Matemáticas III

PREPARATORIA ABIERTA

El contenido académico de este texto es exclusiva responsabilidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y su índice pertenece al programa correspondiente al plan de estudios del nivel medio superior, para la materia de

MATEMATICA
UNIDADES IX-XII

AUTORES: Humberto Cantú Salinas
Hector Paz Estrada

REVISO: Jaime Navarro Cuevas

COMITE ACADEMICO DE MATEMATICA: Humberto Cantú Salinas, Moisés Galicia Arrambide, Roberto García Martínez, Gustavo Mendoza González, Héctor Paz Estrada.

ADAPTARON: Luis Felipe Robles G.
Enrique Morales B.
Andrés Ramírez y Villa

La educacion es una responsabilidad compartida y en consecuencia invitamos atentamente a toda persona interesada en colaborar para resolver la problemática educativa, a que remita sus comentarios, críticas y sugerencias con respecto a esta obra a la Dirección General de Educación Extraescolar de la SEP.

Sus aportaciones serán apreciadas en todo lo que valen y permitirán perfeccionar y adecuar permanentemente estos materiales a las cambiantes condiciones de la época actual.

ISBN 970-18-0598-4

Indice

Prólogo

La decisión de escribir este libro fue motivada por un gran deseo de prestar ayuda a todas aquellas personas que se lanzan a la aventura de estudiar sin maestro.

Conociendo el temor que el estudiante tiene a la MATEMATICA, y suponiendo nosotros que ese temor generalmente es producido por la presentación formalista que se le ha dado a la misma, mediante esta presentación más informal, aunque no menos rigorista, intentamos, a un nivel medio, deshacer el mito del estudio de MATEMATICA y hacer ver que NO es más fácil NI más difícil que el estudio de cualquier otra asignatura y esperamos con ello que los resultados que se obtengan sean verdaderamente positivos.

Los Autores

Instrucción para el alumno

El presente texto ha sido elaborado tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan a los alumnos de Sistemas Abiertos de Enseñanza.

El texto ha sido estructurado de tal forma que facilite al máximo tu estudio. Cuenta con varias **unidades**, cada una de las cuales contiene:

1) **Objetivos generales:** que te informan acerca de lo que se pretende lograr con el estudio de dicha unidad.
2) **Una introducción:** independientemente de la que aparece dedicada al texto:

Para el estudio de curso, la unidad se ha dividido en partes llamadas **módulos**. Cada texto consta siempre de 16 módulos. De esta manera, estimamos que es posible aprobar las asignaturas del plan de estudios de un semestre, en las 18 semanas. El módulo de cada asignatura está programado para que lo estudies en un tiempo promedio de 3 a 4:30 horas por semana. Sin embargo, se te recomienda que le dediques a cada módulo, el tiempo que tú consideres necesario, de acuerdo con tus posibilidades.

El módulo cuenta con:

1) **Objetivos específicos:** que desglosan el objetivo general de la unidad.
2) **Esquema resumen:** donde se te presenta el contenido de cada módulo, en forma sinóptica.
3) **Contenido:** se refiere al desarrollo del tema o de los temas.
4) **Actividades complementarias:** te servirán de refuerzo en el aprendizaje de una unidad o un módulo específico.
5) **Reactivos de autoevaluación:** al final de cada módulo, se te dan una serie de preguntas de autocomprobación, para que puedas verificar por ti mismo, en qué grado has logrado los objetivos propuestos al principio del módulo. Las respuestas correctas las encontrarás al final de cada unidad o, en otros casos, al final del libro.

En la parte final del libro, podrás encontrar, cuando lo estimes necesario, apéndices que te ayudarán a la ampliación y profundización de algún tema.

Además, se te da en las unidades o al final del texto, una bibliografía con la que puedes complementar tues estudios o ampliar tu horizonte cultural, de acuerdo a tus inquietudes.

ADVERTENCIA

Te recomendamos la lectura cuidadosa y la comprensión de los objetivos específicos al empezar cada módulo, para que tengas presente lo que se espera de tí, con el trabajo que realices con cada uno de ellos.

Notación

La mayoría de los símbolos que usaste en los dos primeros textos, seguirán usándose en éste; sólo hemos creído conveniente cambiar el de algunos conjuntos para uniformar la manera de representarlos de acuerdo con la generalidad de los libros de Matemática.

A continuación se te da una lista de todos ellos:

R = Conjunto de números reales.

Q = Conjunto de los números racionales.

Q' = Conjunto de los números irracionales.

W = Conjunto de los números enteros no negativos.

I = Conjunto de los números enteros.

N = Conjunto de los números enteros positivos o Conjunto de los números naturales.

C = Conjunto de los números complejos.

UNIDAD IX

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

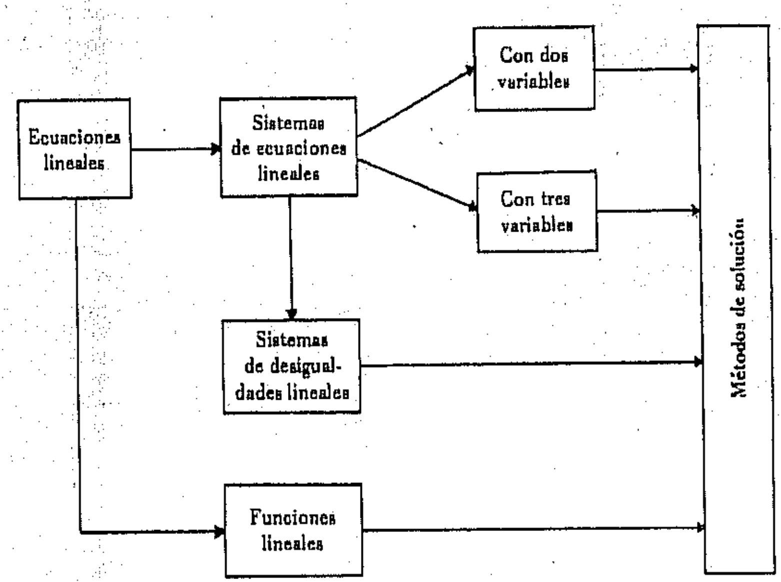
Apoyándonos en el concepto de relaciones lineales y proponiendo la solución tanto gráfica como algebraica de las ecuaciones y funciones lineales, se inicia en los siguientes módulos el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables, planteando sus métodos de solución. Asimismo se presenta una importantísima aplicación: la programación lineal.

Objetivos generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Resolverá y graficará ecuaciones lineales.
2. Obtendrá la pendiente y la ordenada al origen de las rectas obtenidas al graficar ecuaciones lineales.
3. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con dos variables utilizando el método que más convenga en cada caso (Gráfico, suma o resta, sustitución).
4. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con tres variables utilizando el método por suma o resta y el método por sustitución.
5. Resolverá y graficará sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas.
6. Resolverá problemas de planteo que involucren sistemas de ecuaciones lineales y sistemas de desigualdades lineales.

Diagrama temático estructural



Glosario

Relación: Cualquier conjunto de pares ordenados

Relación lineal: Conjunto de pares ordenados cuya gráfica es una línea recta.

Proposición abierta: Expresión verbal o simbólica que contiene una variable y un conjunto reemplazamiento.

Regla de correspondencia: Ecuación que indica como se corresponden los elementos de dos conjuntos.

Ecuación lineal: Cualquier ecuación equivalente a una de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no sean ambas cero.

Par ordenado: Pareja de elementos encerrados dentro de un paréntesis, separados por una coma en la que se distingue uno como el primero y el otro como el segundo.

Ecuaciones equivalentes: Dos o más ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Función lineal: Toda ecuación que puede escribirse en la forma $f(x) = mx + b$; $x \in R$; m y b son constantes reales.

Pendiente de una recta: Cambio en y por unidad de cambio en x.

Ordenada al origen: La y del punto en que una recta interseca al eje y.

Parámetro: Es un valor numérico sujeto en algunos casos a ciertas restricciones.

Familia de rectas: Conjunto de rectas que tienen una propiedad común.

Sistema de ecuaciones lineales: Dos o más ecuaciones de la forma $Ax + By + C = 0$

Conjunto solución: Conjunto de pares ordenados que satisfacen una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Sistema de ecuaciones con tres variables: Dos o más ecuaciones de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Desigualdades lineales: Toda expresión de la forma

$$Ax + By + C \geq 0 \text{ ó } Ax + By + C \leq 0$$

Semiplano: Cada una de las regiones en que una recta divide al plano que la contiene.

Sistema de desigualdades lineales: Dos o más desigualdades de la forma

$$Ax + By + C \geq 0 \text{ ó } Ax + By + C \leq 0$$

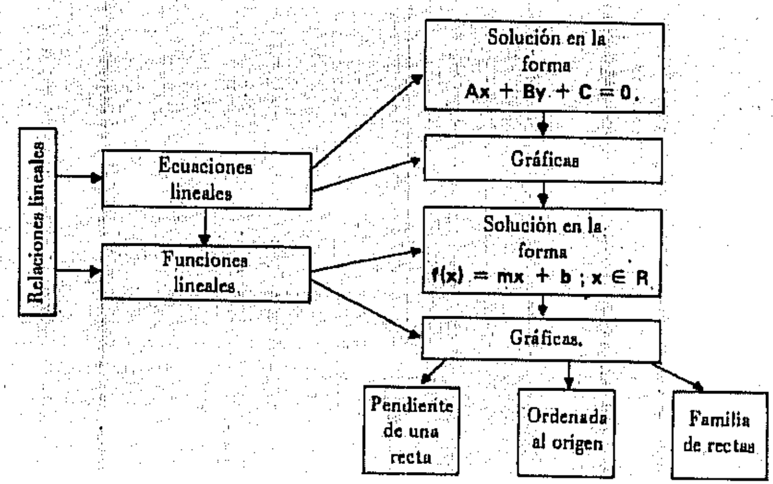
Módulo 1

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá una ecuación lineal como equivalente a la forma $Ax + By + C = 0$
2. Resolverá ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
3. Graficará ecuaciones lineales.
4. Definirá función lineal.
5. Explicará que es la pendiente de una recta.
6. Explicará en que consiste la ordenada al origen.
7. Obtendrá las pendientes y ordenadas al origen de las rectas obtenidas al graficar ecuaciones lineales.
8. Graficará familias de rectas.

ESQUEMA RESUMEN



1.1 Relaciones lineales

Una relación lineal establece. . .

Para llegar a este tema, adquiriste el concepto de relación, aprendiste que algunas veces una relación puede definirse mediante una ecuación con dos variables, a la cual has llamado **proposición abierta con dos variables**, y algunas veces **regla de correspondencia**; las graficado relaciones y ello te ha proporcionado una mejor comprensión de las mismas. Ahora vas a estudiar un tipo de relaciones a las que te enfrentarás frecuentemente, tanto en la matemática como en otras ciencias. Estas relaciones son definidas por medio de igualdades llamadas ecuaciones lineales o ecuaciones de primer grado con dos variables que usualmente serán x, y.

1.11 Ecuaciones lineales.

Los científicos acostumbran describir algunas situaciones prácticas con ecuaciones que incluyen dos o más variables; de las ecuaciones obtienen gráficas que les permiten una mejor comprensión de estas situaciones y pueden, además, prever el comportamiento de una variable si saben cómo se comportará la otra. Pongamos el caso de un objeto que se mueve con una velocidad constante de 10 metros cada segundo durante 15 segundos; si llamamos x al tiempo transcurrido y representamos por y la distancia que separa al objeto del punto de partida en un instante x, el científico concluye que el movimiento queda descrito por la ecuación $y = 10x,\ 0 \leq x \leq 15$.

Con esta ecuación puede establecer exactamente la posición del objeto para cualquier valor permisible de x y recíprocamente puede determinar qué tiempo debe transcurrir para que el objeto móvil se haya desplazado una cierta distancia, así, cuando $x = \frac{1}{2}$, $y = 5$; también cuando el objeto se encuentra a 15 metros de su punto de partida o sea cuando $y = 15$, x el tiempo transcurrido es 1.5 ó $\frac{3}{2}$ segundos. Los pares ordenados (x, y), $0 \leq x \leq 15$ que hacen cierta la ecuación, reciben el nombre de soluciones de la ecuación, entonces $(\frac{1}{2}, 5)$, $(\frac{3}{2}, 15)$ son dos soluciones de la igualdad

¿Qué es la solución de una ecuación?

$$y = 10x,\ 0 \leq x \leq 15.$$

El par ordenado (1,5) no es solución de la ecuación puesto que si $x = 1$, entonces $y = 10$ y $10 \neq 5$. Si $x \in R$, $0 \leq x \leq 15$, x puede sustituirse por un número infinito de valores y como a cada x le corresponde una y, la ecuación dada tiene infinitas soluciones; esto nos impide enlistarlas y para representarlas usamos la notación de conjuntos; $\{(x, y) \mid y = 10x,\ 0 \leq x \leq 15\}$ es el conjunto solución de la ecuación dada.

