Matemáticas 3

Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal es una ecuación de primer grado con 2 incógnitas cuya forma general es:

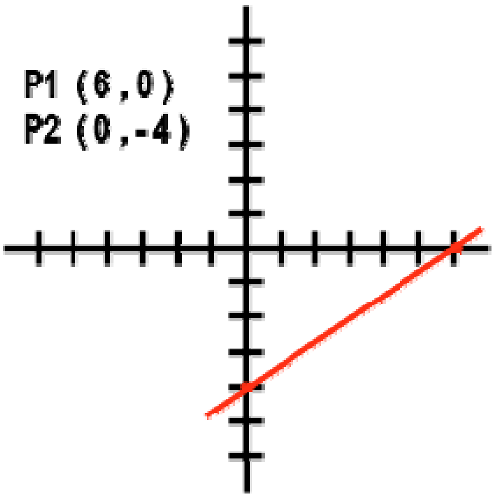
$$“aX + bY + c = 0”$$

“a, b, c” son constantes reales, “X, Y" son variables. Toda ecuación lineal graficada es una línea recta.

Grafica la expresión ***“2X – 3Y – 12 = 0”***

2X – 3Y -12=0
2X - 3(0) - 12=0
2X = 12
X = 12 / 2
X = 6

2(0) – 3Y -12 = 0
-3Y = 12
Y = 12 / -3
Y = -4



Función Lineal

La función lineal esta definida por la ecuación:

$$f(x) = mX + b$$

Donde:
f(x) =Y
m= pendiente de la recta
b= ordenada al origen (intersección en el eje “Y “)

Además “m, b" son constantes reales

Ejemplo:

Indica el valor de la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es: ***-7X - Y + 21 = 0***

-7X -Y + 21 = 0
-Y = 7X – 21
Y = 7X – 21 / -1
Y = -7X + 21

m = -7
b = 21

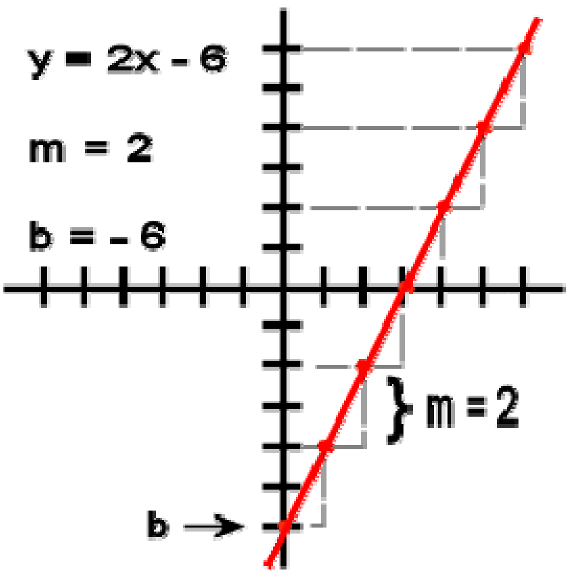
indica el valor de la pendiente y la ordenada al origen de la ecuación :
4x – ½ y + 2/5 = 0

- ½ Y = -4X - 2/5
Y = (-4X -2/5) / - ½
Y = 8X + 4/5

m = 8
b = 4/5

Pendiente

La pendiente (m) indica cuantas unidades cambia la ordenada cuando “X” aumenta una unidad.



Para encontrar la pendiente de una recta que pasa por 2 puntos se utiliza la ecuación

m = Y2 – Y1 / X2 – X1

Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

P1 (1 , - 4)
P2 (5 , 4)

$$m = 4 - (-4) / 5 - 1$$
$$m = 4 + 4 / 5 - 1$$
$$m = 8/4$$
$$m = 2$$

<u>Sistemas de ecuaciones lineales</u>

Un sistema de ecuaciones lineales esta formado por 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas; los métodos de resolución son 2:

