para construir conjuntos, como el **conjunto de pares** que cumplen o satisfacen la ecuación, y podemos representarlo por una letra; $H = \{(x, y) \mid 2x + y = 3\}$. Se lee H es el conjunto de pares ordenados x, y que cumplen la regla h: $2x + y = 3$.

Si en la relación H encontramos que para cada valor de x sólo le corresponde un valor de y entonces decimos que H **es una función** y que la **ecuación es la regla de correspondencia.** Podemos observar que es más fácil determinar el valor de y correspondiente al valor de x que escogimos, si primero resolvemos la ecuación $(2x + y = 3)$ para y y escribimos

$y = 3 - 2x$, así para $x = -3$

$y = 3 - 2(-3) = 9$ $\quad (-3, 9)$

por lo anterior la función H se puede "definir" por la **regla de correspodencia** h, lo que simbolizamos $h(x) = 3 - 2x$

y así para $x = -3$ escribimos $\quad h(-3) = 3 - 2(-3)$

que se lee "h en -3 es igual a 9". $\quad h(-3) = 9$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

y los pares ordenados que vimos antes $(2, -1)$, $(5, -7)$, $(-2, 7)$ significan usando la notación para construir conjuntos que:

$h(2) = -1 \qquad h(5) = -7 \qquad h(-2) = 7$

Consideremos ahora la función $F = \{(2, 3)\ (3, 5)\ (4, 7)\}$
de acuerdo con la definición de **función** el
Dominio será $\{2, 3, 4\}$
el **Recorrido** será $\{3, 5, 7\}$
es decir $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ y $f(4) = 7$ en otras palabras al 2 le corresponde el 3, al 3 el 5 y al 4 el 7.

Si la función es un conjunto de pares ordenados infinito entonces la escribimos usando la notación antes dada, ejemplo:

$$g = \{(x, y) \mid y = 1 + x^2,\ x \in R\}$$

observe que ya nos dan los valores de x es decir, el dominio de la función que es R.

Para $x=0$, $y=1$ y como $x^2 \geq 0$ los valores de y siempre serán positivos y entonces el **Recorrido** serán los números reales positivos, $y \geq 1$.

$$\text{Dominio de } g = \{x \mid x \in R\}$$
$$\text{Recorrido de } g = \{y \mid y \geq 1\}$$

Variable independiente y variable dependiente

Los valores de x representan elementos del **dominio** y los de y elementos del **recorrido**. Otra forma de nombrarlos son: x **variable independiente**, y **variable dependiente** porque su valor depende del valor escogido para x

En álgebra es frecuente el uso de **valores literales** para las variables, por lo que es importante haber comprendido las **definiciones y notación de las funciones**, para no tener dificultades con este tipo de problemas.

Ejemplo:

d) Sea la regla de correspondencia r: $r(x) = x^2 + 2x$

$$\begin{aligned} r(2) &= 2^2 + 2(2) = 8 && (2, 8) \\ r(a) &= a^2 + 2a, && (a, a^2 + 2a) \\ r(a+1) &= (a+1)^2 + 2(a+1) \\ &= a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 \\ &= a^2 + 4a + 3, && (a+1,\ a^2 + 4a + 3) \end{aligned}$$

El **dominio**, el **recorrido** y la **regla de correspondencia definen una función**; antes dijimos la función definida por $2x+y=3$ ¿nos estamos contradiciendo? no es así realmente, lo que sucede, es que por razones prácticas **el dominio y el recorrido no se explican y sólo se da la regla de correspondencia**, considerando que de antemano se aclaró que trabajamos en el campo de los números reales, de manera que quien "lee" la

regla de correspondencia puede de ahí, **determinar el dominio y el recorrido**, aunque esto no siempre es fácil. En estos casos se dice que ambos, dominio y recorrido están implícitos en la regla de correspondencia

Ejemplo:

e) $2x + y = 3$ ó $y = 3 - 2x$

El valor de x debe ser un número real al cual le corresponderá otro número real. Si observamos la expresión del lado derecho de la igualdad observamos que la instrucción o proposición que representa nos dice que al número 3 se le reste el producto $2x$, como estas operaciones son binarias en R, siempre obtendremos otro elemento de R si x **R**, es decir $y \in R$, luego el **dominio** está formado por todo R y el **recorrido** también será R.

f) $y = x^2$

Cualquier número real para x nos da otro real para y, luego el dominio es R, pero como $x^2 \geq 0$, el recorrido serán números positivos o cero.

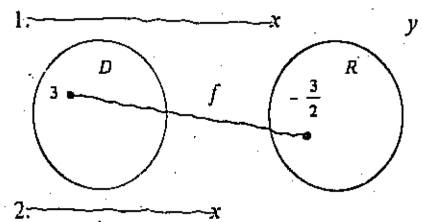
g) $y = \dfrac{3 - 2x}{(x-1)(x-2)}$

En el numerador o en el denominador cualquier número real para x nos da otro número real, pero como la división entre 0 no está definida los valores 1 y 2 para x, y en general los valores de x que hagan 0 a un **denominador** no encuentran número real que les corresponda y entonces no son elementos del dominio, ejemplos:

$$y = \frac{3 - 2(1)}{(1-1)(1-2)} = \frac{3-2}{0 \cdot (1-2)} = \frac{1}{0} = \text{indefinido}$$

$$y = \frac{3 - 2(2)}{(2-1)(2-2)} = \frac{3-4}{(2-1) \cdot 0} = \frac{-1}{0} = \text{indefinido}$$

por lo anterior, sabremos que en el dominio no encontraremos esos números; $x \neq 1$, $x \neq 2$



$y = f(3) = \dfrac{3 - 2(3)}{(3-1)(3-2)} = -\dfrac{3}{2}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

13.2 Relaciones

Relación y función no son conceptos equivalentes

Ya vimos que una **función es una relación de correspondencia** muy particular, pues exige que a un elemento del dominio le corresponda sólo un elemento del recorrido.

Cuando no se cumple esta exigencia, no tenemos función, y entonces es una relación cualquiera, como veremos en el ejemplo siguiente:

h) $h(x) = \sqrt{2 - x}$

Por lo visto en la Unidad VI, sabemos que algunos valores de x no pertenecerán al dominio, porque no encontrarán número real que les corresponda, ejemplos:

$$h(3) = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} \quad \text{no existe}$$
$$h(4) = \sqrt{2-4} = \sqrt{-2} \quad \text{no existe}$$

Entonces para que el radical represente a un número real debe ser mayor o igual que 0;

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \text{ y Dominio de } h = \{x \mid x \leq 2\}$$

el recorrido será R ya que se consideran todos los valores posibles y en ellos se toman tanto los positivos como los negativos, es decir, que para un valor de x en el dominio de la relación obtendremos dos valores para y.

$$h(1) = \sqrt{2-(1)} = \sqrt{1}$$
$$= \pm 1$$
$$h(1) = 1 \text{ ó } h(1) = -1$$

Definición:

1. Una relación es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que asocia a cada elemento del primer conjunto (x), con un elemento cualquiera del segundo conjunto (y)
2. Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados.

Compare las definiciones anteriores con las de función y verá que **cualquier función es una relación, pero no cualquier relación es función.** El conjunto H del ejemplo anterior es una relación.

Relación y función no son pues conceptos equivalentes.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los problemas del 1 al 12 diga cuáles conjuntos describen una función y cuáles una relación cualquiera. Explique.

1. $\{(1,2)\ (3,4)\ (2,3)\}$
2. $\{(1,3)\ (4,6)\ (7,9)\ (10,12)\}$
3. $\{(1,2)\ (2,4)\ (1,3)\}$
4. $\{(4,4)\ (3,4)\ (2,4)\ (1,4)\}$
5. $\{(1,4)\ (3,4)\ (4,1)\ (4,3)\}$
6. $\{(1,2)\ (1,3)\ (2,4)\}$
7. $\{(x,y) \mid y = 2x + 4\}$
8. $\{(x,y) \mid y = |x - 1|,\ x \in R\}$
9. $\{(x,y) \mid x + y^2 = 1\}$
10. $\{(x, f(x)) \mid f(x) = x^2,\ x \in R\}$
11. $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, = -1 \leq x \leq 1\}$
12. $\{(x, g(x)) \mid g(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0\}$

En los problemas del 13 al 20 indique el dominio y el recorrido de las funciones dadas usando la notación de conjuntos.

13. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
14. $f(x) = x$
15. $y = \dfrac{1}{x-2}$
16. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
17. $y = \sqrt{x^2 + 1}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$
19. $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 4}$
20. $y = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 6x - 7}$

En los problemas 21 y 22 además del dominio y el recorrido escriba la regla de correspondencia como una ecuación. Use la notación de funciones en la regla de correspondencia.