Una ecuación lineal es. . .

Definición: Una ecuación lineal o ecuación de primer grado en x, y, es cualquier ecuación equivalente* a una de la forma $Ax + By + C = 0$ en donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no sean ambas cero.**

Ejemplos:

1. $2x - 3y - 12 = 0$ es una ecuación lineal en la que $A = 2$, $B = -3$, $C = -12$.
2. $2x - y = 0$, es una ecuación de primer grado en la que $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$.
3. $2y - 3 = 0$ en esta ecuación no aparece el término que contiene a x; esto significa que $A = 0$, $B = 2$ y $C = -3$, consecuentemente la ecuación puede escribirse
$$0x + 2y - 3 = 0.$$
4. $y = \frac{2}{3}x + 4$, esta ecuación es equivalente a $2x - 3y + 12 = 0$ así que es una ecuación lineal en donde $A = 2$, $B = -3$ y $C = 12$.

Gráfica de ecuaciones lineales

La línea recta es la gráfica de. .

Cuando el conjunto de los números reales es el conjunto de sustitución de las dos variables de una ecuación del tipo que nos ocupa, la gráfica de dicha ecuación es una línea recta; este hecho es la causa de que a estas igualdades las llamemos **ecuaciones lineales**. Hemos llamado solución de una ecuación lineal en x, y, a todo par ordenado (x, y) con componentes reales, los cuales al sustituir a las variables en la ecuación hacen cierta la igualdad así, $(0, -4)$ es una solución de $2x - 3y - 12 = 0$, $x, y \in R$, porque al hacer $x = 0$ y $y = -4$ en la ecuación resulta,

$$\begin{aligned} 2(0) - 3(-4) - 12 &= 0 \\ 12 - 12 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

La gráfica de una ecuación lineal es la gráfica de su conjunto solución; entonces la gráfica de $2x - 3y - 12 = 0$; $x, y \in R$ es la de $\{(x, y) \mid 2x - 3y - 12 = 0; x \in R\}$ como $x \in R$ y R es cerrado respecto a suma y multiplicación, y es necesariamente real.

Gráfica de una ecuación

Como la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta y una línea recta queda determinada cuando conocemos dos de sus puntos,

* Dos o más ecuaciones son equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones.

** Si A y B son cero, no existe la ecuación.

las gráficas de estas ecuaciones las obtenemos graficando en el plano dos de sus soluciones y trazando después la recta que contiene a estos dos puntos.

Ejemplo 5. Graficar la **ecuación lineal.**

$$2x - 3y - 12 = 0$$
$$\text{si } x = 0 \quad -3y = 12$$
$$y = -\frac{12}{3}$$
$$y = -4$$

(0, − 4) es una solución; otra solución se obtiene haciendo

$$y = 0 \qquad 2x - 12 = 0$$
$$2x = 12$$
$$x = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

por lo tanto (6,0) es otra solución.

La gráfica de la ecuación es la recta que pasa por (6, 0) y (0, − 4).

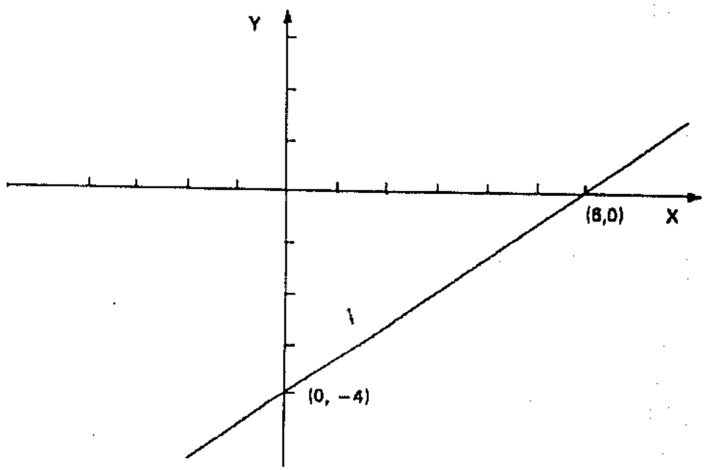


Figura 1

Intersección en ambos ejes x

La intención de buscar las soluciones haciendo $x = 0$ y después $y = 0$, es hacer notar que la gráfica intersecta ambos ejes, y esto sucede siempre que en la **ecuación lineal** A y B son distintos de cero $(A,\ B \neq 0)$

Ejemplo 6:
Si en la ecuación $2x - 3y = 0$ x es sustituida por cero (hacemos $x = 0$ tenemos $2.0 - 3y = 0$ de donde obtenemos que $y = 0$ Esto es, si $x = 0$ entonces $y = 0$ por lo que (0, 0) es un par ordenado cuyos componentes hacen cierta la ecuación $2x - 3y = 0$ siendo así que (0,0). es una solución de dicha ecuación, la gráfica de (0, 0) es la intersección de los ejes coordenados por lo que la recta con ecuación $2x - 3y = 0$ intersecta ambos ejes coordenados en el mismo punto. 0 (0,0) (Ver Figuras), si queremos graficar la recta antes mencionada debemos encontrar al menos otra solución de su ecuación, como $x \in R$ podemos asignarle a x cualquier valor real y determinar el correspondiente de y, por comodidad hagamos $x = 3$ entonces la ecuación queda $2.3 - 3y = 0$ al resolverla para y tenemos $3y = 6$ ó $y = 2$; siendo entonces (3,2) la solución buscada, ahora graficamos los puntos correspondientes a (0,0) (3,,2) y por ellos trazamos la gráfica de la ecuación $2x - 3y = 0$.

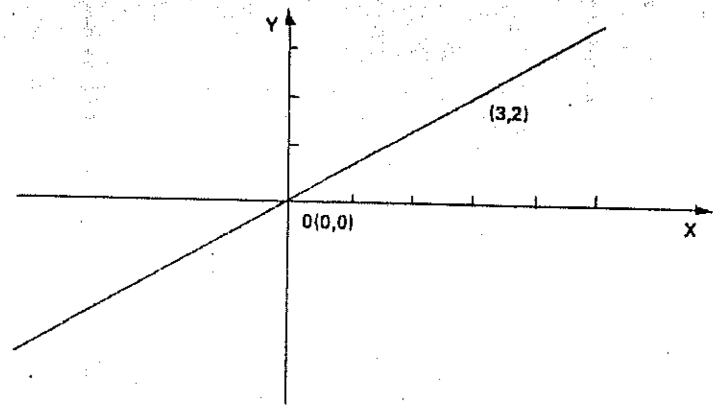


Figura 2

Ejemplo 7: Gráficar $y - 2 = 0$.
Esta ecuación podemos escribirla como $0x + y - 2 = 0$, de esta expresión podemos entender que el que no aparezca el término en x (A x) en la ecuación lineal significa que el coeficiente de x es cero $A = 0$ y que por consecuencia $A = 0$ para todo $x \in R$ y dando que 0 es el elemento identidad para suma la ecuación se escribe $y - 2 = 0$ ó $y = 2$. De lo anterior debemos entender que sea cual sea el valor asignado a x la

ecuación siempre queda como $y = 2$ o sea que y no cambia de valor (es constante) y es igual a 2 para cualquier valor asignado a x, en consecuencia la gráfica consta de todos los puntos del plano cuya ordenada (y) es 2.

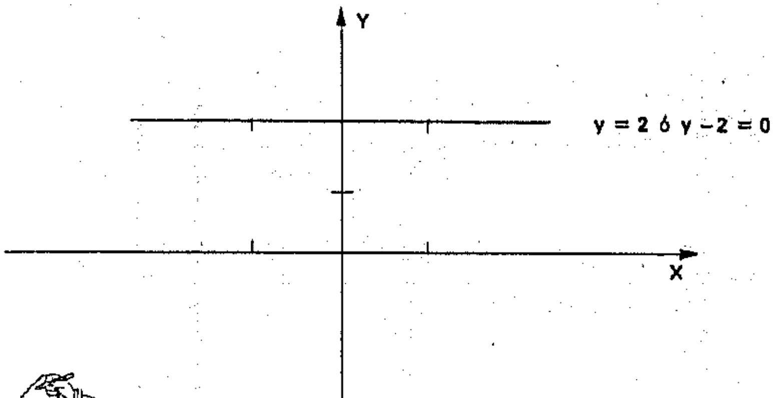


Figura 3

Ejemplo 8 Graficar la ecuación $x - 2 = 0$, ecuación que puede escribirse $x + 0y - 2 = 0$, y podemos notar que para cualquier valor de y, $y \in R$, x siempre es igual a 2.

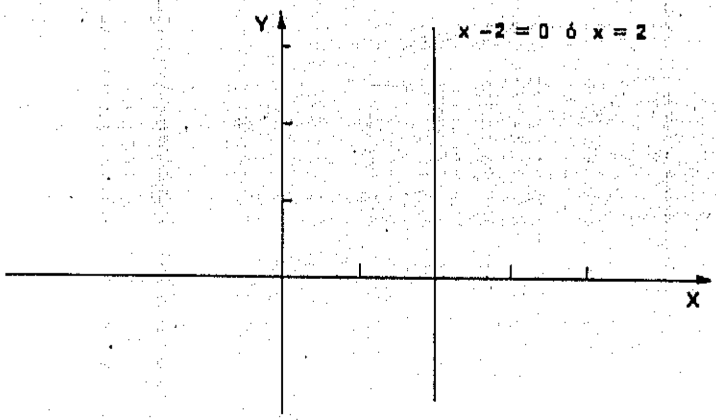


Figura 4

1.12 Función lineal

En las ecuaciones de los ejemplos 5, 6 y 7 del párrafo anterior, el coeficiente de y es distinto de cero ($B \neq 0$); cada una de estas ecuaciones definen una función. Lo podemos probar notando que al asignarle a x un valor, determinamos un único valor de y o bien, mediante la prueba del trazo de rectas verticales, las cuales no deben intersecar la gráfica en más de un punto. Cuando $B \neq 0$, la ecuación puede escribirse en forma equivalente si la resolvemos para y; haciendo esto con las ecuaciones de los ejemplos 5, 6 7 tenemos:

del ejemplo 5, $y = \frac{2}{3}x - 4$

del ejemplo 6, $y = \frac{2}{3}x$ ó $y = \frac{2}{3}x + 0$

del ejemplo 7, $y = 2$ ó $y = 0x + 2$

¿Cómo definimos una función lineal?

Dado que si $B \neq 0$ en una ecuación lineal, está representa una función, y que la ecuación puede escribirse de una de las tres formas dadas en el párrafo anterior, damos la siguiente.

> **Definición:** La ecuación $f(x) = mx + b$; $x \in R$; donde m y b son constantes reales, representa una función llamada función lineal.

Un caso particular se presenta cuando $m = 0$. Si $m = 0$ entonces $f(x) = b$, $x \in R$ esta función se llama función constante siendo su gráfica (ejemplo 7) una recta paralela al eje X.

Esto significa que si en la ecuación $f(x) = mx + b$, x es sustituida por cero, el correspondiente valor de y es b ($y = b$), estos dos valores, 0 y b son los componentes de una solución de la ecuación $f(x) = mx + b$, por consiguiente $(0, b)$ tiene por gráfica un punto que pertenece a la gráfica de la ecuación. Observa que el primer componente del par ordenado $(0, b)$ es cero, como dicho primer componente indica la separación entre el punto y el eje Vertical y dado que en este caso es cero debes entender que el punto $(0, b)$ pertenece también al eje vertical, si, dicho punto pertenece a la gráfica de $f(x) = mx + b$ y también al eje vertical entonces es la intersección de esos dos conjuntos de puntos. El segundo componente del par $(0, b)$ ó sea b, indica la separación entre el punto y el eje horizontal; más concretamente podemos decir en la ecuación $f(x) = mx + b$, b es la ordenada del punto de intersección entre la gráfica de $f(x) = mx + b$ y el eje vertical a b la llamamos **ordenada al origen**.