- **Método grafico**: se grafican las 2 ecuaciones en el mismo plano cartesiano; el punto de intersección de ambas líneas será el punto solución del sistema. Si las líneas fueran <u>coincidentes</u>, entonces el sistema tiene una infinidad de soluciones; si las líneas fueran <u>paralelas</u> entonces el sistema no tiene solución y se le llama sistema inconsistente.
- **Método algebraico**: existen 2 métodos el de *"suma o resta"* y el de *"sustitución"*

<u>Resolución del sistema de ecuaciones por el método de suma o resta</u>

$$X + Y - 2 = 0$$
$$\underline{X - Y - 4 = 0}$$

Eliminamos Y dado que tienen el mismo valor pero signo diferente y nos queda

$$2X - 6 = 0$$
$$2X = 6$$
$$X = 6/2$$
$$X = 3$$

Sustituimos "X" en cualquier ecuación

$$3 + Y - 2 = 0$$
$$Y = -3 + 2$$
$$Y = -1$$

$$(X, Y) = (3, -1)$$

Resuelve el siguiente sistema por el método de suma o resta

$$\begin{array}{r} 3X + 2Y - 6 = 0 \\ \underline{X - 2Y - 10 = 0} \\ 4X - 16 = 0 \end{array}$$

$$4X = 16$$
$$X = 16/4$$
$$X = 4$$

$$3(4) + 2Y - 6 = 0$$
$$12 + 2Y - 6 = 0$$
$$2Y = -12 + 6$$
$$2Y = -6$$
$$Y = -6/2$$
$$Y = -3$$

$$(X, Y) = (4, -3)$$

<u>Resolución del sistema de ecuaciones por el método de substitución</u>

$$3X + 2Y = 5 \quad \ldots.(1)$$
$$X + 3Y = 4 \quad \ldots.(2)$$

Despejamos "X" de la ecuación (2) (por ser la mas simple)

$$X + 3Y = 4$$
$$X = 4 - 3y \quad \ldots.(3)$$

Sustituimos "X" en la ecuación (1) (no puede ser en la misma que se despejo)

$$3(4 - 3Y) + 2Y = 5$$
$$12 - 9Y + 2Y = 5$$
$$12 - 7Y = 5$$
$$-7Y = 5 - 12$$
$$-7Y = -7$$
$$Y = -7/-7$$
$$Y = 1$$

Sustituimos "Y" en la ecuación (3)

$$X = 4 - 3(1)$$
$$X = 4 - 3$$
$$X = 1$$

Ejercicio

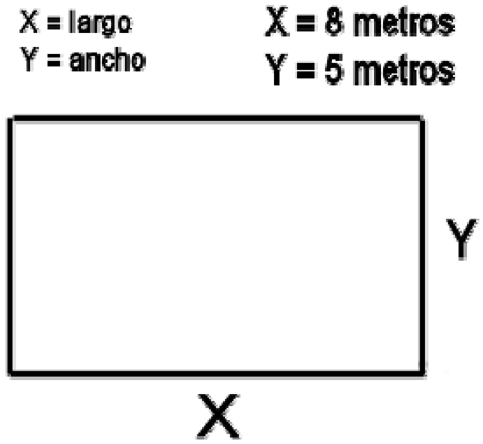
El perímetro de un rectángulo mide 26 metros y uno de sus lados es 3 metros mas largo que el otro. ¿Cuales son sus dimensiones?

$$2X + 2Y = 26$$
$$X = 3 + Y$$

$$2(3 + Y) + 2Y = 26$$
$$6 + 2Y + 2Y = 26$$
$$6 + 4Y = 26$$
$$4Y = 26 - 6$$
$$4Y = 20$$
$$Y = 20 / 4$$
$$Y = 5$$

Una vez encontrado “Y” lo sustituimos para encontrar “X”

$$X = 3 + 5$$
$$X = 8$$



<u>Resolución de sistemas de ecuaciones con 3 variables</u>

$$2X - 3Y + Z = -1 \quad \ldots(1)$$
$$X + 2Y + Z = 2 \quad \ldots(2)$$
$$-5X + 2Y - 3Z = -2 \quad \ldots(3)$$