21. $H = \{(-4,2)\ (-2,4)\ (0,6)\ (2,8)\}$
22. $F = \{(-2,4)(-1,3)\ (0,2)\ (1,1)\ (2,0)\ (3,-1)\}$

23. Considerando el conjunto $G = \{(x, g(x)) \mid g(x) = 3x^2 - x + 1\}$ encuentre
    a) $g(-1)$
    b) $g(3)$
    c) $g(0)$
    d) $g(a),\ a \in R$
    e) $g(a+1),\ a \in R$
    f) $g(\frac{1}{2}) + g(1)$
    g) $g(a+1) - g(a),\ a \in R$
    h) $\dfrac{g(a+1) - g(a)}{(a+1) - (a)},\ a \in R$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

24. Considere las siguientes dos funciones "definidas" por las ecuaciones.

$$f(x) = x + 1 \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a) ¿Cuál es el dominio de f y cuál es el de g?
¿Podemos simplificar la fracción en g?
hágalo y conteste la siguiente pregunta:

b) ¿Cuál es la diferencia entre las funciones f y g?

Modulo 14

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará en qué consiste el sistema coordenado cartesiano.
2. Mencionará cuáles son los ejes del sistema coordenado cartesiano.
3. Mencionará la orientación positiva o negativa que tienen los ejes del sistema coordenado cartesiano.
4. De una lista de pares ordenados diagramará los puntos resultantes (proyección perpendicular en un sistema coordenado cartesiano.
5. De una gráfica con varios puntos en un sistema coordenado cartesiano escribirá los pares ordenados correspondientes a cada punto.

ESQUEMA RESUMEN

—Sistema coordenado lineal, medio para obtener un modelo geométrico

—Sistema coordenado en 2 dimensiones o

cartesiano —
- origen
- abscisa ⎤
- ordenada ⎦ proyección perpendicular

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

14.1 Sistema de coordenadas en dos dimensiones

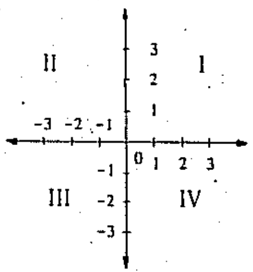
Sistema Coordenado Lineal

En la Unidad V introdujimos el **sistema coordenado lineal** que nos permitió obtener un **modelo geométrico** del conjunto de los números reales; definimos la gráfica de un número real como **un punto**, y la gráfica de un conjunto de números como **un intervalo**, de modo que la **solución de una ecuación o una inecuación** con una variable pudo graficarse como **un punto** o como **un intervalo**; sin embargo, aun cuando la utilidad de este sistema coordenado lineal es muy limitada, ya que lo usamos sólo cuando las expresiones tienen una sola variable, nos sirve como punto de partida para obtener **modelos** para los conceptos definidos en los temas anteriores como las **funciones** y las **relaciones en** general, modelos que nos proporcionan, quizá, la forma más clara, útil y práctica de ilustrar tales **relaciones**.

Una de las definiciones de función (y de relación en general), nos habla de un **conjunto de pares ordenados**, es decir, dos conjuntos de números y una relación de correspondencia o dependencia entre ellos; en consecuencia el concepto del sistema coordenado lineal se puede aplicar con cada conjunto y la asociación se logra formando lo que se llama un **sistema coordenado rectangular** o **sistema coordenado cartesiano** en honor del matemático francés que lo inventó, René Descartes (1637).

Sistema Coordenado Cartesiano

Este sistema se forma usando dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, a las que se denomina ejes coordenados y que se intersectan en sus orígenes, punto al que se llama simplemente el origen del sistema que generalmente se representa por la letra O.



Generalmente **uno** de los ejes se dibuja **horizontal** y en **él**, los **números positivos** quedan a la **derecha** y los **negativos** a la **izquierda del origen**, el otro **eje o recta numérica** queda entonces **vertical** y los **números positivos** están **hacia arriba** y los **negativos hacia abajo del origen.**

Las unidades de longitud usadas en las rectas numéricas que en adelante llamaremos **ejes coordenados**, por lo general son iguales en ambos ejes pero en algunos casos puede tomarse **una para el eje horizontal y otra diferente para el eje vertical.**

Cuadrantes

El plano en el que se dibujan los ejes coordenados queda dividido en cuatro partes que se denominan **cuadrantes**, y que se numeran como se muestra en la gráfica anterior empezando por el superior derecho en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Con este **sistema de coordenadas rectangulares** se puede establecer la correspondencia uno a uno o biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales (x, y).

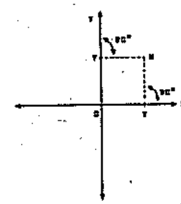
Eje de las x y eje de las y

Lo acostumbrado es **considerar el eje horizontal** como el **correspondiente al dominio**, por lo cual se le conoce como **eje de las** x, o también, **eje de las abscisas**, nombre que también se da a los elementos del dominio; al **eje vertical** en el cual se representan los elementos del recorrido le llamamos **eje de las y**, o también **eje de las ordenadas**, entonces, en un par ordenado, los elementos se llaman abscisa y ordenada respectivamente, y estos nombres son más usados que primero y segundo elemento.

Definición:

> Si el par ordenado (x, y) se asocia con un punto M podemos decir "M es la gráfica de (x, y)" o también "(x, y) son las coordenadas de M", lo que simbolizamos $M(x, y)$ que se lee M en x, y.

Considerando el punto M en un sistema de coordenadas rectangulares sus coordenadas se localizan trazando una recta perpendicular al eje horizontal para localizar la **abscisa** x, a este punto se le llama **proyección perpendicular** de M al eje x. Después encontramos la **proyección perpendicular** de M al eje de las y, con lo que localizamos la ordenada de M.

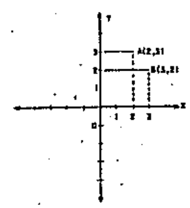


El punto en que se cortan las perpendiculares levantadas en las coordenadas es la gráfica del par ordenado.

Ejemplos:

a) $A(2, 3)$; A es la gráfica de $(2, 3)$
   $(2, 3)$ son las coordenadas de A,
   abscisa 2, en eje de las x.
   ordenada 3, en eje de las y

b) $B(3, 2)$

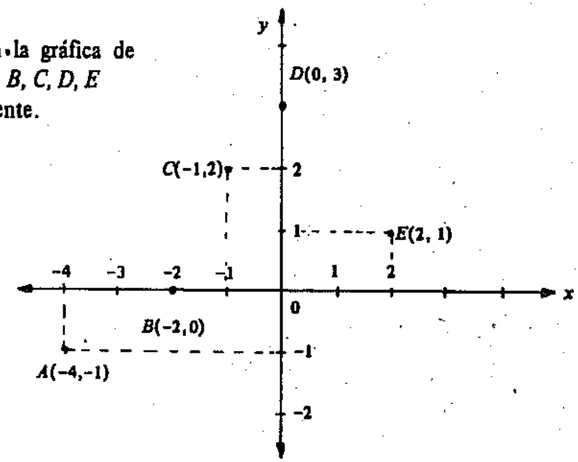


Observe que dos pares ordenados diferentes tienen como gráfica dos puntos diferentes, y si los pares ordenados son iguales la gráfica es un mismo punto.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

c) Grafique el conjunto siguiente:
$\{(-4,-1)\ (-2,0)\ (-1,2)\ (0,3)\ (2,1)\}$

Llamemos a la gráfica de cada par A, B, C, D, E respectivamente.



Una forma práctica de presentar los conjuntos de pares ordenados antes de graficarlos es lo que se llama una **tabla de pares ordenados** que puede ser horizontal o vertical, según convenga. El ejemplo que sigue nos da idea de esta forma.

Ejemplo: Graficar el conjunto de pares ordenados

$$\left\{\left(-2,5\right)\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{1}{2},1\right)\left(0,\frac{1}{2}\right)\left(1,0\right)\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)\right\}$$

Tabla de Pares Ordenados

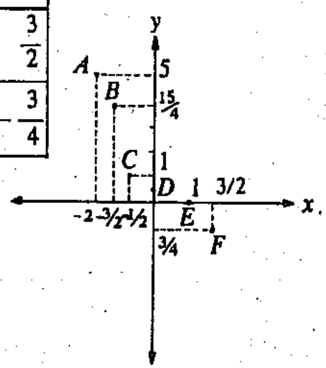
Vertical

	x	y
A	-2	5
B	$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$
C	$-\frac{1}{2}$	1
D	0	$\frac{1}{2}$
E	1	0
F	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$

Horizontal

	A	B	C	D	E	F
x	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$
y	5	$\frac{15}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$

Gráfica



REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Diagrame los puntos siguientes:
   a) abscisa 2, ordenadá -1
   b) abscisa $\frac{1}{4}$, ordenada $\frac{3}{2}$
   c) $(2,-2)$
   d) $(0,3)$
   e) $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$
   f) $(-3,0)$
   g) $(0,0)$
   h) $(-3,-5)$

2. ¿Cuál es la abscisa de los puntos situados en el eje de las y? ¿Cuál es la ordenada de los puntos en el eje de las x?