El significado de la constante **m** (pendiente de la recta) debes entenderlo mejor con la interpretación geométrica que ahora te presentamos:

Sigamos con la ecuación que define a una **función lineal** $f(x) = mx + b$ si ahora hacemos $x = 0$

$$f(0) = m \cdot 0 + b$$
$$f(0) = b$$

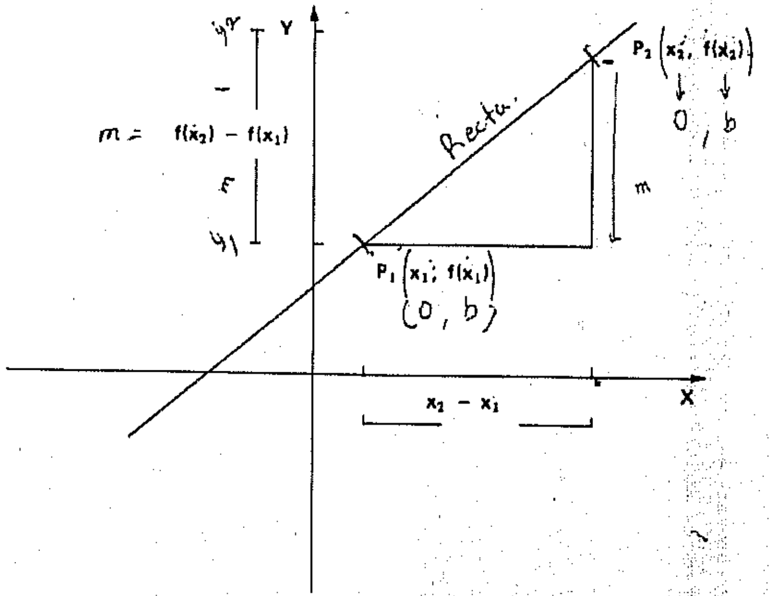


Figura 5

Sean $f(x) = mx + b$, la ecuación de la recta L en la figura 5, P_1 el punto en la recta con coordenadas $(x_1, f(x_1))$, P_2 el punto $(x_2, f(x_2))$. Si sustituimos x_1 y x_2 en la ecuación de la recta obtenemos:

$$f(x_2) = mx_2 + b$$
$$f(x_1) = mx_1 + b$$

la diferencia entre $f(x_2)$ y $f(x_1)$ es

$$f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + b) - (mx_1 + b)$$
$$f(x_2) - f(x_1) = mx_2 + b - mx_1 - b$$
$$f(x_2) - f(x_1) = mx_2 - mx_1$$
$$f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$$

finalmente $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

o también $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

si $x_2 - x_1 = 1$ entonces $m = f(x_2) - f(x_1)$

¿Qué nos indica la pendiente?

La pendiente **(m)** indica en cuántas unidades cambia la ordenada cuando **x** aumenta una unidad*, dicho de otra manera si nos movemos en la recta con ecuación $f(x) = mx + b$ (figuras 6 y 7) partiendo de un punto **P** de tal manera que la abscisa aumente una unidad* la ordenada cambia (aumenta o disminuye) **m** unidades,

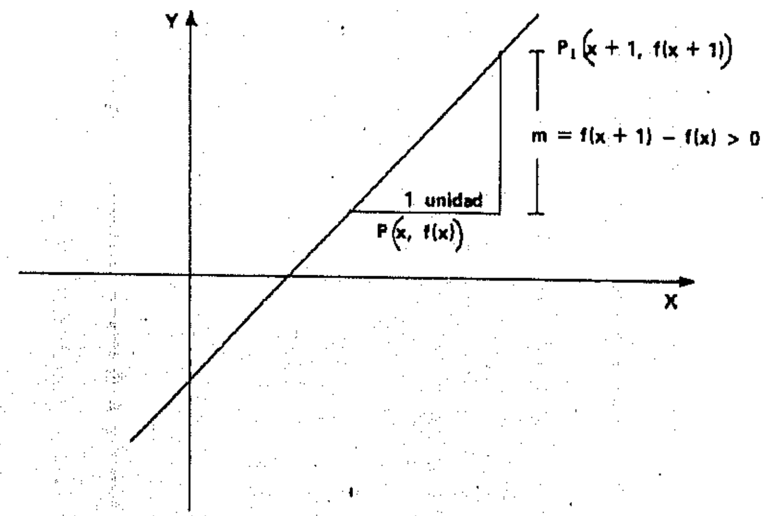


Figura 6

¿Qué es la pendiente?

* Para que x aumente es necesario efectuar en el plano un desplazamiento de izquierda a derecha.

¿Cuántas posibilidades tiene la pendiente?

La pendiente es un número real, tiene tres posibilidades, $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$ (propiedad de tricotomía) si $m > 0$, la ordenada crece; la gráfica se desplaza hacia arriba (figura 6) si $m = 0$, y no aumenta ni disminuye, es una función constante (ejemplo 7) si $m < 0$, la y decrece. La gráfica se desplaza hacia abajo (figura 7). En los tres casos anteriores se da por sentado que x está creciendo.

Aplicación de pendiente.

Ejemplo 9.

Una recta que interseca a Y en $(0, -3)$ tiene una pendiente igual a 3. Encuentra una ecuación de dicha recta y grafícala.
Solución: Como a la intersección con Y es $(0, b)$ entonces $b = -3$, y dado que $m = 3$, la ecuación se obtiene por simple sustitución en $y = mx + b$ quedando $y = 3x - 3$.

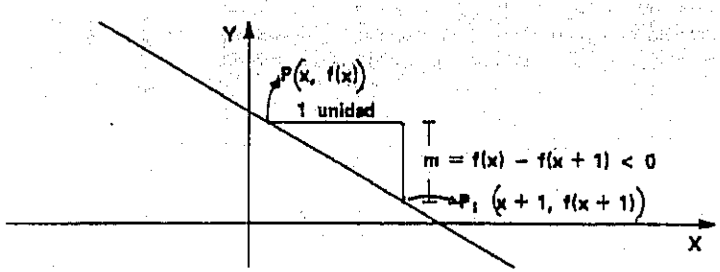


Figura 7

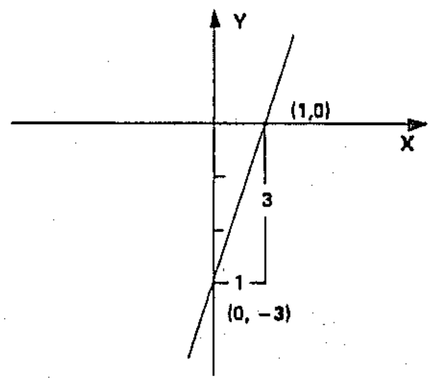


Figura 8

Para graficarla necesitamos de otro punto diferente de $(0, -3)$, este punto lo determinamos haciendo que x aumente una unidad, como m es el cambio en y por unidad de aumento en x, y rece tres unidades, esto nos lleva al punto $(1, 0)$.

Aplicación de intersección a los ejes.

Ejemplo 10.

Determina pendiente, ordenada al origen y gráfica de la recta cuya ecuación es $6x + 3y + 2 = 0$ si resolvemos para y, obtenemos $y = -2x - \frac{2}{3}$

entonces $m = -2$, $b = -\frac{2}{3}$

Para graficarla necesitamos al menos dos puntos; tenemos su intersección con y, que es $(0, -\frac{2}{3})$

Para determinar el otro punto aumentamos a la x del punto una unidad y le quitamos a la y del mismo punto dos unidades, esto nos lleva al punto $(1, -\frac{8}{3})$. (Figura 9)

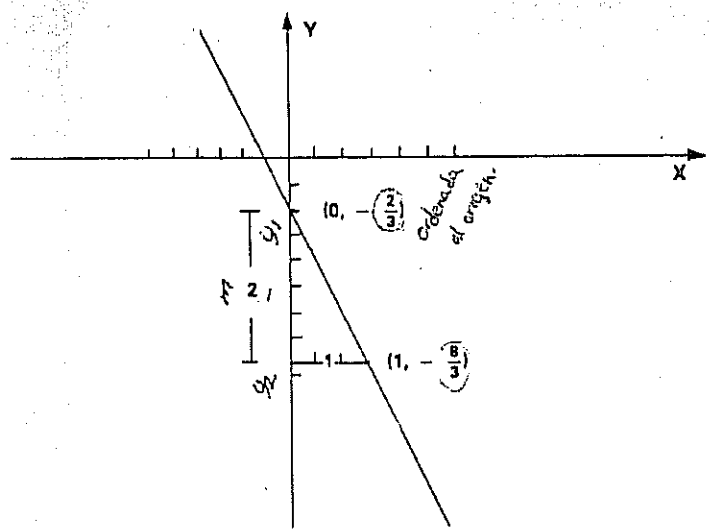


Figura 9

Ejemplo 11.

¿Cuál es la pendiente de una recta que pasa por los puntos $A (\frac{1}{2}, 2)$, $B (\frac{3}{2}, 5)$?

Solución 1.

Al desplazarnos sobre la recta del punto A al punto B (figura 10) la x aumenta una unidad, el cambio causado a y será el cambio en y por unidad de cambio en x entonces $m = 3$

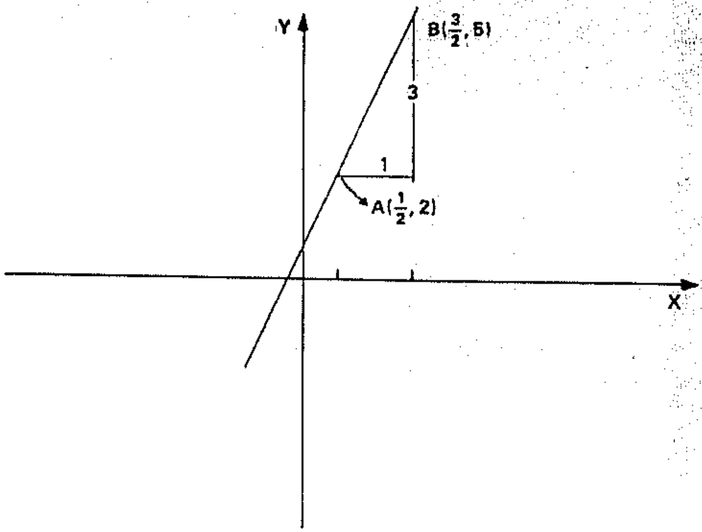


Figura 10

Solución 2.

Quedó establecido que $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; si a las coordenadas de B les asignamos el subíndice 2 y a las de A el subíndice 1, tenemos $m = \frac{5 - 2}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 3$

Consideremos otra característica de las **funciones lineales** y sus gráficas, la cual aplicarás en un tema posterior; sean

$$L(x) = 5x + 3 \quad y \quad f(x) = 5x + 2, \quad x \in R$$

dos **funciones lineales** que tienen la misma pendiente ¿existe en R un elemento a para el cual $L(a) = f(a)$?

Supongamos que dicho número existe, entonces $L(a) = f(a)$ ello implica que $5a + 3 = 5a + 2$ y por la ley de cancelación para la suma $3 = 2$

Rectas con la misma pendiente son. . .

Lo cual no es cierto. Este hecho contradice nuestro supuesto, y concluimos que $L(a) \neq f(a)$ para todo $a \in R$, por lo tanto no existe un par ordenado de números reales que haga ciertas ambas igualdades, lo que significa que sus gráficas no tienen puntos comunes, en consecuencia deben ser paralelas.

Resumiendo: dos rectas con la misma pendiente son paralelas.

¿Qué es una familia de rectas?

Hemos establecido que la ecuación lineal $y = mx + b$ representa una recta para valores fijos de m y de b.

Consideremos un caso particular: sea $b = 1$, y dejemos a m libertad de ser sustituida por cualquier número real; para cada sustitución de m se especifica una única recta, ¿por qué?

El conjunto de todas las rectas especificadas mediante estas sustituciones se llama una **familia de rectas** y en este caso es la familia de rectas que pasan por A(0, 1); en esta familia existe una recta que no tiene pendiente, ¿cuál es?

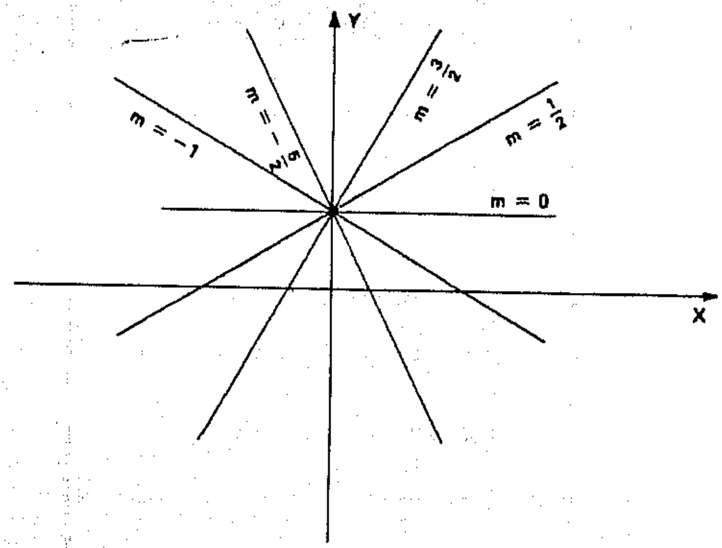


Figura 11

La ecuación de esta familia de rectas es $y = mx + 1$ en donde a m se le llama parámetro*.