Utilizando ecuación (1) y (2)
Invertimos todos los signos de la ecuación (2) para poder eliminar “Z”

$$2X - 3Y + Z = -1$$
$$\underline{-X - 2Y - Z = -2}$$
$$X - 5Y = -3 \quad \ldots.(4)$$

Utilizando ecuación (2) y (3)
Multiplicamos la ecuación (2) por el valor de Z en la ecuación (3)

$$3X + 6Y + 3Z = 6$$
$$\underline{-5X + 2Y - 3Z = -2}$$
$$-2X + 8Y = 4 \quad \ldots(5)$$

Ocupamos ecuación (4) y (5)
Multiplicamos la ecuación (4) por el valor de X en la ecuación (5)

$$(2)X - 5Y = -3$$
$$-2X + 8Y = 4$$
$$2X - 10Y = -6$$
$$-2X + 8Y = 4$$
$$-2Y = -2$$
$$Y = -2 / -2$$
$$Y = 1$$

Para encontrar el valor de "X" sustituimos "Y" en la ecuación (4) o (5)

$$X - 5(1) = -3$$
$$X - 5 = -3$$
$$X = 5 - 3$$
$$X = 2$$

Para encontrar el valor de "Z" sustituimos el valor de "X" y "Y" en cualquiera de las 3 primeras ecuaciones

$$X + 2Y + Z = 2$$
$$2 + 2(1) + Z = 2$$
$$4 + Z = 2$$
$$Z = 2 - 4$$
$$Z = -2$$

Por tanto X=2, Y=1, Z=-2

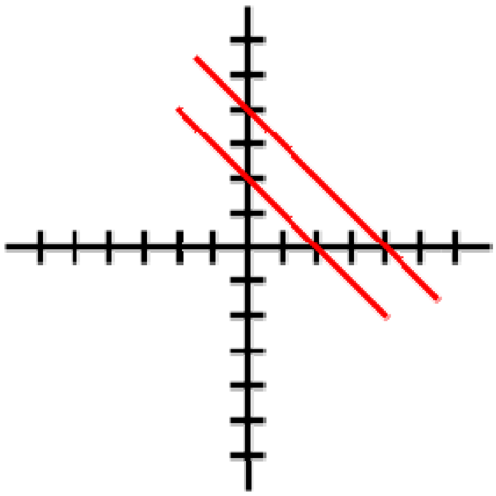
Tipos de rectas

Rectas paralelas (misma pendiente)

$Y = -2X + 3$ … (1)
$2Y = -4X - 1$ …(2)

Como la ecuación (1) ya esta resuelta, pasamos a resolver la ecuación (2)

$Y = -4X/2 - \frac{1}{2}$
$Y = -2X - \frac{1}{2}$



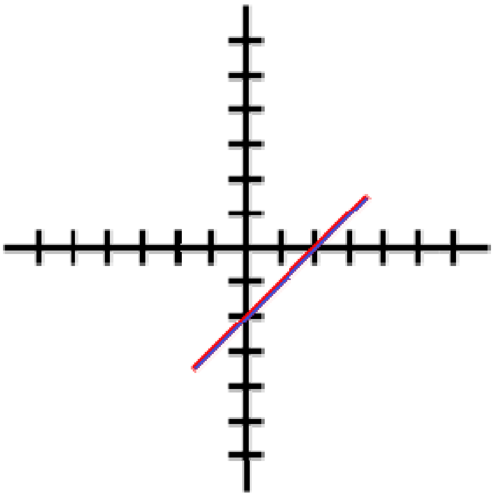
Rectas coincidentes (la misma recta en 2 ecuaciones)

$-2/3\ X + 2Y = 1 \ldots (1)$

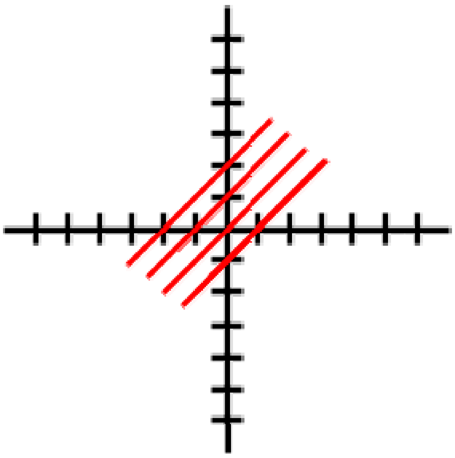
$2Y = 2/3X + 1$
$Y = (2/3X + 1) / 2$
$Y = 2/6\ X + ½$
$Y = 1/3\ X + ½$