3. Indique el cuadrante en que se encuentra cada uno de los siguientes puntos. No es necesario diagramar.

   $P(-1,6)$ $\quad Q(4,-2)$ $\quad R(3,2)$ $\quad S(-3,-2)$

4. Graficar los siguientes conjuntos escribiendo la tabla de pares ordenados.

   a) $\left\{(-2,-1)\ (-1,0)\ (0,1)\ (1,2)\right\}$

   b) $\left\{(\frac{3}{2},2)\ (-1,-1)\ (1.5,3)\ (0,-\frac{2}{3})\right\}$

   c) $\left\{(-1.6,-1.5)\ (-0.8,-0.3)\ (-0.2,0)\ (0,0.5)\ (0.2,1.2)\right\}$

5. Escriba para cada inciso del problema 4 anterior la palabra **función** o la palabra **relación** según corresponda.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Módulo 15

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará en qué consiste la gráfica de una relación.
2. Dada una lista de relaciones, el alumno determinará los valores para el dominio y el contradominio.
3. Determinará de la gráfica obtenida si los puntos representan una función o sólo una relación.
4. Dada una ecuación elaborará una gráfica.
5. Dada una función la graficará y determinará la tendencia.

ESQUEMA RESUMEN

GRAFICA DE FUNCIONES Y RELACIONES

—Gráfica de la ecuación

I. muestra

Tendencia de una línea

15.1 Gráfica de funciones y relaciones

Modelo matemático y modelo geométrico

Hemos visto ya como los **modelos matemáticos** ayudan en la solucion de problemas reales de una manera práctica y económica, sin embargo, **el planteamiento simbólico** es algunas veces complicado y no se aprecian todos sus aspectos, es en estos casos en los que **un modelo geométrico o gráfica del problema,** o de la expresión matemática nos da una visión más amplia, de gran utilidad.

Como antes mencionamos, muchas de las actividades humanas o de los problemas que los humanos nos planteamos se describen como una **función** o como una **relación** en general; precisamente en el tema anterior veíamos cómo puede graficarse un conjunto de pares ordenados y de ahí la importancia del **sistema de coordenadas rectangulares,** ya que una relación es un conjunto de pares ordenados.

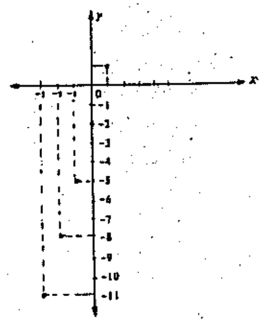
Gráfica de una relación

La gráfica de una relación es el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x,y) cumplen o satisfacen la regla de correspondencia, y así como se acostumbra definir una función o relación por la regla de correspondencia cuando ésta es una ecuación también se acostumbra decir la **gráfica de la ecuación.**

Ejemplos:

a) Graficar la siguiente función $\{(x, y) \mid 3x - y = 2, x, y \in E\}$

Vamos a determinar los elementos, o sea los pares ordenados que forman el conjunto, para lo cual necesitamos el dominio de la función y ya vimos la conveniencia de resolver la ecuación para y.



$y = 3x - 2$, el dominio dado es E, por lo que el número de pares ordenados es infinito de modo que escogeremos para graficar sólo una parte, digamos los enteros en el intervalo $-3 \leq x \leq 2$; puede graficar la parte que le interese por alguna razón en particular, en este caso vamos a buscar los elementos del recorrido entre los límites que hemos escogido; si $f(x) = 3x - 2$ podemos escribir la tabla cálculando $f(-3)$ $f(-2)$ etc.

$f(-3) = 3(-3) - 2 = -9 - 2 = -11;$
$f(-2) = 3(-2) - 2 = -6 - 2 = -8;$
$f(-1) = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5;$
$f(0) = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2;$
$f(1) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1;$

x	y
(−3,	−11)
(−2,	−8)
(−1,	−5)
(0,	−2)
(1,	1)
2	4

$\{...(-3,-11)(-2,-8)(-1,-5)(0,-2)(1,1)...\}$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Como se mencionó, los pares ordenados se encuentran escogiendo arbitrariamente elementos del dominio, que sustituidos en la regla de correspondencia, nos dan los elementos del recorrido.

b) Graficar $\{(x, y) \mid x - y = 2,\ x, y \in R,\ -1 \leq x \leq 3\}$

En este caso procedemos como en el ejemplo anterior, $y = x - 2$,

dominio $= \{x \in R \ -1 \leq x \leq 3\}$ $\qquad f(-1) = -1 -2 = -3$

recorrido $= \{y \in R \mid -3 \leq y \leq 1\}$ $\qquad f(3) = 3 - 3 = 1$

El dominio está limitado entre -1 y 3, pero como se trata de elementos de R esto constituye lo que definimos como un intervalo cerrado, de cualquier modo, sabemos que en ese intervalo existen un número infinito de valores para X y habrá un número infinito de pares ordenados. Escogeremos sólo algunos valores enteros por ser fáciles de calcular; ejemplo:

$$-1, 0, 1, 2, 3$$

$f(-1) = -3;$

$f(0) = 0 - 2 = -2;$

$f(1) = 1 - 2 = -1;$

$f(2) = 2 - 2 = 0;$

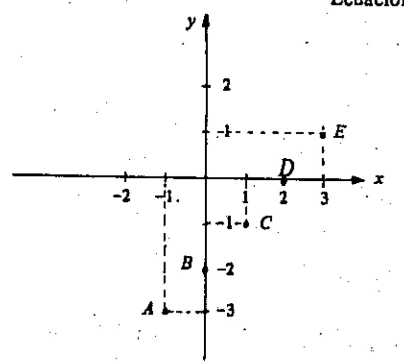
$f(3) = 1;$

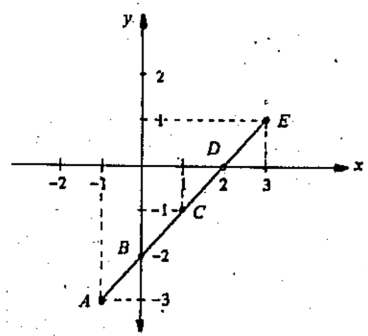
	A	B	C	D	E
x	−1	0	1	2	3
y	−3	−2	−1	0	1

Muestra de pares

Como en el ejemplo anterior ahora también consideramos sólo unos cuantos valores de X una especie de **muestra,** y la experiencia en el trazado de gráficas nos dirá cuántas "muestras" son suficientes y cuáles son las más fáciles para calcular el valor que les corresponda, pues por la propiedad de densidad entre dos cualesquiera siempre habrá un número infinito, por lo que siendo imposible graficar todos de una manera exacta, sólo graficaremos los del muestreo como se muestra en la primera figura, y después se aproximan los puntos intermedios uniendo los que se graficaron, como se muestra en la segunda figura.

Ecuación: $x - y = 2$





c) Grafique la relación siguiente:
$\{(x, y) \mid y^2 = x\}$

Al despejar y tendremos $y = \sqrt{x}$

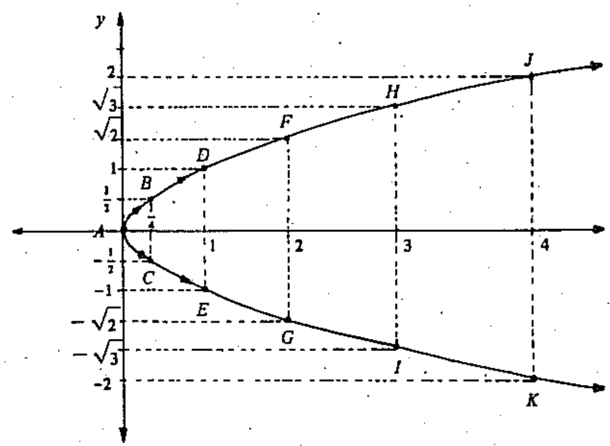
Dominio $= \{x \mid x \geq 0\}$

Recorrido $= \{y \mid y \in R\}$

Este es un problema semejante al ejemplo anterior, pues el conjunto de reemplazamiento (que no se menciona, tal como convenimos), es el de los números reales, de manera que procederemos igual que en el anterior con un muestreo, uniendo después los puntos con una línea.

Después con la regla de correspondencia buscamos los elementos del recorrido que correspondan, sólo que en este ejemplo en que se trata de una relación, a cada valor del dominio le corresponden 2 del recorrido (excepto en $x = 0$) y tendremos 11 puntos.

x	y	
0	0	A
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	B
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	C
1	1	D
1	−1	E
2	1.41...	F
2	−1.41	G
3	1.73...	H
3	−1.73...	I
4	2	J
4	−2	K



La gráfica muestra si se trata de una función o de una relación

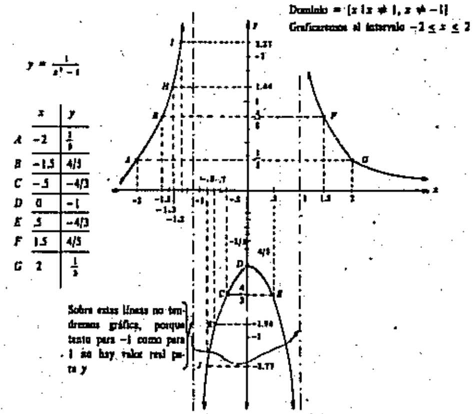
Observando una gráfica podemos darnos cuenta si corresponde a una **función** o a una **relación;** cuando se trata del primer caso unas líneas verticales imaginarias sólo cortan la gráfica en un punto, indicándonos que para un valor de x sólo le corresponde uno de y, como en el ejemplo b), en cambio en el ejemplo c), podemos darnos cuenta que cualquier vertical en un valor x del dominio, corta **dos** veces la gráfica indicando que al valor del dominio le corresponden dos del recorrido.