Si tienen la misma pendiente, tenemos una familia de rectas.

Supongamos ahora que mantenemos fijo el valor de m y dejamos que b sea variable; determinamos así otra familia de rectas, en la cual todas tienen la misma pendiente. Y por consiguiente son paralelas; así $y = 2x + b$ representa la familia de rectas paralelas en las que $m = 2$ y b es un parámetro.

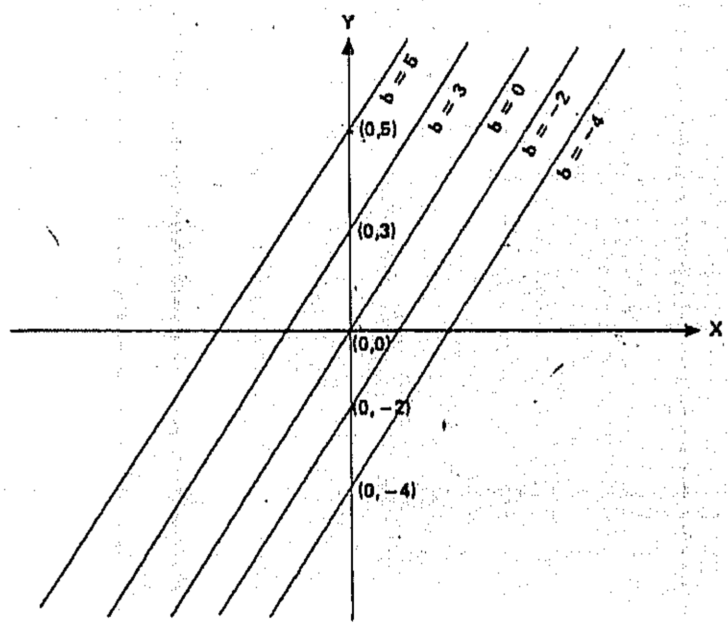


Figura 12

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En las relaciones dadas a continuación se da el conjunto de reemplazamiento de ambas variables.

* Parámetro es un valor numérico sujeto en algunos casos a ciertas restricciones.

1. Escribe cada ecuación lineal en la forma $Ax + By + C = 0$, y determina, de ser posible, tres soluciones para cada una.

a) $y + 2x = 10$ $\quad x, y \in R$
b) $3x = 4 + y$ $\quad x, y \in I$
c) $x - \frac{5}{7}y = 1;$ $\quad x, y \in \{z \in R \mid z < 0\}$
d) $3x + 4y = -1;$ $\quad x, y \in I$
e) $2x - 4 = 3y;$ $\quad x, y \in W$
f) $5 - (x - y) = 3x - 2;$ $\quad x, y \in Q$
g) $5x - 8 = y - (7 - 2x);$ $x, y \in Q$
h) $3x - 1 = 6 - y;$ $\quad x, \in Q', y \in R$
i) $2(3x - y) = 2x + 3;$ $\quad x \in Q', y \in R$
j) $12 - 3x = 4(x - y);$ $\quad x, y \in R$

2. Graficar cada ecuación, encontrando las intersecciones con los ejes coordenados.

a) $4x - 3y = 12$
b) $2x + y = 4$
c) $x - y + 2 = 0$
d) $x - 3y = 2$
e) $2x - 5y + 10 = 0$

En los problemas siguientes encuentra una ecuación para cada una de las relaciones cuya gráfica se describe a continuación:

f) Una recta paralela al eje X que contiene a P $(3, -3)$
g) Una recta paralela al eje Y que pasa por $(-2, 2)$
h) El eje X
i) El eje Y

3. Encontrar las pendientes y ordenadas al origen de las rectas representadas por las ecuaciones siguientes; graficar cada una.

a) $4x + 2y - 1 = 0$
b) $7x + 8y + 3 = 0$
c) $2x - 3y = 0$
d) $2x - y = 2$
e) $y = 0$
f) $x = 4 - y$
g) Grafica la familia de rectas $y = mx - 2$, en donde m es un parámetro.
¿Qué punto tienen en común ? (cinco rectas deben dar una idea clara de la gráfica).
h) Grafica la familia de rectas $y = 3x + b$, donde b es un parámetro, (5 rectas deben clarificar la situación).
¿Qué tienen en común las rectas de esta familia?
i) Dadas las dos familias de rectas $y = mx - 2$, $y = 3x + b$, ¿existe una recta común a las dos familias? Si este es el caso encuentra su ecuación.

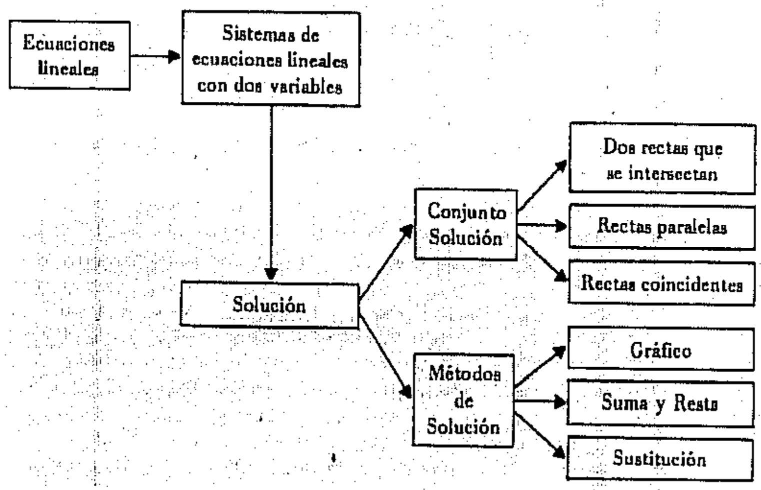
Módulo 2

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará como se obtiene el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
2. Mencionará los tres casos que se pueden encontrar al buscar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
3. Mencionará la diferencia entre método gráfico y método algebraico de solución en sistemas de ecuaciones lineales.
4. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con dos variables utilizando el método gráfico.
5. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con dos variables utilizando el método por suma o resta.
6. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con dos variables utilizando el método de sustitución.

ESQUEMA-RESUMEN



2.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Si asociamos un elemento de A a un elemento de B, tenemos. . .

Recuerda cómo se definió Función en la Unidad VIII y que podemos escribir como $f: A \longrightarrow B$, en la cual se asocia a cada elemento de A un solo elemento de B. Si consideramos a los elementos de A como el conjunto de todos los pares ordenados de números reales y a B como el conjunto de los números reales, podemos escribir esta función como:

$$f: (x, y) \longrightarrow z$$

Función de dos variables.

donde la correspondencia es de un par ordenado a un número real.

De aquí se ve que z se puede expresar algebraicamente en términos de x e y; a menudo nos referiremos a esto como una función de dos variables la cual escribiremos como $z = f(x, y)$ (z igual a f de x e y).

Nos interesa el caso particular donde z es una expresión de primer grado, $z = Ax + By + C$ y nuestro interés será encontrar un conjunto de pares ordenado (x, y) tales que $Ax + By + C = 0$, esto es

$$\{(x, y) \mid Ax + By + C = 0\}$$

¿Qué es un conjunto solución?

al que hemos llamado conjunto solución y todo elemento de este conjunto es solución de la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

Si resolvemos para y en la ecuación anterior, obtenemos otra ecuación equivalente de la forma $y = mx + b$, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$ la cual respresenta una línea recta. Como se puede ver fácilmente, hay un número infinito de soluciones para la ecuación $Ax + By + C = 0$ ya que todos los puntos que están sobre la recta son gráficas de pares ordenados (x, y), elementos del conjunto solución de la ecuación. También podemos ver que para cualquier valor arbitrario de $x \in R$ quedará determinado el correspondiente valor de la y. En la ecuación lineal $2x - y - 6 = 0$ vemos que una solución es el par ordenado $(2, -2)$ ya que si sustituimos estos valores satisfacen la ecuación. Otro par ordenado que es elemento del conjunto solución es $(1, -4)$ y en general es solución un número infinito de pares ordenados, de los cuales tú puedes encontrar algunos de ellos. Para la ecuación que

hemos estado considerando el conjunto solución es

$$\{(x, y) \mid 2x - y - 6 = 0\}$$

Conjunto solución de un sistema de ecuaciones.

Nuestro interés no es solamente encontrar el conjunto solución de una ecuación lineal, sino que ahora nos interesa encontrar el conjunto solución de un sistema como el siguiente:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

y lo que buscamos son los pares ordenados (x, y) que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones.

Si llamamos $D = \{(x, y) \mid A_1x + B_1y + C = 0\}$ y $E = \{(x, y) \mid A_2x + B_2y + C_2 = 0\}$ lo que queremos encontrar es la intersección de D y E es decir,

$$D \cap E = \{(x, y) \mid A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ y } A_2x + B_2y + C_2 = 0\}$$

Como ya sabemos, la gráfica de toda ecuación lineal es una línea recta, así que se pueden presentar tres casos diferentes cuando tenemos dos ecuaciones lineales y se busca el conjunto solución que satisfaga a ambas ecuaciones. A continuación presentamos estos tres casos:

a) Dos rectas que se intersecan en un solo punto, es decir hay una solución única. Tomemos como ejemplo las ecuaciones:

$$x + y - 2 = 0$$
$$x - y - 4 = 0$$

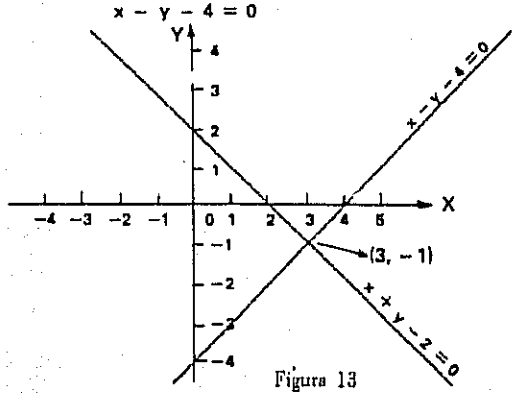


Figura 13

Se pude comprobar fácilmente que el par ordenado (3, −1) satisface simultáneamente ambas ecuaciones por lo que tenemos que

$$\{(x, y) \mid x + y - 2 = 0 \text{ y } x - y - 4 = 0\} = \{(3, -1)\}$$

b) Dos rectas paralelas* pero no coincidentes, es decir el conjunto solución es vacío.
Tomemos como ejemplo las ecuaciones:

$$x - y - 2 = 0$$
$$x - y + 2 = 0$$

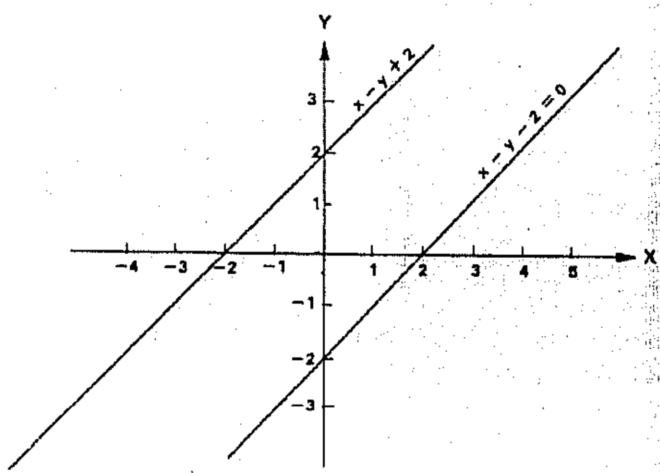


Figura 14

c) Dos rectas coincidentes**, es decir, tienen un número infinito de soluciones. Tomemos como ejemplo las ecuaciones:

* Recuerda que dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente, $(m = -\frac{A}{B})$ a un sistema de este tipo se le llama inconsistente.