$-2X + 6Y = 3 \ \ldots(2)$

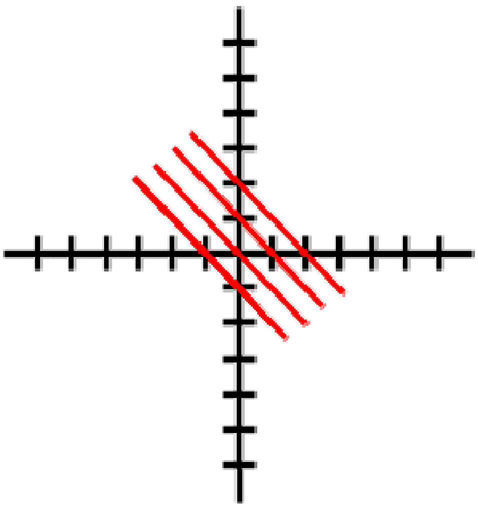
$6Y = 2X + 3$
$Y = 2X/6 + 3/6$
$Y = 1/3\ X + ½$



Pendientes positivas



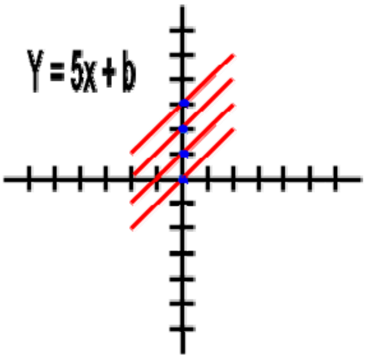
Pendientes negativas

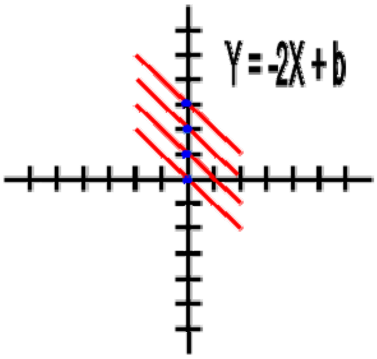


Familias de rectas

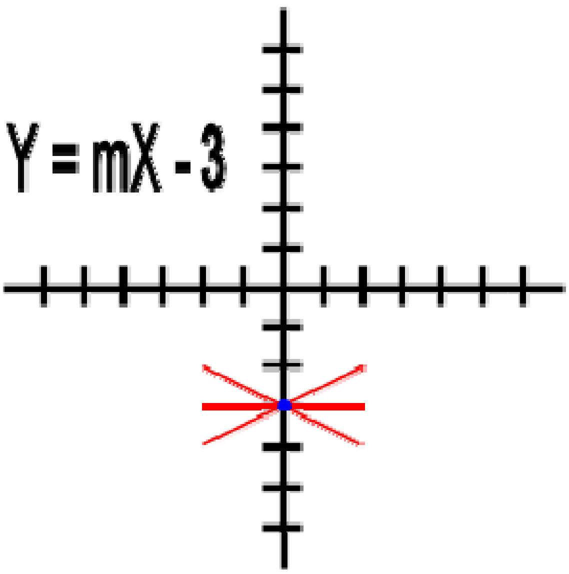
Como en toda familia deben de tener algo en común.