Además de lo anterior, una gráfica nos proporciona mucha información acerca de la **función** o **relación** de que se trata, como en el ejemplo anterior c), en que vemos que nunca hay valores negativos de x y el valor mínimo es el 0.

d) Grafiquemos el conjunto cuya regla de correspondencia es

$$x^2 y - y = 1$$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com



Al unir los puntos para aproximar el resto de los pares ordenados vemos que la línea no puede cruzar las verticales en 1 y -1. ¿Entonces cómo unir B con C ó E con F?

En los casos en que el dominio de una función o una relación tiene **vacíos**, sean **sólo puntos** como en este ejemplo, o **intervalos mayores,** no podemos unir los puntos que estén en lados contrarios y nos damos cuenta que nuestro **muestreo** fue insuficiente, debemos considerar más valores de x en las proximidades de esos **vacíos** del dominio para analizar la **tendencia** que seguirán los otros puntos. Consideraremos otros dos puntos antes y otros dos después.

Podemos ahora unir con una línea suave, es decir, sin quiebres, los puntos A, B, H, I de un lado y los J, K, C, D, E por el otro lado.

	x	y
H	−1.3	1.44
I	−1.2	2.27
J	−.8	−2.77
K	−.7	−1.96

Con lo graficado podemos aproximar el resto de los valores de acuerdo a las **tendencias** a cada lado de las líneas, líneas que no pertenecen al dominio, y hacer lo mismo para las gráficas a los lados de la línea en $x=1$. De la regla de correspondencia notamos que ningún valor real de x puede hacer que **la función o variable dependiente** y, valga 0. Recuerde el teorema que dice que $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x, y \in R$

¿Qué información acerca de la función y puede obtenerse de la gráfica?

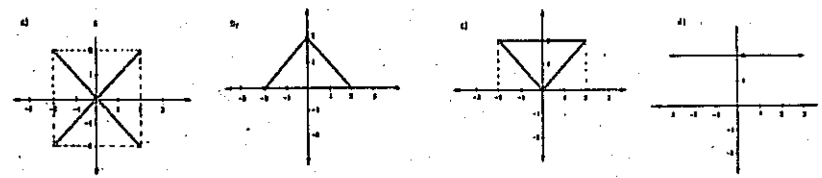
REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Trazar la gráfica de cada una de las relaciones cuya regla de correspondencia se da. Escoja el intervalo adecuado para graficar, cuando no se mencione alguno. Recuerde que si el dominio es un conjunto infinito en el intervalo escogido, se unen los puntos escogidos como **muestreo.**

1. $y = 2x - 1$
2. $y = 6 - 3x$
3. $y = \frac{x^2}{16}$
4. $\{(x, y) \mid y = 6,\ x \in R\}$
5. $\{(x, y) \mid x = -2,\ y \in R\}$
6. $\{(x, y) \mid y = |x - 1|\}$
7. $y = -x^2 + 2$
8. $y = -\sqrt{4 - x^2},\quad |x| \leq 2$
9. $f(x) = 3 - 2x - x^2$
10. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

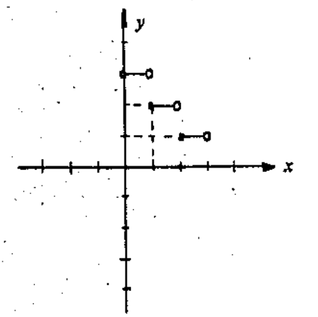
En los problemas 11 al 14 establezca la correspondencia entre cada relación y la gráfica correcta.

11. $\{(x, y) \mid y = |x|,\ -2 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) \mid y = 2,\ -2 < x < 2\}$
12. $\{(x, y) \mid y = x,\ -2 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) \mid y = -x,\ -2 \leq x \leq 2\}$
13. $\{(x, y) \mid y = 2,\ x \in R\}$
14. $\{(x, y) \mid y = 2 - |x|,\ -2 \leq x \leq 2\}$

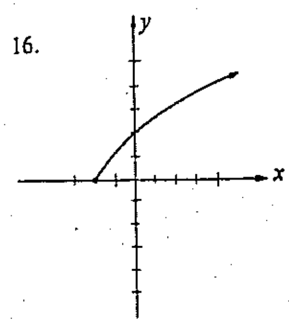


En los problemas del 15 al 20 diga cuál gráfica representa una función y cuál una relación. Recuerde las gráfica de los intervalos para una interpretación correcta (V-4).

15.

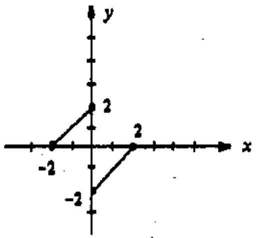


16.

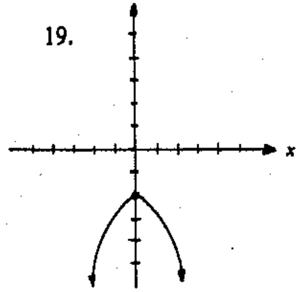


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

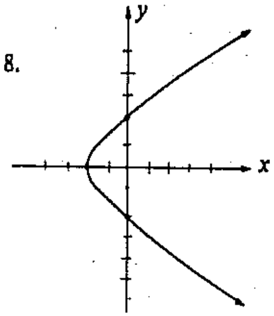
17.



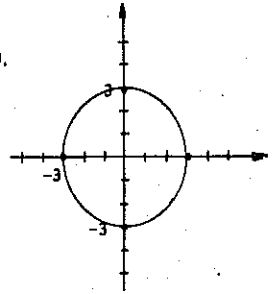
19.



18.



20.



21. Graficar las siguientes relaciones en los intervalos que se indican, señalando según sea el dominio si la gráfica continúa o no con puntas de flecha.

a) $y = x^2 - 2x - 8;\ -5 \leq x \leq 6$

b) $y = 3 - 2x - x^2;\ -5 \leq x \leq 4$

c) $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 3;\ -4 \leq x \leq 3$

d) $x^2 + y^2 = 16;\ -5 \leq x \leq 5$

Módulo 16

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará en qué consiste una carta de flujo.
2. Explicará qué entiende por algoritmo.
3. Dada una lista de instrucciones dibujará una carta de flujo.
4. Dada una regla de correspondencia para una relación la traducirá en una carta de flujo.
5. Dada una carta de flujo para una relación, escribirá una ecuación o regla de correspondencia equivalente.

ESQUEMA RESUMEN

Carta de flujo o diagrama de flujo:
algoritmo

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

16.1 Cartas de flujo

A través de las diferentes épocas de la historia de la humanidad el hombre siempre ha intentado simplificar los trabajos tanto físicos como mentales; un producto de estos esfuerzos es la computadora electrónica y todo el equipo periférico para utilizarla eficientemente.

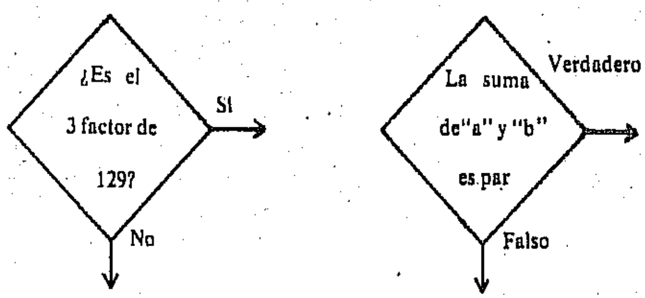
Son necesarias varias operaciones en un orden o secuencia establecido para comunicarnos con la computadora y, de la necesidad de asegurarnos de seguir el procedimiento correcto para darle instrucciones a la máquina se creó un método simbólico llamado **cartas o diagramas de flujo.**

Los diagramas de flujo establecen la secuencia a seguir en un trabajo

Las cartas de flujo proporcionan un medio para simplificar y organizar diversas operaciones o cálculos que requieren una secuencia definida, no sólo para dar instrucciones a una computadora, también se ha extendido su uso para programar el trabajo que va a desempeñar un individuo o un equipo, actualmente se considera a las **cartas de flujo** o **diagramas de flujo** como la forma más conveniente de escribir un algoritmo* para efectuar alguna tarea útil o algún cálculo.