** Dos rectas son coincidentes si la ecuación de una de ellas multiplicada por una constante K, es igual a la ecuación de la otra. $2(2x + y - 4) = 4x + 2y - 8$.

$$2x + y - 4 = 0$$
$$4x + 2y - 8 = 0$$

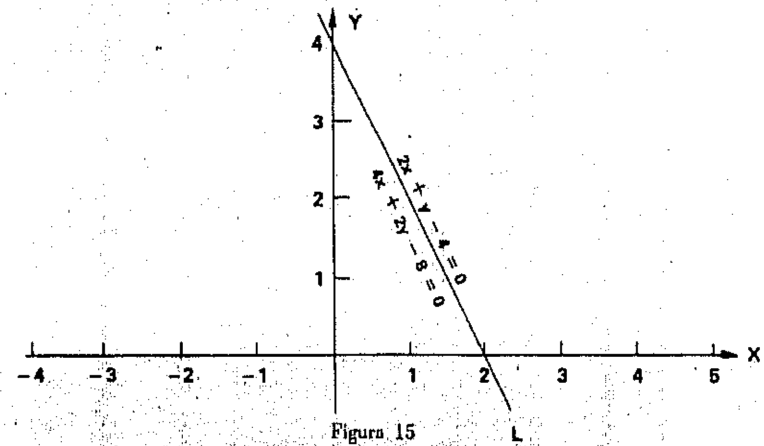


Figura 15

En este caso la gráfica de ambas ecuaciones es la misma L por lo que el conjunto solución de una es exactamente igual al conjunto solución de la otra.

$$\{(x, y) \mid 2x + y - 4 = 0 \text{ y } 4x + 2y - 8 = 0\} = L \cap L = L$$

2.2 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Método de solución de ecuaciones.

Varios son los métodos que se usan para resolver **sistemas de ecuaciones lineales** con dos o más variables; empezaremos por los sistemas con dos variables y nos concretaremos a los métodos, **gráfico, por suma o resta y por sustitución,** describiendo a continuación cada uno de ellos haciendo uso de ejemplos.

2.21 Método gráfico.

Al usar este método es importante que recuerdes que la gráfica de una recta queda determinada si conocemos dos puntos de la misma.

Se quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x + 2y - 6 = 0$$
$$x - 2y - 10 = 0$$

Como viste al principio de este párrafo, dos puntos nos determinan una recta así que encontramos dos puntos para cada una de ellas; desde luego que estos puntos se podrían determinar por el método de tabulación que tú ya conoces. Encontraremos la intersección de cada recta con los ejes de coordenadas por ser estos puntos los que con mayor facilidad podemos determinar. Procedemos de la siguiente forma:

En la ecuación $3x + 2y - 6 = 0$

tenemos que cuando

$x = 0$ entonces $y = 3$

y cuando $y = 0$ entonces $x = 2$

por lo que los puntos de intersección con los ejes coordenados son (0,3) y (2,0)

Análogamente, en la ecuación

$$x - 2y - 10 = 0$$

tenemos que, cuando

$$x = 0 \qquad y = -5$$
$$x = 10 \qquad y = 0$$

Ahora graficamos las dos rectas en un sistema de coordenadas rectangulares haciendo uso de los puntos obtenidos.

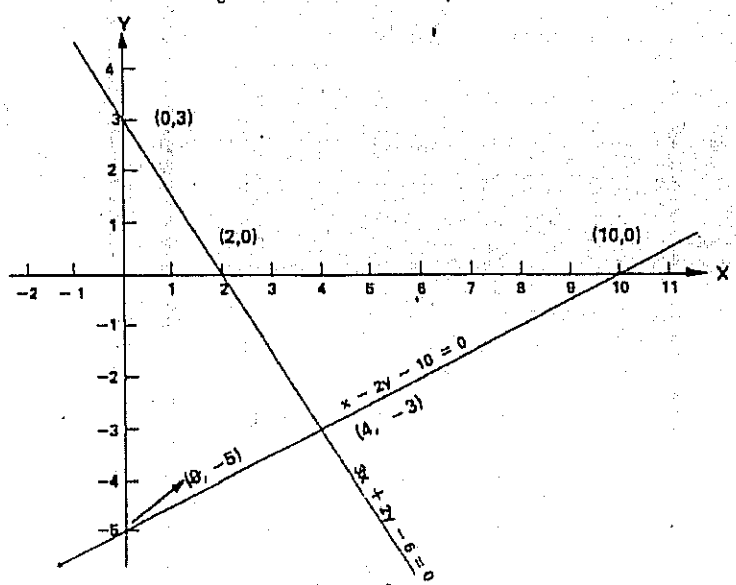


Figura 16

Podemos ver en la figura que el punto de intersección de las dos rectas es el punto (4, −3) que es la solución del sistema, ya que satisface ambas ecuaciones como lo comprobaremos sustituyendo

$$x = 4 \quad y \quad y = -3$$

En cada una de las ecuaciones:

en la primera ecuación: $3(4) + 2(-3) - 6 = 12 - 6 - 6 = 0$

en la segunda ecuación: $4 - 2(-3) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$

Podemos hacer algunas consideraciones acerca del método gráfico.

a) Por lo común, la solución es aproximada ya que el punto de intersección de las dos rectas se localiza a partir de la gráfica.

b) Para que la gráfica de las rectas sea más exacta es necesario usar papel milimétrico y tener mucho cuidado para localizar los puntos donde las rectas intersecan a los ejes de coordenadas.

2.22 Método por Suma o Resta

En este método, es importante que recuerdes las propiedades de multiplicación y adición de las igualdades, así como los postulados de campo ya que usaremos algunos de ellos.

Resolver el sistema

$$3x + 2y = 5 \qquad (1)$$
$$x + 3y = 4 \qquad (2)$$

Si sumamos o restamos a una ecuación k veces, obtenemos. . .

Nota que hemos escrito cada ecuación en la forma equivalente $Ax + By = -C$, y se han numerado las dos ecuaciones.

Este método consiste en eliminar una de las dos incógnitas sumándole o restándole a una ecuación k veces la otra, con lo que obtenemos una ecuación con una variable la cual ya sabes resolver. Obtenido el valor de esta variable lo sustituimos en una de las dos ecuaciones originales para determinar el valor de la otra.

Como se puede eliminar cualquiera de las dos variables en el sistema que estamos considerando, vamos a eliminar la y, procediendo como sigue:

Se multiplica la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por −2 con el objeto de que los coeficientes de las y queden iguales y de signo contrario, después se suman las dos nuevas ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl} 9x + 6y & = & 15 \\ -\ \underline{2x - 6y} & \underline{=} & \underline{-8} \\ 7x & = & 7 \end{array}$$

se sumaron las dos ecuaciones

$$7x \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7}$$

multiplicando ambos lados por $\frac{1}{7}$,

finalmente $x = 1$ (¿Qué postulados de campo se usaron para llegar a la solución?)

Ahora sustituimos el valor $x = 1$ en la ecuación (1) ó (2) para encontrar el valor de y.
Si lo hacemos en la (2) tenemos

$$1 + 3y = 4$$

Sumando -1 a ambos lados

$$3y = 3$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$ ambos lados.

$$y = 1$$

por lo tanto, la solución del sistema es el par ordenado (1,1).

Como práctica, sustituye al punto (1,1) en ambas ecuaciones para que compruebes que las satisface.

Usaremos este mismo método para resolver el sistema de dos ecuaciones generales:

$$A_1x + B_1y = C_1 \qquad (1)$$
$$A_2x + B_2y = C_2 \qquad (2)$$

Eliminamos primeramente la x multiplicando la ecuación (1) por A_2 y la ecuación (2) por $-A_1$

$$A_1A_2x + A_2B_1y = A_2C_1$$
$$-A_1A_2x - A_1B_2y = -A_1C_2$$

Sumando estas dos ecuaciones, tenemos

$$A_2B_1y - A_1B_2y = A_2C_1 - A_1C_2$$

Usando la propiedad distributiva por la derecha se obtiene

$$(A_2B_1 - A_1B_2)y = A_2C_1 - A_1C_2$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre
$(A_2B_1 - A_1B_2) \neq 0$ obtenemos finalmente el valor

$$y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_2B_1 - A_1B_2}$$

obtén el valor de x que es igual a

$$\frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Si $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ entonces $\frac{-A_2}{B_2} = \frac{-A_1}{B_1}$ ya que $-\frac{A_1}{B_1}$ y $-\frac{A_2}{B_2}$ representan las pendientes de las dos rectas y siendo $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ concluimos que las dos rectas son paralelas y por lo tanto, no se intersectan.

2.23 Método de sustitución

Este método consiste en resolver para una de las variables una de las ecuaciones y sustituir esta expresión en la otra quedándonos con esto una ecuación con una variable, que tú ya sabes cómo encontrar su solución.

Usaremos este método para resolver el siguiente sistema:

$$2x + 3y = 7 \qquad (1)$$
$$3x - 2y = 4 \qquad (2)$$

Usamos la ecuación (1) para despejar la y, aunque también podíamos haber despejado la x.

$$2x + 3y = 7 \qquad (1)$$
$$3y = 7 - 2x \quad \text{sumando a ambos lados } -2x.$$
$$y = \frac{7 - 2x}{3} \quad \text{multiplicando ambos lados por } \frac{1}{3}$$

El valor de la y que hemos obtenido de la ecuación (1) se sustituye en la ecuación (2).

$$3x - 2\left(\frac{7 - 2x}{3}\right) = 4$$

Efectuando operaciones, nos queda

$$3x - \frac{14 - 4x}{3} = 4$$

$9x - 14 + 4x = 12$	Se multiplicó por 3 a ambos lados de la ecuación
$13x - 14 = 12$	Se sumaron los términos en x
$13x = 26$	Se sumó a ambos lados 14
$x = 2$	Se multiplicó a ambos lados por $\frac{1}{13}$

Obtenido el valor de la x, se sustituye en la ecuación $y = \frac{7 - 2x}{3}$ quedando: $y = \frac{7 - 2 \cdot 2}{3} = \frac{7 - 4}{3} = \frac{3}{3} = 1$

por lo que la solución del sistema es el par ordenado (2,1).

Comprueba que el punto (2,1) satisface las ecuaciones (1) y (2).

En seguida presentamos varios ejemplos que te ayudarán a comprender mejor los diferentes métodos que hemos estudiado, dándole énfasis a los dos métodos algebraicos que son los más frecuentemente usados.

Ejemplo: Resolver gráficamente el sistema

$$2x - y = 4 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 5 \qquad (2)$$

Encontramos primero las intersecciones de cada una de las rectas con los ejes de coordenadas.

Para la ecuación (1) tenemos que cuando

$$x = 0 \qquad y = -4$$
$$x = 2 \qquad y = 0$$

Para la ecuación (2) tenemos que cuando

$$x = 0 \qquad y = \frac{5}{2}$$
$$x = 5 \qquad y = 0$$

En seguida usamos estos puntos para trazar las rectas

De la gráfica la solución aproximada al sistema es el par ordenado (2.5, 1.1). La solución exacta es el par ordenado (2.6, 1.2) que puedes encontrar usando cualquier método algebraico.