Caso 1: familia de rectas que tienen la misma pendiente pero difieren en la ordenada al origen, en este caso estamos hablando de una serie de rectas como se ejemplifica a continuacion





Caso 2: familia de rectas que coinciden en su ordenada al origen, pero difieren en su pendiente



Desigualdades lineales

Encuentra el conjunto solución de la desigualdad:

$$3X + Y + 1 \geq 0$$

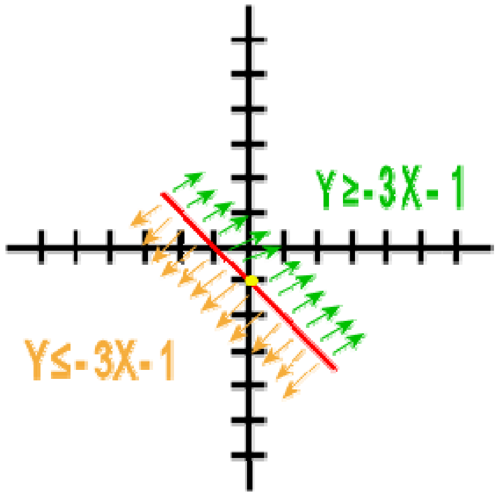
Primer paso:
Despejamos de la forma ya conocida

$$Y \geq -3X - 1$$

Segundo paso:
Encuentra la recta crítica de comparación

Y = - 3X – 1

Tercer paso:
Grafica la critica



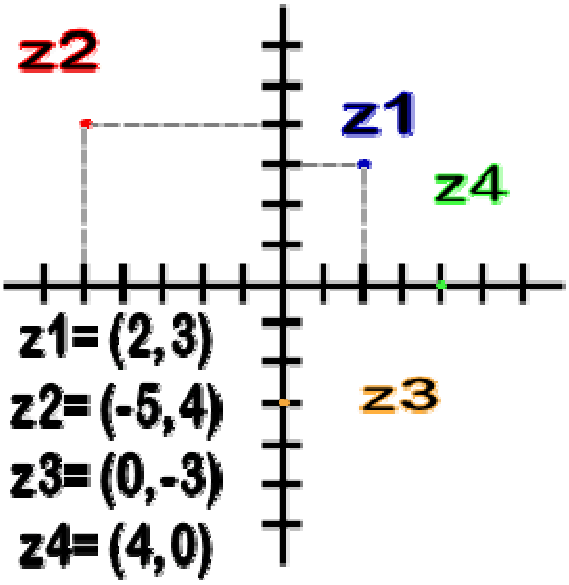
<u>Números complejos</u>

Un número complejo es un par ordenado con componentes reales:

“a, b”

C = {z | z = (a, b), a, b Є R}

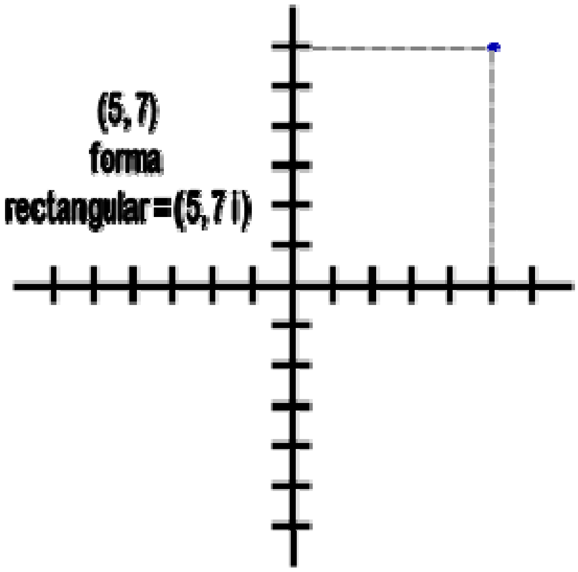
Ejemplo:



Dos números complejos son iguales si y solo si tienen el mismo primer componente y también son iguales sus segundos componentes.