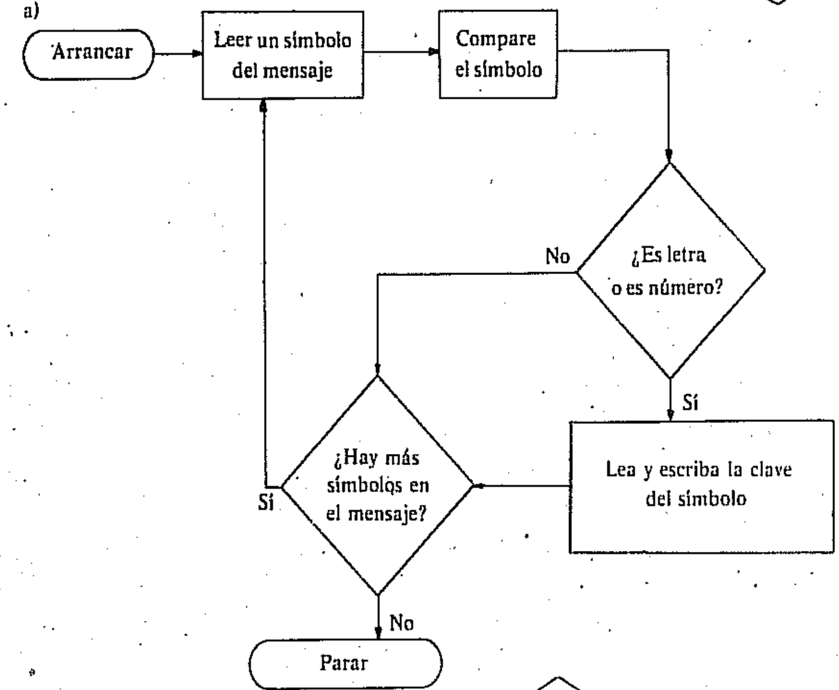
simbología de los diagramas de flujo

En seguida presentamos las cartas de flujo como un método de escribir instrucciones, para lo cual usaremos formas geométricas diferentes para diferentes tipos de instrucción, la forma oval se usa para dar órdenes como (arrancar) y (parar), la forma rectangular para instrucciones como [suma], [eleva al cubo], [escribe]; la forma de rombo o diamante cuando se debe tomar una decisión entre sí y no, o entre falso y verdadero con respecto a la proposición encerrada por la figura.

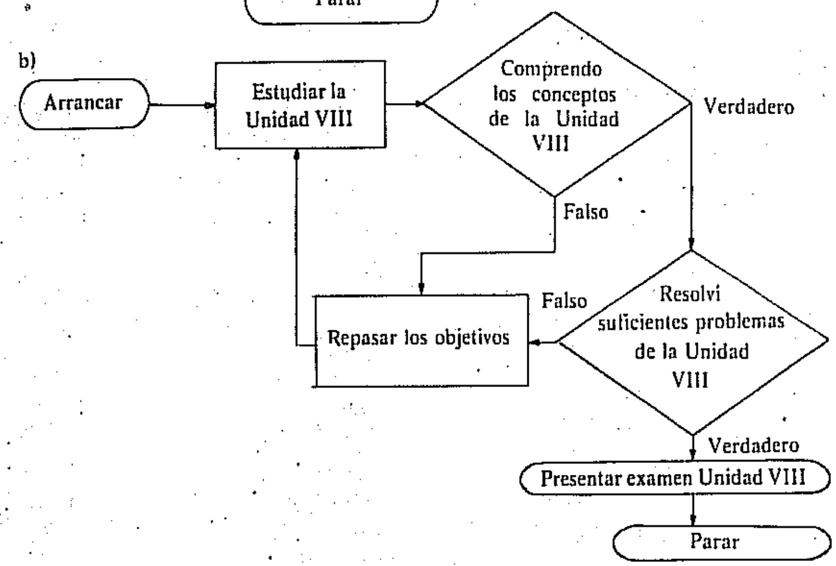


En el módulo 14 Unidad IV se presenta el algoritmo* de la división de expresiones polinomiales, después de estudiar los siguientes ejemplos de cartas de flujo dibuje una carta de flujo que contenga el algoritmo de la división.

a)



b)



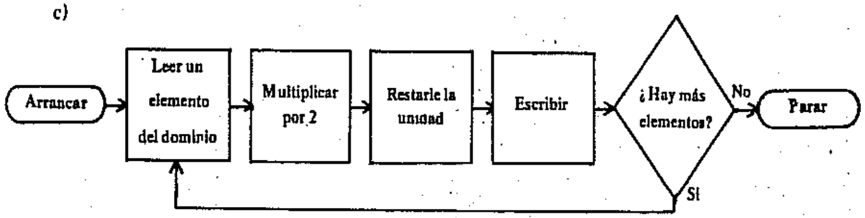
* **Algoritmo** es una lista de instrucciones o secuencia de operaciones que deben seguirse para resolver un problema, efectuar un cálculo o un trabajo cualquiera.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Las proposiciones algebraicas que utilizamos en los primeros problemas del módulo anterior son las reglas de correspondencia de relaciones, es decir, son las instrucciones para que usando un valor de "x" se encuentre el valor de "y" correspondiente. En los ejemplos c) y d) siguientes damos las instrucciones de los reactivos de autoevaluación del módulo 15 en forma de carta de flujo, la información de entrada en el inciso c) serán los elementos del dominio de la función dada por: $y = 2x - 1$, así para cada valor de éstos y siguiendo las instrucciones en la carta de flujo obtendremos el elemento del recorrido que corresponda.

$$y = 2x - 1$$

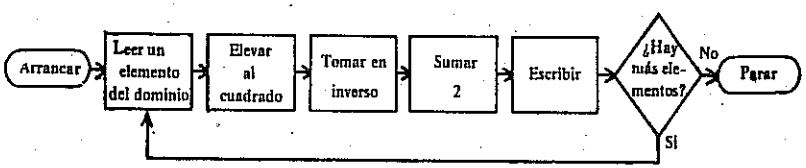
c)



Si escogemos los enteros en el intervalo cerrado $[-2, 2]$ como se hizo en aquel problema encontraremos la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{rcl} X & = & \{-2, -1, \ 0, \ 1, \ 2\} \\ & & \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \\ Y & = & \{-5, -3, -1, \ 1, \ 3\} \end{array}$$

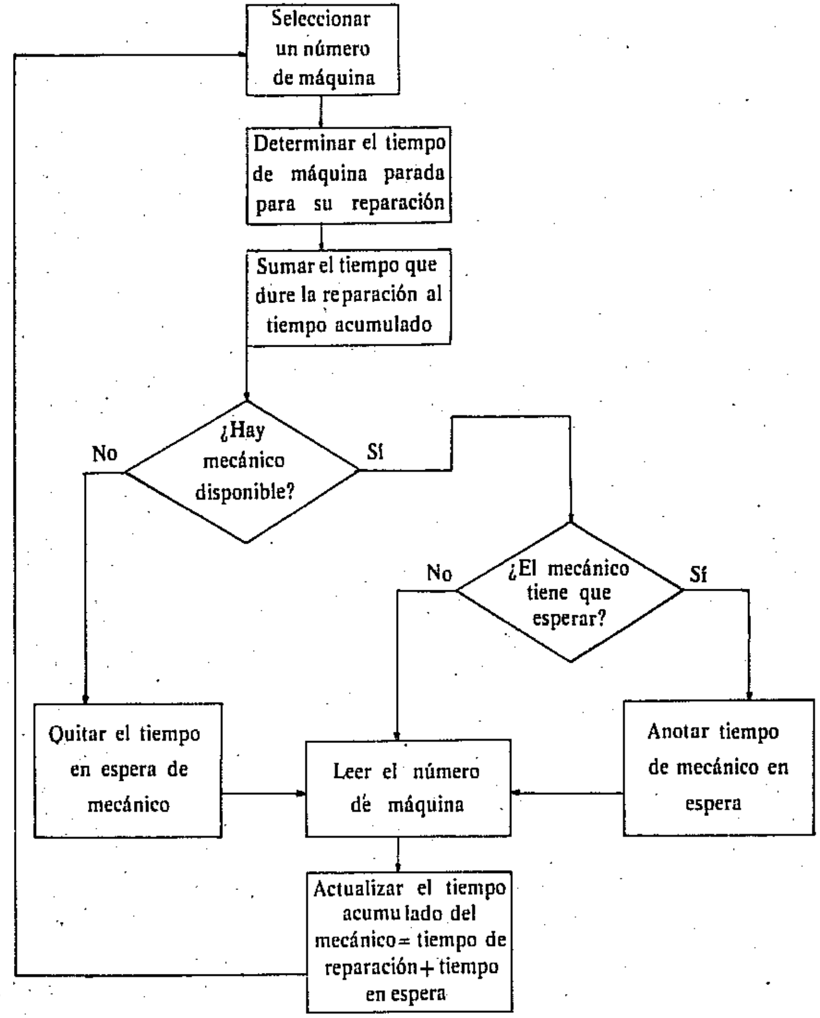
d)



¿Qué función se está calculando? Escriba la regla de correspondencia.

Tomar un valor de x, elevarlo al cuadrado, x^2 tomar su inverso, $-x^2$ y sumarle 2; ¡claro!, se trata de la regla de correspondencia dada en el problema 7 $\quad y = -x^2 + 2$

Las cartas de flujo tienen gran aplicación en la ingeniería industrial para la **simulación de modelos** como la simulación de separaciones en una línea de producción que se muestra en seguida.