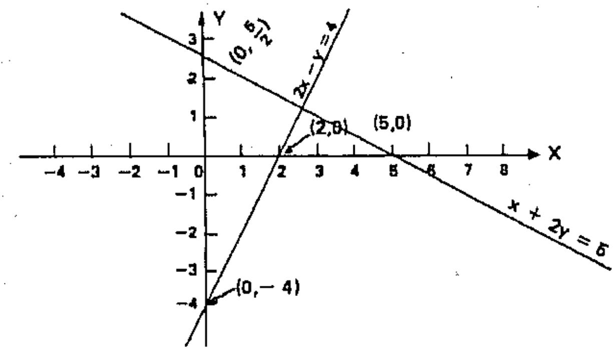


Figura 17

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema usando el **método de suma o resta.**

$$4x + 5y = 12 \qquad (1)$$
$$3x + 2y = 6 \qquad (2)$$

Eliminamos la x multiplicando por 3 la ecuación (1) por −4 la ecuación (2) y sumamos

$$\begin{array}{rcr} 12x + 15y &=& 36 \\ -12x - 8y &=& -24 \\ \hline 7y &=& 12 \end{array}$$

Multiplicando por $\frac{1}{7}$ ambos lados queda

$$y = \frac{12}{7}$$

Sustituimos este valor en la ecuación (1)

$$4x + 5\left(\frac{12}{7}\right) = 12$$

$4x + \frac{60}{7} = 12$	efectuando
$4x = 12 - \frac{60}{7}$	Sumando $-\frac{60}{7}$ a ambos lados de la ecuación
$4x = \frac{84 - 60}{7}$	efectuando

$4x = \frac{24}{7}$ efectuando

$x = \frac{24}{7 \cdot 4}$ multiplicando por $\frac{1}{4}$ a ambos lados de la ecuación

$x = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 4}$ descomponiendo en factores

$x = \frac{6}{7}$ por cancelación

de donde la solución es $\{(\frac{6}{7}, \frac{12}{7})\}$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema por el **método de sustitución**

$$x + 3y = 4 \qquad (1)$$
$$2x - y = -3 \qquad (2)$$

Despejamos x de la ecuación (1)

$$x = 4 - 3y \qquad (3)$$

Sustituimos este valor en la ecuación (2)

$2(4 - 3y) - y = -3$

$8 - 6y - y = -3$ distributiva izquierda

$-7y = -3 - 8$ se sumó -8 a ambos lados y se sumaron términos semejantes

$-7y = -11$ cerradura

$y = \frac{11}{7}$ se multiplicó por $-\frac{1}{7}$ a ambos lados

Sustituímos el valor de y en la ecuación (3) y nos queda

$$x = 4 - 3\left(\frac{11}{7}\right)$$
$$x = 4 - \frac{33}{7}$$
$$x = \frac{28 - 33}{7}$$
$$x = \frac{-5}{7}$$

Solución $= \left\{\left(\frac{-5}{7}, \frac{11}{7}\right)\right\}$

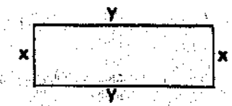
Ejemplo:

El perímetro de un rectángulo mide 26 metros y uno de sus

lados es 3 metros más largo que el otro. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Este es un ejemplo de un problema de planteo que podemos resolver por medio de un **sistema de ecuaciones**. Procedemos de la siguiente manera: Como lo que nos piden son las dimensiones del rectángulo le llamaremos:

x = Longitud del lado menor
y = Longitud del lado mayor



La primera ecuación a que podemos llegar es tomando el dato del perímetro y nos queda

$$2x + 2y = 26 \qquad (1)$$

como sabemos que un lado es 3 metros más largo que el otro, la ecuación resultante será

$$y = x + 3 \qquad (2)$$

en este caso, como ya tenemos despejada la y en la ecuación (2) nos conviene usar el método de sustitución.

Sustituyendo en la ecuación (1) el valor $y = x + 3$, tenemos

$$2x + 2(x + 3) = 26$$

efectuando

$$2x + 2x + 6 = 26$$
$$4x + 6 = 26$$
$$4x = 20$$
$$x = 5$$

sustituimos en la ecuación (2)

$$-5 + y = 3$$
$$y = 8$$

Luego, las dimensiones del rectángulo son

x lado menor = 5 metros
y lado mayor = 8 metros

Ejemplo:

Resolver por cualquier método el siguiente sistema

$$\frac{x + 2y}{3} - \frac{2x + y}{4} = 2 \qquad (1)$$
$$\frac{x - y}{2} + \frac{x + y}{3} = 3 \qquad (2)$$

En este caso tenemos un sistema formado de ecuaciones con fracciones por lo que primero simplificamos ambas ecuaciones eliminando las fracciones. Para hacer esto, multiplicamos la primera ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones en la primera ecuación que son 3 y 4, o sea 12 y la segunda por el mínimo común múltiplo de 2 y 3 ó sea 6 quedando la primera ecuación.

$$4(x + 2y) - 3(2x + y) = 2 \cdot 12$$

efectuando

$$4x + 8y - 6x - 3y = 24$$

Reduciendo términos semejantes

$$-2x + 5y = 24 \qquad (3)$$

la segunda ecuación queda simplificada a

$$3(x - y) + 2(x + y) = 3 \cdot 6$$

efectuando

$$3x - 3y + 2x + 2y = 18$$

Reduciendo términos semejantes

$$5x - y = 18 \qquad (4)$$

resolviendo para y de la ecuación (4) tenemos

$$y = 5x - 18 \qquad (5)$$

sustituyendo este valor en (3) queda

$$-2x + 5(5x - 18) = 24$$

efectuando

$$-2x + 25x - 90 = 24$$
$$23x - 90 = 24$$
$$23x = 24 + 90$$
$$23x = 114$$
$$x = \frac{114}{23}$$

sustituyendo este valor en la ecuación (5) nos queda

$$y = 5\left(\frac{114}{23}\right) - 18$$
$$= \frac{570}{23} - 18$$
$$= \frac{570 - 414}{23}$$
$$= \frac{156}{23}$$

por lo que la solución del sistema es $\left\{\left(\frac{114}{23}, \frac{156}{23}\right)\right\}$

Ejemplo:

Resolver el sistema*

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \qquad (1)$$

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 2 \qquad (2)$$

Eliminamos el término de las y multiplicando la ecuación (1) por 3 y la (2) por 2.

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 12$$
$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} = 4$$

$\frac{3}{x} + \frac{4}{x} = 12 + 4$ propiedad aditiva de las igualdades

$\frac{7}{x} = 16$ cerradura para la suma

$7 = 16x$ multiplicando por x ambos lados de la ecuación, $x \neq 0$

$x = \frac{7}{16}$ multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{16}$ y propiedad de simetría.

Sustituimos el valor de la $x = \frac{7}{16}$ en la ecuación (1), quedando

$$\frac{1}{\frac{7}{16}} + \frac{2}{y} = 4$$

$$\frac{16}{7} + \frac{2}{y} = 4$$

* En sistemas de este tipo no conviene quitar denominadores ya que quedarían términos en xy lo que nos complicaría la resolución del sistema.

$$\frac{2}{y} = 4 - \frac{16}{7}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{28 - 16}{7}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{12}{7}$$

$$y = \frac{14}{12}$$

$$y = \frac{7}{6}$$

La solución es $\{(\frac{7}{16}, \frac{7}{6})\}$

Justifica cada uno de los pasos anteriores.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método gráfico. De preferencia usa papel milimétrico. Di en cada ejercicio si el sistema está formado por rectas que se intersecan, rectas paralelas o rectas coincidentes.

a) $2x - y = 5$; $x + 3y = -1$

b) $3x + 2y = 8$; $6x + 4y = 10$

c) $4x + y = -10$; $x + 5y = 7$

d) $x + 5y = 12$; $2x + 10y = 24$

e) $x - 4y = 6$; $2x - 8y = -8$

f) $-x + 5y = -18$; $3x - y = 12$

g) $3x - 4y = 4$; $5x - 2y = 9$

h) $2x + 8y = -2$; $x + 4y = -1$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método de suma o resta.

a) $x + y = 6$; $2x - y = 1$

b) $x - 3y = 1$; $x - 2y = 0$

c) $x + y = -1$; $3x - y = 3$

d) $3x + 2y = 2$; $x - y = 9$

e) $3x - 5y = 5$; $7x + y = 75$

f) $3x - y = 1$; $2x + 5y = 41$

g) $x + ay = b$; $2x - by = a$

h) $x + 3y = 3$; $3x - y = 1$

i) $2x - 4y = 3$; $x + 5y = 4$

j) $2x - 5y = 6$; $2x - 5y = 9$

k) $x + y = 7$; $3x + 3y = 21$

l) $3x + 5y = 4$; $4x + 2y = 3$

m) $-2x - 3y = 13$; $-3x + 2y = 0$

n) $2x + 2y = 5$; $3x - 4y = -2$

o) $-x - y = -3$; $2x + 3y = 5$

p) $3x + y = 7$; $2x - 3y = 12$

q) $2x + 4y = 3$; $x - 2y = 1$

r) $3x - 2y = 6$; $3x - 2y = -6$

s) $x + 2y = 4$; $5x - 2y = 2$

t) $2x + 3y = 1$; $4x + 3y = -4$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método de sustitución.

a) $x - 2y = 4$; $2x + y = 2$

b) $x + 2y = 5$; $3x - y = 1$

c) $3x - 4y = -2$; $x + 2y = -4$

d) $x - 3y = -6$; $2x - 3y = -3$

e) $2x - 3y = 7$; $4x - 6y = 12$

f) $-x + y = -1$; $2x + 4y = -1$

g) $4x + 3y = -1$; $2x - y = 7$

h) $5x + 4y = -17$; $3x - 2y = 3$

i) $6x + 5y = 5$; $4x + 3y = 1$

j) $2x + 6y = 3$; $4x + 12y = 6$

k) $3x + 8y = 1$; $2x + 7y = 4$

l) $x - y = 5$; $4x + 2y = -2$

m) $2x - y = 7$; $3x + 2y = 0$

n) $5x + 4y = 14$; $-5x - 4y = 14$

o) $x + 2y = 3$
$12x - 18y = 1$

p) $3x + 4y = 5$
$24x - 36y = -11$

q) $2x - 4y = -5$
$4x + 2y = 5$

r) $3x - 5y = -10$
$4x - 3y = 16$

s) $-3x + 5y = 11$
$2x + 3y = -1$

t) $2x + 7y = 9$
$3x - 2y = 1$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método que más convenga.

a) $\frac{x+y}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$
$x - y = 3$

b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{3}{2}$
$x - 2y = -5$

c) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = -\frac{1}{10}$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

d) $\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}$
$\frac{2x}{3} - \frac{x+y}{4} = -\frac{1}{12}$

e) $\frac{x+2y}{2} + \frac{2x-y}{4} = \frac{15}{4}$
$x + 3y = 6$

f) $\frac{2x-y+1}{x-y+2} = 3$
$x + 2y = 1$

g) $\frac{5x+4y-3}{9x-y+5} + \frac{3}{4} = 0$
$\frac{2x-3y+3}{5x-4y+6} = \frac{2}{3}$

h) $\frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = -\frac{27}{5}$
$3x + 17y = 8$

i) $\frac{x+2y}{5} - \frac{x-y}{2} = \frac{6}{5}$
$\frac{x-2y}{3} + \frac{x-y}{2} = -\frac{2}{3}$

j) $\frac{4x}{5} - \frac{3y}{2} = \frac{4}{5}$
$\frac{3x-y}{2} + \frac{4y}{7} = \frac{3}{2}$

k) $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1$
$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = -1$

l) $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 10$
$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 8$

m) $\frac{9}{x} - \frac{3}{y} = 1$
$\frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 3$

n) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$
$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$

o) $\frac{1}{4x} + \frac{7}{2y} = \frac{5}{4}$
$\frac{1}{2x} - \frac{3}{y} = -\frac{5}{14}$

p) $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1$
$\frac{7}{x} + \frac{11}{y} = 1$

q) $\frac{2}{3x} + \frac{3}{5y} = 7$
$\frac{7}{2x} - \frac{5}{3y} = \frac{38}{3}$

r) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{7}{6}$
$\frac{3}{2x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

s) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

t) $\frac{2}{3x} - \frac{5}{4y} = -\frac{5}{8}$
$\frac{3}{4x} + \frac{6}{7y} = \frac{3}{7}$

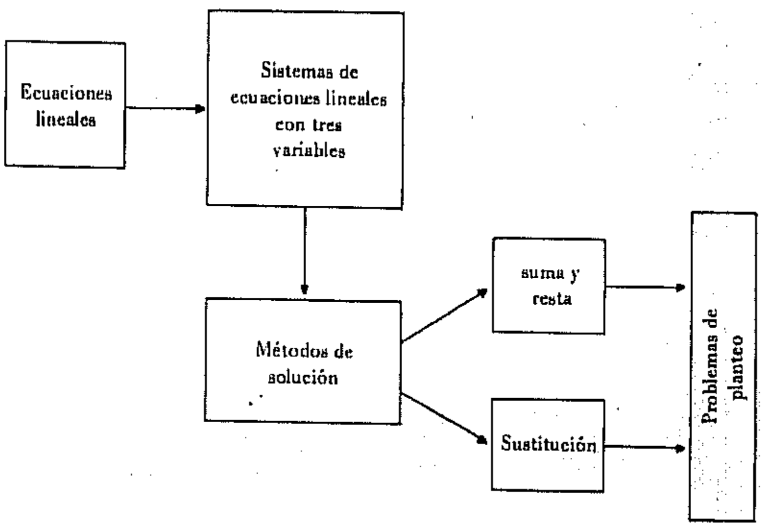
Módulo 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará en que consiste un sistema de ecuaciones lineales con tres variables.
2. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales en tres variables mediante el método de suma o resta.
3. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con tres variables mediante el método por sustitución.

ESQUEMA-RESUMEN



3.1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

¿Cuál es el proceso algebraico para la solución de ecuaciones?