(a1, b1) = (a2, b2)
(3/2, 1) = (3/2, 2/2)

Cual es la grafica del complejo (5,7)



Recordemos que:

$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{-4} = \sqrt{4\,(-1)} = \sqrt{4}\,\sqrt{1} = 2i$
$i = \sqrt{-1}$
$2i = 2\sqrt{-1}$
$7i = 7\,\sqrt{-1}$
$\sqrt{-7} = \sqrt{7},\, i$
$\sqrt{-3} = \sqrt{3},\, i$
$(i)^2 = (\sqrt{-1})^2$
$i^2 = -1$

Operaciones con números complejos

Suma de números complejos

Se suman algebraicamente es decir se suman términos semejantes

(3, -2) + (-7, 5) = (-4, 3)

Propiedades para la suma de números complejos

Propiedad conmutativa

Z1+z2 = z2+z1

Propiedad asociativa

(z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3)

Propiedad del elemento identidad

El elemento identidad o elemento neutro para los numero complejos es el (0 , 0), (doble cero)

$$(3, 7) + (0, 0) = (3, 7)$$
$$(0, 0) + (\pi , \sqrt{7}) + (0, 0) = (\pi , \sqrt{7})$$

Propiedad del inverso aditivo

Todo numero complejo tiene un inverso aditivo único excepto el (0 , 0) todo numero complejo sumado con su inverso aditivo da como resultado el (0 , 0)

$$(6, 12) = (-6, -12)$$

<u>Multiplicación de números complejos</u>

se operan como un binonimo simple y por ello es recomendable manejarlos en su forma rectangular

(7, 2)(3, -1)

$$
\begin{array}{c}
7+2i \\
\underline{3 - \ i} \\
21+6i \\
\underline{- 7i - 2i^2} \\
21 - i -2i^2
\end{array}
$$

$$21 - i -2 (-1)$$
$$21 - i + 2$$
$$23 - i$$

<u>Propiedades para la multiplicación de números complejos</u>

Propiedad conmutativa

$$z1 \cdot z2 = z2 \cdot z1$$

Propiedad asociativa

$$z1 (z2 \cdot z3) = (z1 \cdot z2)\ z3$$

Propiedad distributiva

$$z1 (z2 + z3) = z1 \cdot z2 + z1 \cdot z3$$

Propiedad del elemento identidad

El elemento identidad o elemento neutro para la multiplicación d e números complejos es el (1 , 0)

(1, 0)(2, 23) = (2 – 0, 23 + 0) = (2, 23)

Propiedad del inverso multiplicativo o reciproco

Todo numero complejo tiene un reciproco único excepto el (0 , 0), todo numero complejo multiplicado por su reciproco da como resultado (1 , 0)

El reciproco de (a, b) es:

$$(a/a^2+b^2, -b/a^2+b^2)$$

<u>División de números complejos</u>

z1= (a1, b1)
z2= (a2, b2)

Entonces

$$z1/z2 = \frac{(a1)(a2) + (b1)(b2)}{(a2)^2 + (b2)^2} + \frac{(b1)(a2) - (a1)(b2)}{(a2)^2 + (b2)^2}\, i$$

Ejercicios:

6+3i / 2 +i = (12 + 3/ 4 + 1) + (6 – 6/ 4+1) i =
15/5 + 0/5 i =
3 + 0 i =
3

Conjugados de números complejos:

Si (a+b) su conjugado seria: (a – b)
Si z= a + bi entonces su conjugado seria: z= a – bi
Si z= a – bi entonces su conjugado seria: z= a + bi
Si z= 4 + 7i entonces su conjugado siempre va a ser un numero real

Ejemplo

$$\begin{array}{r} 4 + 7i \\ \underline{4 - 7i} \\ 16 + 28i \qquad\quad \\ \underline{- 28i - 49\, i^2} \\ 16 - 49\, i^2 \qquad\quad \end{array}$$

Entonces

16 + 49 =

65

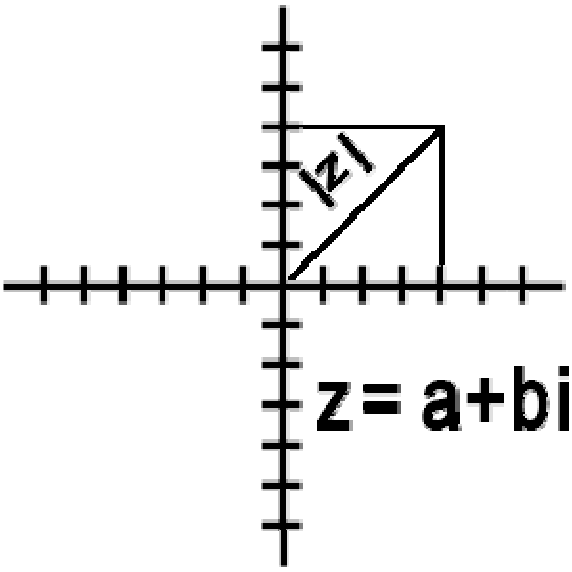
<u>Valor absoluto de un número complejo</u>