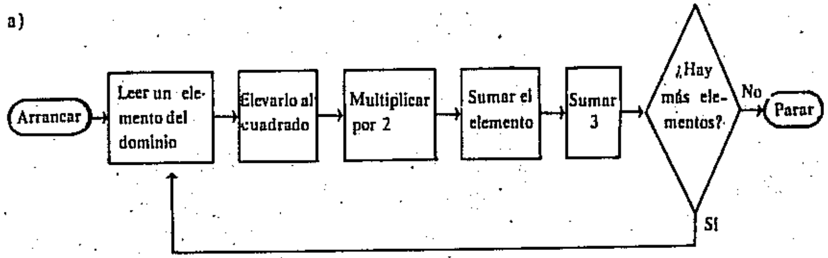
Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

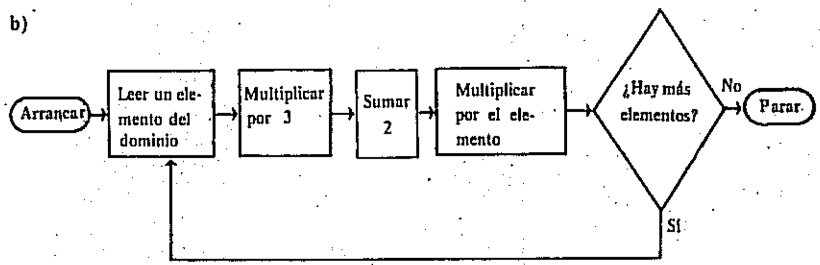
1. Escriba una carta de flujo para encontrar los elementos de un conjunto intersección de otros dos A y B cuyos elementos se dan.
2. Escriba una carta de flujo describiendo las operaciones para determinar valores de una función cuya ecuación o regla de correspondencia se da en seguida.

   a) $y = 2x - 5$ b) $y = x^3 - x + 3$ c) $y = (2x^2 + 3)x$
3. Con las siguientes cartas de flujo escriba las ecuaciones que definen a la función.

a)



b)



Paneles de verificación

MODULO 13 — VALIDACION

1. Función. Es un conjunto de pares ordenados donde en dos pares diferentes NO se repite el primer elemento.
2. Función. Igual que en problema anterior.
3. Relación. $(1, 2) \neq (1, 3)$ sin embargo, el primer elemento se repite, lo que indica que al 1 le corresponden dos elementos, el 2 y 3.
4. Función.
5. Relación. $(4, 1) \neq (4, 3)$
6. Relación. $(1, 2) \neq (1, 3)$
7. Función. A un valor de x sólo le corresponde uno de y.
8. Función. Misma razón que en problema anterior, sólo que en estos casos de valor absoluto luego hay dudas, porque a dos valores de x les corresponde el mismo valor de y; por ejemplo: $x = 3$, $y = 2$ y para $x = -1$, $y = 2$

   $y = |3 - 1| = |2| = 2$ y $|-1 - 1| = |-2| = 2$

   $(3, 2)$ $(-1, 2)$
9. Relación. Si resolvemos para y la regla de correspondencia, tendremos $y = \sqrt{1 - x}$ y con cada valor de x obtendremos 2 de y que satisfacen la condición.
10. Función.
11. Relación. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$
12. Relación.
13. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ Dominio: $4 - x^2 \geq 0$

    $x^2 \leq 4$ recuerde que

    $|x| \leq 2$ $\sqrt{x^2} = |x|$

    $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

    Recorrido: Resolvemos para x

    $$x = \sqrt{4 - [g(x)]^2}$$

    $\{y \mid -2 \leq g(x) \leq 2\}$
14. $f(x) = x$ Dominio: $x \in R$ Recorrido: $f(x) \in R$
15. $y = \frac{1}{x - 2}$ Dominio: $x - 2 = 0$ $\{x \mid x \neq 2\}$

    $x = 2$

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

Recorrido: $xy - 2y = 1$

$x = \frac{1+2y}{y}$ $\quad \{y \mid y \neq 0\}$

16. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ Dominio: $x^2 - 1 = 0$ $\quad \{x \mid x \neq -1, 1\}$

$x = \pm 1$

Recorrido: $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ $\quad \{y \mid y \neq 0\}$

17. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ Dominio: $x^2 + 1 \geq 0$

$x \in R$

Recorrido: $y \in R$

18. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ Dominio: $= \{x \mid x \neq 1, -2\}$

Recorrido: $= \{y \mid y \neq 0\}$

19. $h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 4}$

$h(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2}$ Dominio: $= \{x \mid x \neq 2\}$

Recorrido: $= y \in R$

20. $y = \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 6x - 7}$ Dominio: $= \{x \mid x \neq -7, 1\}$

$y = \frac{(x-7)(x+1)}{(x+7)(x-1)}$ Recorrido: $= y \in R$

21. $h(x) = x + 6; \quad x = 2k, \quad k \in E, \quad -3 < k < 2$

22. $f(x) = 2 - x, \quad x \in E, \ -3 < x < 4$

23. a) $g(-1) = 3(-1)^2 - (-1) + 1$

$= 3 + 1 + 1$

$g(-1) = 5$

b) $g(3) = 3(3)^2 - (3) + 1$

$= 27 - 3 + 1$

$g(3) = 25$

c) $g(0) = 3(0)^2 - (0) + 1$

$= 0 - 0 + 1$

$g(0) = 1$

d) $g(a) = 3(a)^2 - (a) + 1$

$g(a) = 3a^2 - a + 1$

e) $g(a+1) = 3(a+1)^2 - (a+1) + 1$

$= 3(a^2 + 2a + 1) - a - 1 + 1$

$g(a+1) = 3a^2 + 5a + 1$

f) $g(\frac{1}{2}) + g(1) = [3(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2}) + 1] + [3(1)^2 - \quad + 1]$

$= (\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1) + (3 - 1 + 1)$

$g(\frac{1}{2}) + g(1) = \frac{17}{4}$

g) $g(a+1) - g(a) = [3(a+1)^2 - (a+1) + 1] - [3(a)^2 - a + 1]$

$= (3a^2 + 5a + 1) - (3a^2 - a + 1)$

$g(a+1) - g(a) = 6a + 2$

h) $\frac{g(a+1) - g(a)}{(a+1) - (a)} = \frac{6a}{1} = 6a$

24. a) Dominio de $f = \ x \in R$ $\quad$ Dominio de $g = \{x \mid x \neq 1\}$

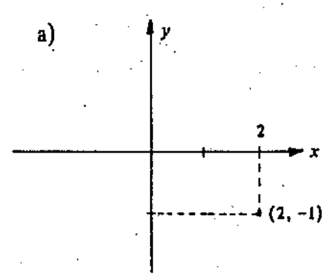
$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$

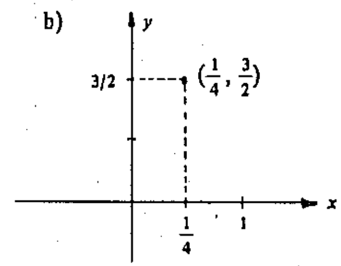
b) La diferencia entre f y g es únicamente la diferencia en sus dominios es decir $f(x) = [g(x)$ y $x \neq 1]$.
Recuerde que la conjunción es verdadera sólo si se cumplen ambas proposiciones.

MODULO 14 — VALIDACION

1. a)

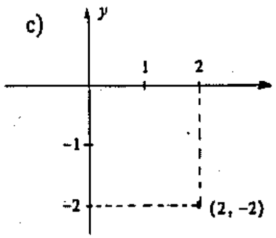


b)

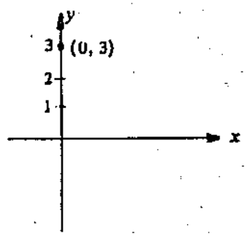


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

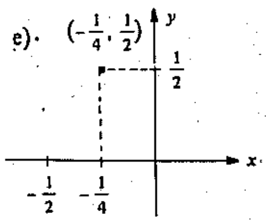
c)



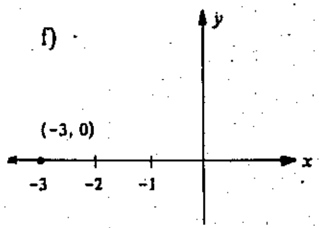
d)



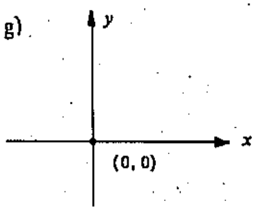
e)



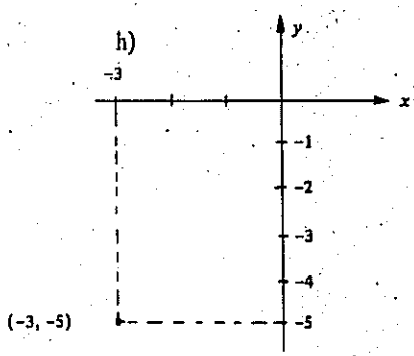
f)



g)



h)



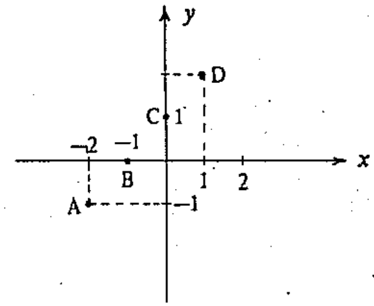
2. La abscisa de los puntos sobre el eje de las y es 0.
La ordenada de los puntos sobre el eje de las x es 0.

3. P es un punto de segundo cuadrante
Q es un punto de cuarto cuadrante
R es un punto de primer cuadrante
S es un punto de tercer cuadrante

4.