Los métodos de suma o resta y de sustitución que hemos usado para resolver sistemas de ecuaciones con dos variables, nos servirán también para resolver sistemas de ecuaciones con tres o más variables. Cuando el sistema tiene más de tres variables, el uso de estos métodos para su solución es un poco tedioso por lo que después aprenderás otros métodos.

Dado que la interpretación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, requiere de un sistema de coordenadas en tres dimensiones, tema que estudiarás posteriormente. Nos concretamos en este punto al proceso algebraico que conduce a la solución del sistema y que será una terna ordenada (x, y, z).

El proceso consiste en reducir el sistema de 3 ecuaciones a un sistema de 2 ecuaciones mediante la eliminación de una de las tres variables, proceso en el que deben intervenir las tres ecuaciones.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema por el método de suma o resta:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \qquad (1)\\ x + 2y + z &= 2 \qquad (2)\\ -5x + 2y - 3z &= -2 \qquad (3)\end{aligned}$$

Elimnamos la z tomando las ecuaciones (1) y (2) y la (2) y (3) restando de la ecuación (1) la ecuación (2).

$$\begin{array}{r} 2x - 3y + z = -1\\ \underline{x + 2y + z = 2}\\ x - 5y \quad = -3 \end{array} \qquad (4)$$

Muliplicamos por 3 la ecuación (2) y le sumamos la ecuación (3)

$$\begin{array}{r} 3x + 6y + 3z = 6\\ \underline{-5x + 2y - 3z = -2}\\ -2x + 8y \quad = 4 \end{array} \qquad (5)$$

tomando las ecuaciones (4) y (5). Multiplicamos por 2 la ecuación (4) y le sumamos la ecuación (5)

$$\begin{array}{r} 2x - 10y = -6\\ \underline{-2x + 8y = 4}\\ -2y = -2\\ y = 1 \end{array}$$

Sustituimos este valor en la ecuación (4)

$$x - 5(1) = -3$$
$$x - 5 = -3$$
$$x = 2$$

Sustituimos los valores de **x** y **y** que hemos obtenido, en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de **z** (lo hacemos en la ecuación (1)).

$$2(2) - 3(1) + z = -1$$
$$4 - 3 + z = -1$$
$$z = -1 - 4 + 3$$
$$z = -2$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 2,\ y = 1,\ z = -2.$

Comprueba que estos valores satisfacen las ecuaciones (2) y (3) sustituyéndolos en ellas.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema por el **método de sustitución.**

$$x - 2y + 2z = 1 \qquad (1)$$
$$2x - 3y - z = -11 \qquad (2)$$
$$3x + 2y + z = 4 \qquad (3)$$

Resolviendo para **z** la ecuación (3)

$$z = 4 - 3x - 2y \qquad (4)$$

y sustituimos en las ecuaciones (1) y (2).

En la ecuación (1)

$$x - 2y + 2(4 - 3x - 2y) = 1$$
$$x - 2y + 8 - 6x - 4y = 1$$
$$-5x - 6y = -7 \qquad (5)$$

En la ecuación (2)

$$2x - 3y - (4 - 3x - 2y) = -11$$
$$2x - 3y - 4 + 3x + 2y = -11$$
$$5x - y = -7 \qquad (6)$$

Resolviendo para la ecuación (6)

$$y = 5x + 7 \qquad (7)$$

y sustituimos en la ecuación (5)

$$-5x - 6(5x + 7) = -7$$
$$-5x - 30x - 42 = -7$$
$$-35x = 35$$
$$x = -1$$

Sustituimos **x** por -1 en la ecuación (7)

$$y = 5(-1) + 7$$
$$y = -5 + 7$$
$$y = 2$$

Sustituimos **x** por -1 y **y** por 2 en cualquiera de las ecuaciones originales (lo hacemos en la (3)).

$$3(-1) + 2(2) + z = 4$$
$$-3 + 4 + z = 4$$
$$z = 3$$

Por lo tanto la solución del sistema es

$$x = -1,\ y = 2 \text{ y } z = 3.$$

Ejemplo:

Un equipo está formado por 60 jugadores de las escuelas Preparatoria, Agronomía y Economía. Hay diez alumnos menos de Economía que la suma de los de Preparatoria y Agronomía y el número de alumnos de las escuelas de Agronomía y Economía es el doble del número de alumnos de la escuela Preparatoria. ¿Cuántos alumnos hay de cada escuela?

Representamos por medio de una incógnita lo que nos preguntan:

$x =$ número de jugadores de la escuela Preparatoria
$y =$ número de jugadores de la escuela de Agronomía
$z =$ número de jugadores de la escuela de Economía

Con los datos que nos proporciona el problema, es necesario formar tres ecuaciones ya que tenemos tres incógnitas y lo hacemos de la siguiente forma:

$x + y + z = 60$ El total de jugadores formado por las tres escuelas es 60.

$x + y - 10 = z$ Sumamos los de Preparatoria y Agronomía y le restamos 10 para poder igualarlos con los de Economía.

$y + z = 2x$ Los de Agronomía y Economía son el doble de los de Preparatoria.

Escribimos las tres ecuaciones encontradas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 60 \qquad (1)\\ x + y - z &= 10 \qquad (2)\\ -2x + y + z &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema usando el método de suma o resta:

A la ecuación (1) le sumamos la ecuación (2) para eliminar **z**.

$$\begin{array}{r} x + y + z = 60\\ \underline{x + y - z = 10}\\ 2x + 2y \quad = 70 \end{array} \qquad (4)$$

A la ecuación (2) le sumamos la ecuación (3) para eliminar también z

$$\begin{array}{r} x + y - z = 10\\ \underline{-2x + y + z = 0}\\ -x + 2y \quad = 10 \end{array} \qquad (5)$$

Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la ecuación (4) y le sumamos la ecuación (5)

$$\begin{array}{r} x + y = 35\\ \underline{-x + 2y = 10}\\ 3y = 45\\ y = 15 \end{array}$$

Sustituimos este valor en la ecuación (4)

$$\begin{aligned} 2x + 2(15) &= 70\\ 2x + 30 &= 70\\ 2x &= 70 - 30\\ 2x &= 40\\ x &= 20 \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de $y = 15$ y $x = 20$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 20 + 15 + z &= 60\\ 35 + z &= 60\\ z &= 60 - 35\\ z &= 25 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución al problema es:

Número de jugadores de Preparatoria = **20**

Número de jugadores de Agronomía = **15**

Número de jugadores de Economía = **25**

Ideas para un problema de planteo.

Antes de resolver un problema de planteo, no olvides lo siguiente, ya que te será muy útil para que puedas llegar a su solución:

1. Leer cuidadosamente el problema hasta estar seguro de haberlo entendido perfectamente.
2. Representar por medio de incógnitas lo que se pide.
3. Identificar qué datos se conocen en el problema.
4. Relacionar los datos conocidos con las incógnitas por medio de ecuaciones.
5. Resolver el sistema de ecuaciones a que se ha llegado usando algunos de los métodos conocidos.
6. Comprobar la solución.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con tres variables usando cualquier método.

a) $2x + 3y - 4z = 1$
$3x - y - 2z = 4$
$4x - 7y - 6z = -7$

b) $x + y + z = 3$
$2x + y - z = -6$
$3x - y + z = 11$

c) $4x + 4y - 3z = 3$
$2x + 3y + 2z = -4$
$3x - y + 4z = 4$

d) $3x + y + 4z = 6$
$2x - 3y - 5z = 2$
$3x - 4y + 3z = 8$

e) $2x - 3y - 3z = 9$
$x + 3y + 2z = 3$
$3x - 4y - z = 4$

f) $4x - 3y + 3z = 8$
$2x + 3y + 24z = 1$
$6x - y + 6z = -1$

g) $6x + 2y + 4z = 2$
$4x - y + 2z = -3$
$7x - 2y - 3z = 5$

h) $x - 5y + 3z = 9$
$2x - y + 4z = 6$
$3x - 2y + z = 2$

i) $2x + 2y + 3z = 2$
$3x - y - 6z = 4$
$8x + 4y + 3z = 8$

j) $x + 3y - 2z = 2$
$2x - 3y + 3z = 11$
$3x + 2y + 2z = 14$

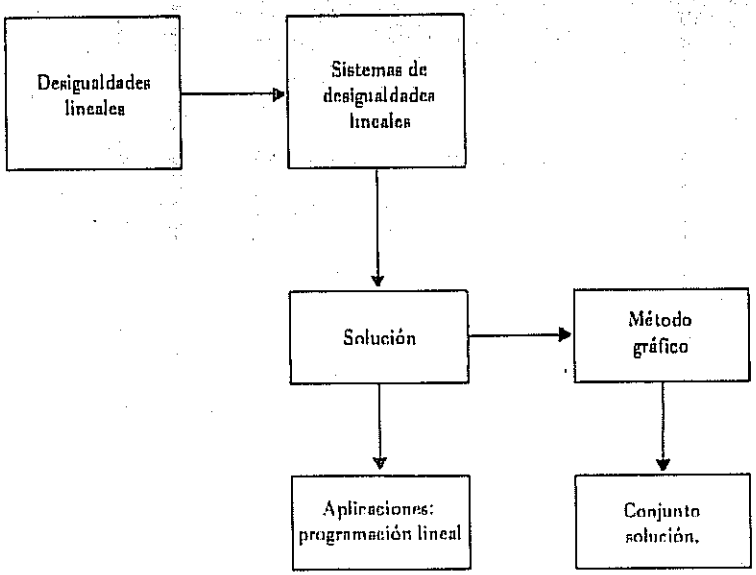
Módulo 4

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo el alumno:

1. Explicará en que consiste una desigualdad lineal.
2. Graficará desigualdades en el plano cartesiano.
3. Explicará en que consiste un sistema de desigualdades lineales con dos incógnitas.
4. Resolverá sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas utilizando el método gráfico
5. Resolverá problemas de planteo con sistemas de desigualdades lineales mediante el método gráfico.

ESQUEMA RESUMEN



4.1 Sistema de desigualdades lineales con dos variables

Una desigualdad lineal es. . .

A un sistema de dos o más desigualdades de la forma $Ax + By + C \geq 0$ ó $Ax + By + C \leq 0$ ó cualquier forma equivalente donde $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ y $A, B, C \in R$ se le llama un sistema de **desigualdades lineales** con dos variables. La solución de este sistema puede encontrarse por varios métodos; sin embargo, nosotros usaremos sólo el **método gráfico.** Recuerda que la gráfica de una desigualdad son todos los puntos localizados en la mitad de un plano y por lo tanto, la gráfica de un sistema de desigualdades es la intersección de las dos mitades de planos que representan las gráficas de cada una de las **desigualdades lineales.**

También es necesario que recuerdes todos los postulados y teoremas de orden, ya que te serán útiles para comprender el **método gráfico** que aquí usaremos. Vamos primero a construir las gráficas de algunas **desigualdades lineales** y en todas ellas, primero, escribimos la **desigualdad lineal** en la forma equivalente a que se llega resolviendo para y. En caso de que no tengamos y será la x la que dejaremos sola en un lado de la desigualdad.

Ejemplo:

Graficar $x + y - 2 < 0$; resolviendo primero para la y sumándole a ambos lados de la desigualdad los inversos aditivos de x y de -2, nos queda

$$y < -x + 2$$

Ahora, graficamos la recta $y = -x + 2$ que es la que divide al plano Cartesiano en dos semiplanos; para ello encontraremos la intersecciones de la recta con los ejes de coordenadas, cuando

$$x = 0 \qquad y = 2$$
$$x = 2 \qquad y = 0$$

(ver figura 18)

Las coordenadas de todos los puntos que quedan debajo de la recta, satisfacen la desigualdad (prueba algunas de ellas) por lo que la gráfica del conjunto solución es el semiplano que queda localizado debajo de la recta.