El valor absoluto de un número complejo representa geométricamente la distancia que hay entre ese número y el origen; de forma algebraica lo podemos obtener como:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Encuentra la distancia que hay entre el punto: z= -12, -16i al origen

$$|-12 -16i| = \sqrt{(12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$



<u>Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas</u>

Una ecuación de segundo grado o cuadráticas tiene como exponente mayor un 2 y se resuelve por el método de factorizacion o por formula general.

La forma general de una ecuación cuadrática es:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

Donde: “a, b, c” son constantes reales

Resolución de la ecuación cuadrática por el método de factorizacion.

$$X^2 + 7X + 12 = 0$$
$$(X + 3)(X + 4) = 0$$
$$X+3=0 \qquad x+4=0$$
$$X1= -3 \qquad x2= -4$$

Toda ecuación de segundo grado tiene 2 soluciones

<u>Resolución de la ecuación cuadrática por formula general</u>

$$X= -b \pm \sqrt{\ } b^2 - 4ac / 2a$$

Ejemplo

$$3X^2 = 4X -1$$
$$3X^2 - 4X + 1 = 0$$
$$X= 4\pm \sqrt{\ } (- 4)^2 - 4 (3)(1) / 2 (3)$$
$$X= 4\pm \sqrt{\ } 16 – 12 / 6$$
$$X= 4\pm \sqrt{\ } 4/6$$

$$X1= 4 + 2/ 6 = 6/6 = 1$$
$$X2= 4 -2 / 6 = 2/6 = 1/3$$

<u>Análisis de la función cuadrática</u>

- La grafica de la función cuadrática es una curva llamada parábola cuyo vértice es :

$$V= (-b/2a , 4ac - b^2/ 4a)$$

- la grafica es simétrica con respecto a la recta:

$$X= -b /2a$$

- Si a>0 entonces la curva es cóncava hacia arriba y el vértice será el punto mas bajo de la grafica.
- Si a <0 entonces la curva será cóncava hacia abajo y el punto mas alto de la grafica será el vértice.
- Los puntos donde interceptan la gráfica con el eje “X” son llamados raíces o ceros.

- Para encontrar las raíces o ceros se convierte la función cuadrática a la forma general haciendo que f(x) = 0; y se resuelve la ecuación por algún método

$$\mathbf{f(x)= aX^2 + bX + c}$$

- Para conocer el tipo de raíces se analiza el discriminante

Discriminante

El discriminante es la expresión “$b^2 - 4ac$” que se encuentra dentro del radical en la formula general; de su valor depende el tipo de raíces o ceros; de la siguiente forma:

1. Si “$b^2 - 4ac = 0$” entonces las 2 raíces son racionales reales, iguales, la grafica de la parábola tiene su vértice en el eje “X”; por lo que toca al eje “X” en un solo punto.
2. Si “$b^2 - 4ac >0$” si la raíz es exacta entonces serán 2 raíces racionales reales diferentes; si la raíz es inexacta entonces serán 2 raíces irracionales reales diferentes; la grafica de la parábola interfecta al eje en “X” en 2 puntos reales.
3. Si “$b^2 - 4ac <0$” entonces las raíces serán imaginarias, la gráfica de la parábola no interfecta ni toca al eje “X”.