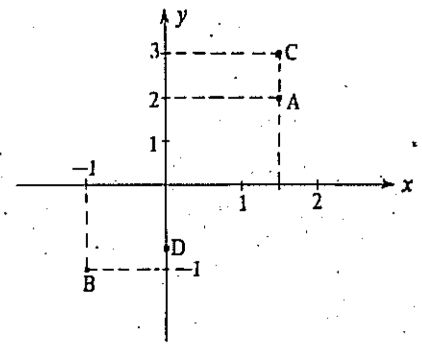
a)

	x	y
A	-2	-1
B	-1	0
C	0	1
D	1	2



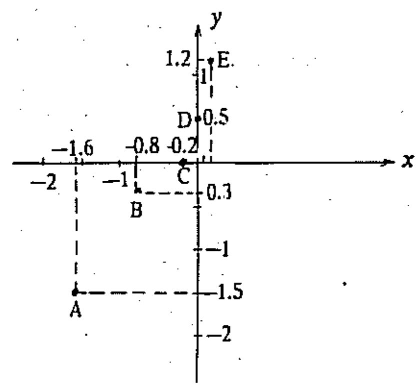
b)

	x	y
A	$\frac{3}{2}$	2
B	-1	-1
C	1.5	3
D	0	$\frac{2}{3}$



c)

	A	B	C	D	E
x	-1.6	-0.8	-0.2	0	0.2
y	-1.5	-0.3	0	0.5	1.2



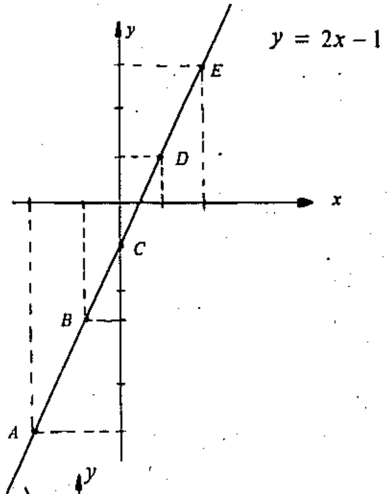
5. a) Función. No se repite el primer elemento en ningún par ordenado.
b) Relación. Los puntos A y C corresponden a dos pares ordenados diferentes pero con el mismo primer elemento.
c) Función. Lo mismo que en inciso a).

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

1. Dominio $= x \in R$

$-2 \leq x \leq 2$

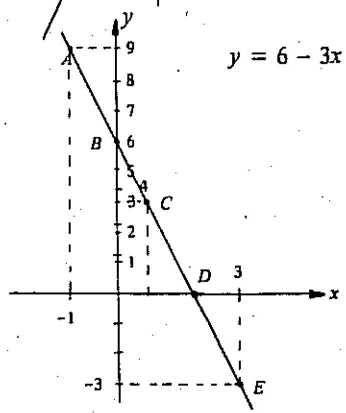
	x	y
A	−2	−5
B	−1	−3
C	0	−1
D	1	1
E	2	3



2. Dominio $= x \in R$

$-1 \leq x \leq 3$

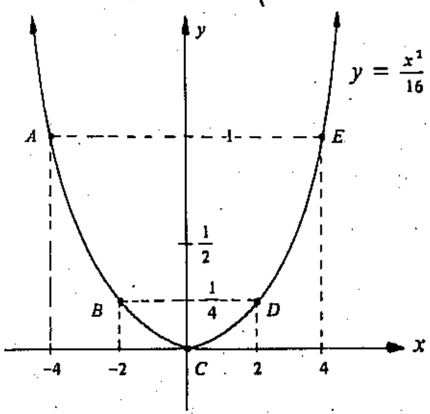
	x	y
A	−1	9
B	0	6
C	1	3
D	2	0
E	3	−3



3. Dominio $= x \in R$

$-4 \leq x \leq 4$

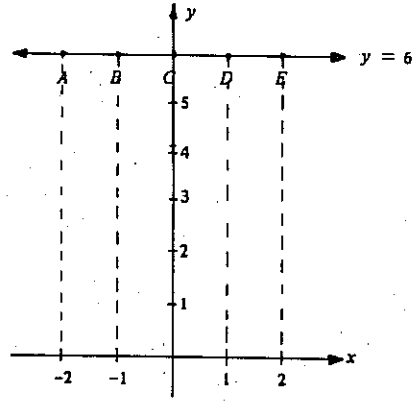
	x	y
A	−4	1
B	−2	1/4
C	0	0
D	2	1/4
E	4	1



4. Dominio $= x \in R$

$-2 \leq x \leq 2$

	x	y
A	−2	6
B	−1	6
C	0	6
D	1	6
E	2	6

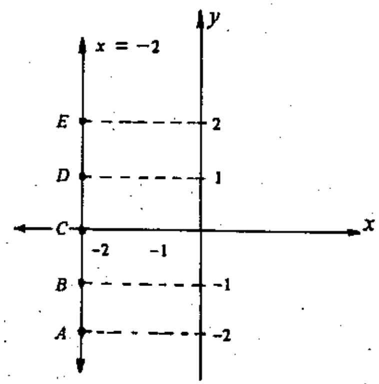


5. Dominio $= x = -2$

Recorrido $= y \in R$

$-2 \leq y \leq 2$

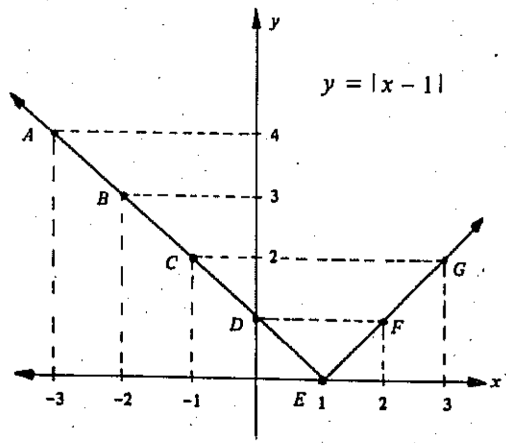
	x	y
A	−2	−2
B	−2	−1
C	−2	0
D	−2	1
E	−2	2



6. Dominio $= x \in R$

$-3 \leq x \leq 3$

	x	y
A	−3	4
B	−2	3
C	−1	2
D	0	1
E	1	0
F	2	1
G	3	2

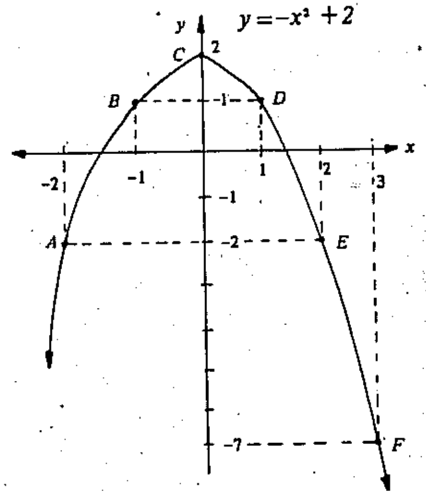


Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

7. Dominio $= x \in R$

$-2 \leq x \leq 3$

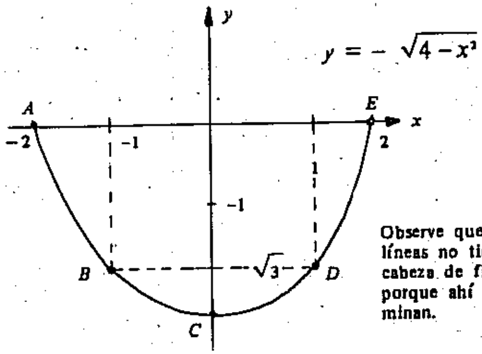
	x	y
A	-2	-2
B	-1	1
C	0	2
D	1	1
E	2	-2
F	3	-7



8. Dominio $= |x| \leq 2$

$-2 \leq x \leq 2$

	x	y
A	-2	0
B	-1	$-\sqrt{3}$
C	0	-2
D	1	$-\sqrt{3}$
E	2	0



Observe que las líneas no tienen cabeza de flecha porque ahí terminan.