Ejercicio:
f(x): $X^2+6X+9=0$

Vértice

$$v=(-b/2a\ ,\ 4ac - b^2/\ 4a)$$
$$v= (-6\ /\ 2(1)\ ,\ 4\ (1)(9) - (6)\ ^2/\ 4\ (1)\ )$$
$$v= (-3\ ,\ 0)$$

Análisis de “a”

$$a=1$$
$$a>0$$

Discriminante

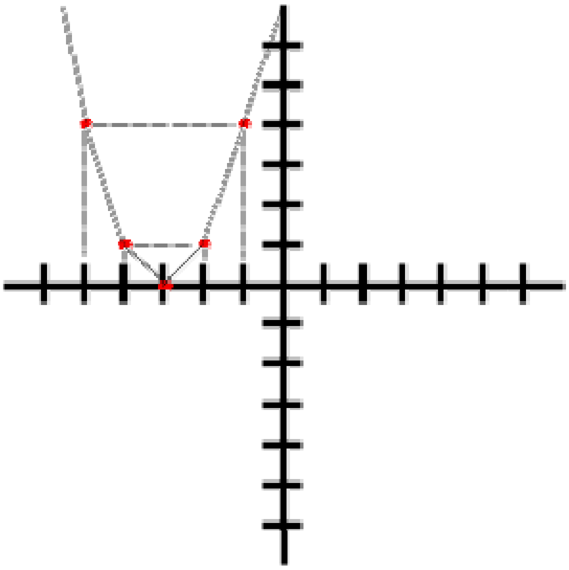
$$b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$

Las raíces son racionales reales iguales

Intersecta en un punto al eje “X”

Radices

$$X^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(X + 3)(X + 3) = 0$$
$$X1 = -3 \quad X2=-3$$

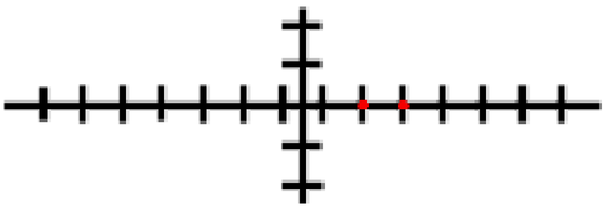


Desigualdades cuadráticas

$X^2 - 5X > -6$
$X^2 - 5X + 6 > 0$
Por tanto "Y" es > que cero

Convertimos la desigualdad en igualdad para resolverla

$X^2 - 5X + 6 = 0$
$X = (5 \pm \sqrt{25 - 24})/2$
$X = (5 \pm \sqrt{1})/2$
$X1 = 5+1/2 = 6/2 = 3$
$X2 = 5-1/2 = 4/2 = 2$



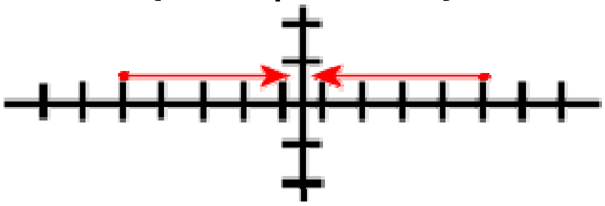
{ X Є R | X < 2 y X > 3 }

Recuerda:

Y<0

{ X Є R | X > # y X < # }

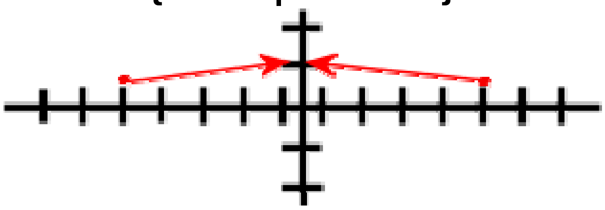
{ X Є R | # < X < # }



Y≤0

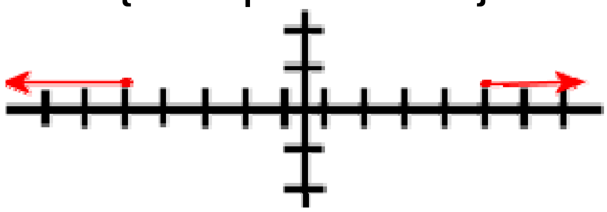
{ X Є R | X ≥ # y X ≤ # }

{ X Є R | # ≤ X ≤ # }



Y>0

{ X Є R | X < # ó X > # }



Y≥0

{ X Є R | X ≤ # ó X ≥ # }