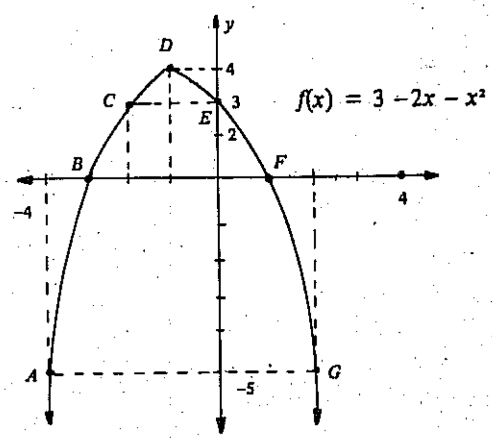
9. Dominio $= x \in R$

	x	y
A	-4	-5
B	-3	0
C	-2	3
D	-1	4
E	0	3
F	1	0
G	2	-5

La factorización de la función ayuda algunas veces a encontrar más fácilmente sus valores

$-4 \leq x \leq 2$

Ejemplo: $-(-4+3)(-4-1)$
$-(-1)(-5)$

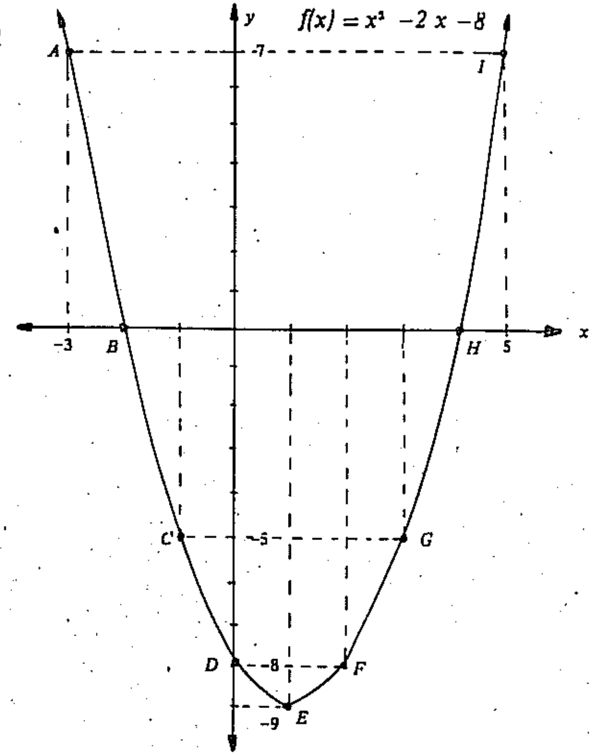


10. Dominio $= x \in R$

$f(x) = (x-4)(x+2)$

$-3 \leq x \leq 5$

	x	y
A	-3	7
B	-2	0
C	-1	-5
D	0	-8
E	1	-9
F	2	-8
G	3	-5
H	4	0
I	5	7



11. La gráfica "c"

12. La gráfica "a"

13. La gráfica "d"

14. La gráfica "b"

15. Función. Porque líneas imaginarias verticales tocan la gráfica en un sólo punto.

16. Función.

17. Relación. En $x = 0$ una vertical tocaría la gráfica en dos puntos.

18. Relación.

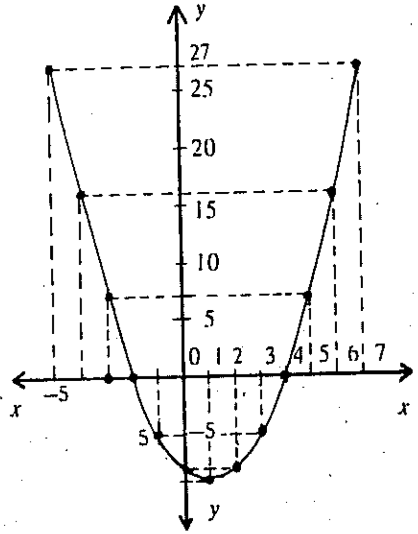
19. Función.

20. Relación.

Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com

21. a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

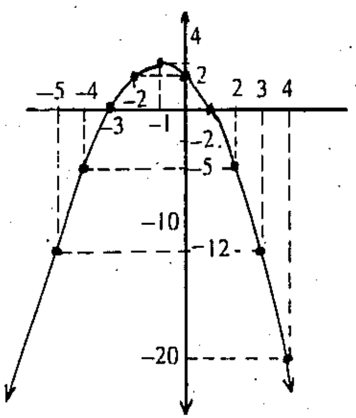
Dominio $= R$, por lo tanto uniremos los puntos del "muestreo".



x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	27	16	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7	16	27

b) $f(x) = 3 - 2x - x^2$; Dominio $= R$

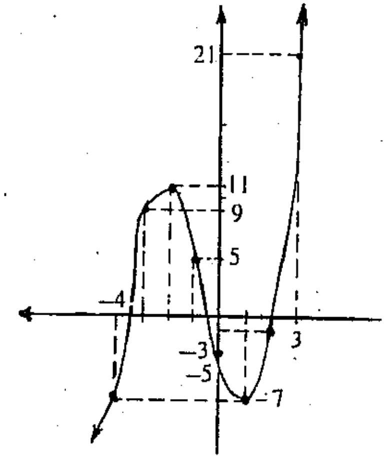
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–5	0	3	4	3	0	–5	–12	–21



c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 3$;

Dominio $= R$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–7	9	11	5	–3	–7	–1	21



d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

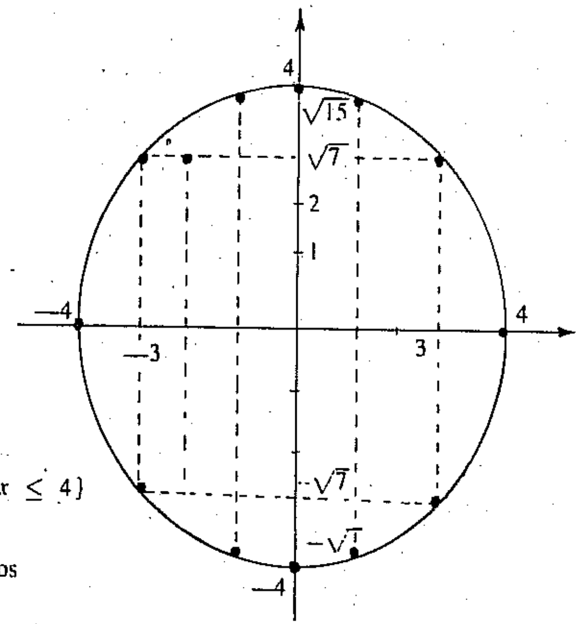
x	–4	–3	–1	0	1	3	4
y	0	$\pm\sqrt{7}$	$\pm\sqrt{15}$	± 4	$\pm\sqrt{15}$	$\pm\sqrt{7}$	0

$$16 - x^2 \geq 0$$
$$16 \geq x^2$$
$$x^2 \leq 16$$
$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{16}$$
$$x \leq 4$$

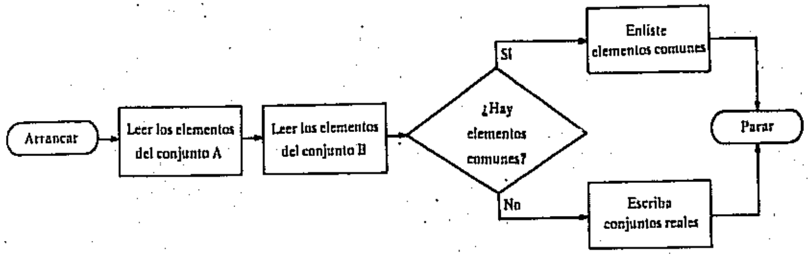
$$f(-4) = \sqrt{16} - (-4)^2$$
$$= \sqrt{16} - 16 = 0$$
$$f(-3) = \sqrt{16} - (-3)^2$$
$$= \sqrt{16} - 9 = \sqrt{7}$$

Dominio $= \{ X \in R \quad -4 \leq x \leq 4 \}$

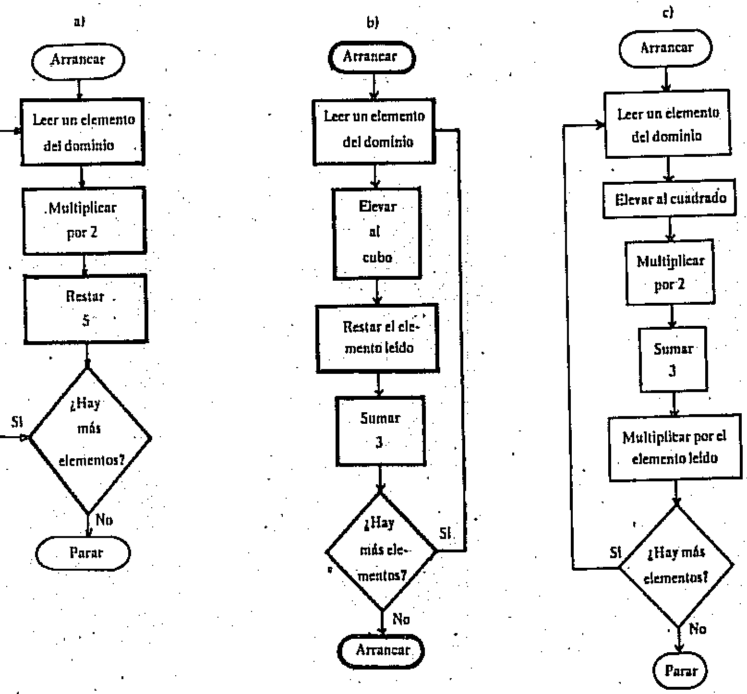
La Tabla no debe incluir números fuera del Dominio



Preparatoria abiertaOnline | Disponible en Preparatoria Abierta Online www.prepa-abierta.com



2.



3. a) $y = 2x^2 + x + 3$ b) $y = (3x + 2)x$

Matematicas II, Libro
se terminó de imprimir y encuadernar en el mes de Marzo de 2009 en Grupo Gráfico Editorial, S.A. de C.V., Calle B No. 8, Parque Industrial Puebla 2000; C.P. 72220, Puebla, Puebla.

Se tiraron 10,000 ejemplares
Mas sobrantes para reposición