Ejemplo:

Graficar $x + y - 2 > 0$ (esta desigualdad difiere de la anterior sólo en que es $>$ en lugar de $<$). Resolviendo para y nos queda

$$y > -x + 2.$$

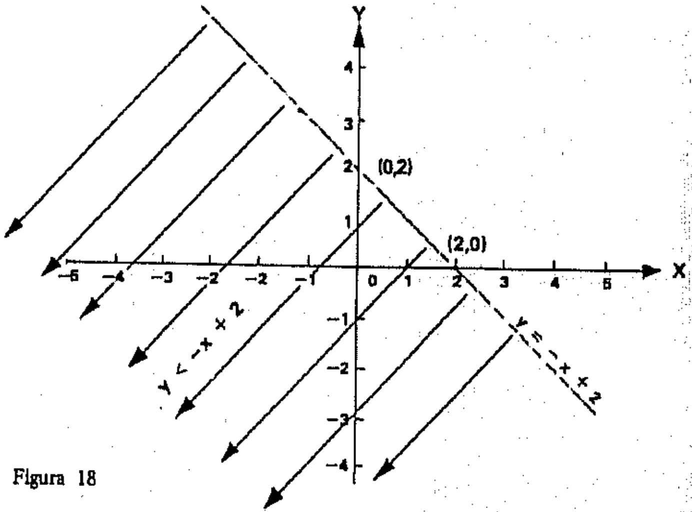


Figura 18

Figura 18

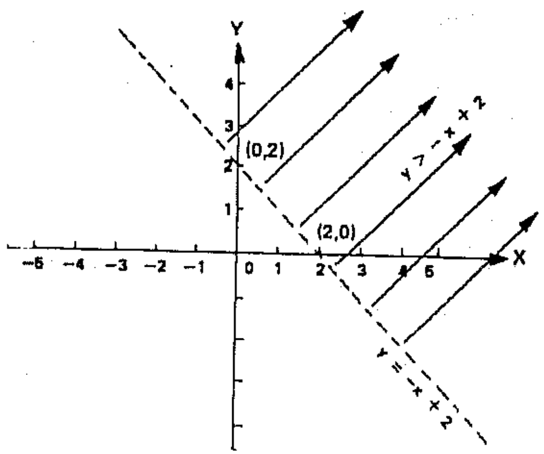


Figura 19

Todos los pares ordenados cuya gráfica queda arriba de la recta, satisfacen la desigualdad por lo que la gráfica del conjunto solución es el semiplano localizado arriba de la recta. (Ver figura 19)

Ejemplo:

Graficar la desigualdad $x > 2$.

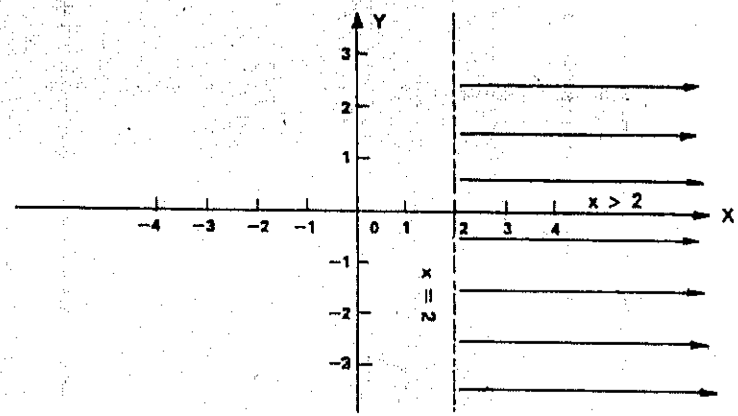


Figura 20

El conjunto solución es: Todos los pares ordenados cuya figura es el semiplano localizado a la derecha de la recta $x = 2$.

Ya habiendo aprendido cómo se grafica una desigualdad, resolveremos ahora algunos ejemplos de sistemas de **desigualdades lineales** con dos variables. Para mostrar la solución del sistema, graficamos las desigualdades que lo forman sobre un mismo sistema de coordenadas, siendo la solución la intersección de los conjuntos solución de cada una de ellas como ya lo habíamos dicho anteriormente.

Ejemplo:

Resolver el sistema de **desigualdades lineales**.

$$x - 2y + 4 > 0 \qquad (1)$$
$$2x + y - 2 < 0 \qquad (2)$$

Transformamos primero cada una de las desigualdades a otra equivalente resolviendo para y Para la desigualdad (1) tenemos que

$$y < \frac{1}{2}x + 2 \qquad \text{¿por qué?}$$

Para la desigualdad (2) tenemos que

$$y < -2x + 2 \qquad \text{¿por qué?}$$

Ahora, graficamos las dos desigualdades en un mismo sistema de ejes coordenados y nos queda la siguiente figura.

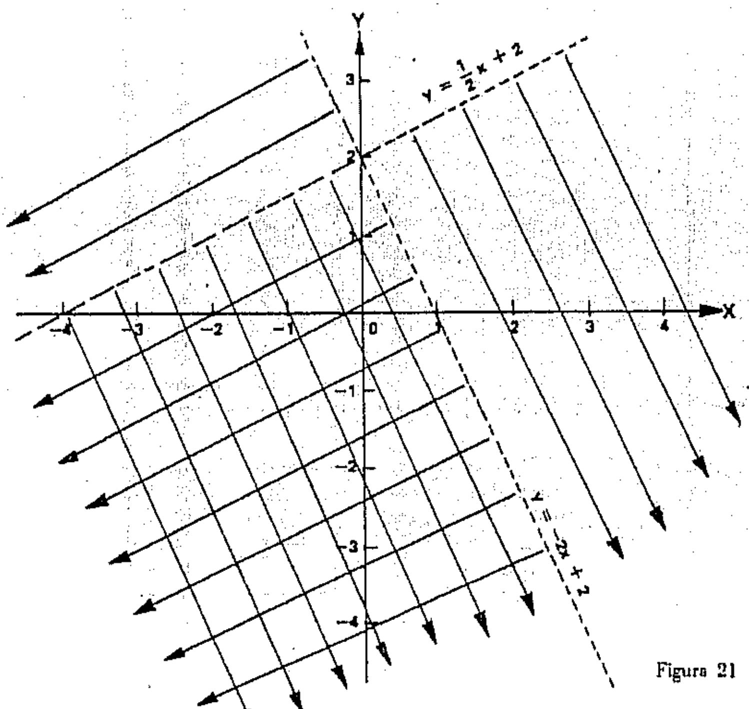


Figura 21

Conjunto solución para la desigualdad $y < \frac{1}{2}x + 2$

Conjunto solución para la desigualdad $y < -2x + 2$

Conjunto solución para el sistema

Ejemplo:
Resolver el siguiente sistema.

$$x > 4$$
$$x + y + 2 > 0$$
$$-x + y - 3 < 0$$

Transformamos el sistema al siguiente que es equivalente

$$x > 4$$
$$y > -x - 2 \quad \text{¿Por qué?}$$
$$y < x + 3$$

Graficamos las tres desigualdades

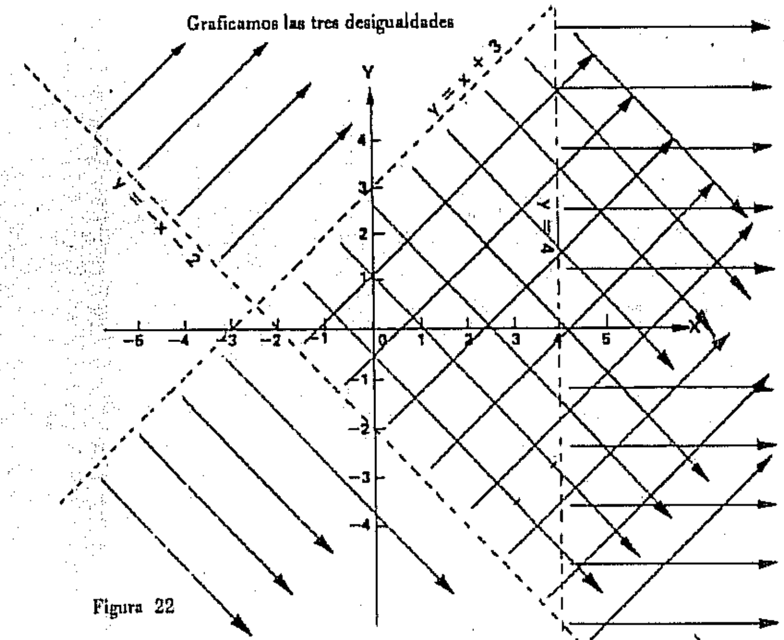


Figura 22

Conjunto solución para la desigualdad $x > 4$

Conjunto solución para la desigualdad $y < x + 3$

Conjunto solución para la desigualdad $y > -x - 2$

Conjunto solución para el sistema.

Ejemplo:
Resolver el siguiente sistema.

$$y < 4$$
$$2x - 3y \leq 6$$

Transformamos primero a un sistema que es equivalente

$$y < 4$$
$$y \geq \frac{2}{3}x - 2$$

¿Por qué?

Graficamos ahora las dos desigualdades

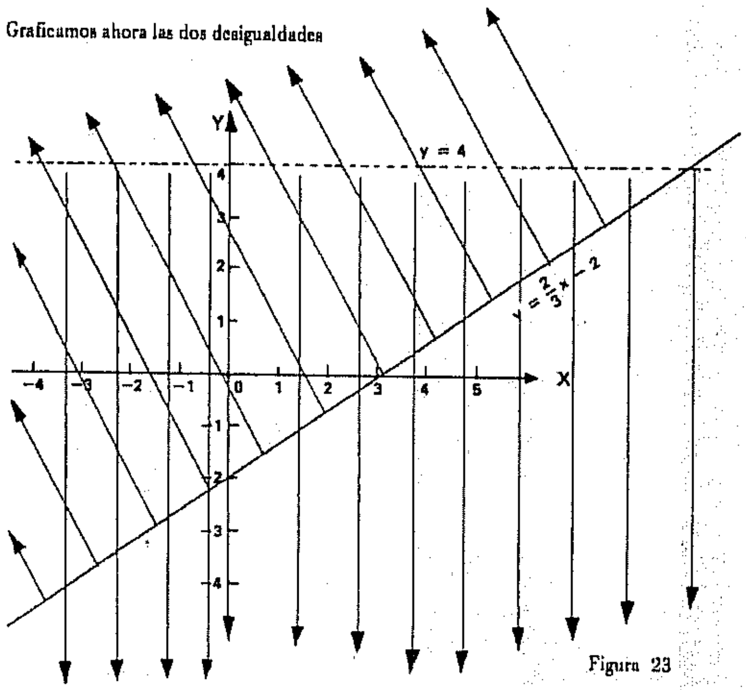


Figura 23

Conjunto solución para la desigualdad $y < 4$

Conjunto solución para la desigualdad $y \geq \frac{2}{3}x - 2.$

Conjunto solución para el sistema.

La gráfica del conjunto solución, es el conjunto de puntos de la intersección de las gráficas de los dos conjuntos solución de las desigualdades que forman el sistema, además en este ejemplo todos los puntos que pertenecen a la recta $y = \frac{2}{3}x - 2$ son también elementos del conjunto solución del sistema, debido a que en la segunda desigualdad tenemos $y \geq \frac{2}{3}x - 2$, es decir la y puede ser igual a $\frac{2}{3}x - 2$ ó mayor que $\frac{2}{3}x - 2$.

Aplicaciones de desigualdades lineales.

El uso de las desigualdades tiene una gran variedad de aplicaciones; aquí daremos una de ellas llamada **programación lineal.** Si se tienen dos cantidades variables que son controladas por un conjunto de condiciones que puedan ser expresadas como **desigualdades lineales**, entonces la gráfica de este sistema es el conjunto de puntos dentro de cierta figura geométrica limitada por líneas rectas llamada **polígono.** Dado que podemos expresar una tercera cantidad como una expresión lineal en la que intervengan las mismas dos variables, su valor **máximo** o **mínimo** ocurrirá para los valores de las variables en uno de los vértices del polígono; desde luego que este hecho no lo demostraremos aquí, pero lo tomaremos como cierto. Si quieres ampliar más tus conocimientos sobre este tema puedes consultar uno de los libros que se dan en la bibliografía.

En seguida vamos a presentar ejemplos que nos ilustrarán perfectamente todo lo que acabamos de decir.

Ejemplo:

Una agencia de viajes está organizando una excursión por la ciudad y ha decidido que puede aceptar como máximo a 12 personas de las cuales deben ser cuando menos 5 hombres y 4 mujeres. La utilidad por cada hombres es de $12 y por cada mujer es de $10. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres deben ir en la excursión para que la utilidad de la agencia sea máxima?

Primero representamos por medio de literales las variables que intervienen en el problema, o sea ¿cuántos hombres y cuántas mujeres deben ir en la excursión? Hagamos.

$x =$ número de hombres
$y =$ número de mujeres

Las condiciones que deben de cumplir x y y son:

$x + y \leq 12$	número máximo de personas es 12
$x \geq 5$	número mínimo de hombres es 5
$y \geq 4$	número mínimo de mujeres es 4

Graficamos el sistema. La solución del sistema está en el triángulo **ADJ** (polígono de 3 lados) y serán los pares ordenados **(x, y)**, representados en la gráfica (ver figura 24).

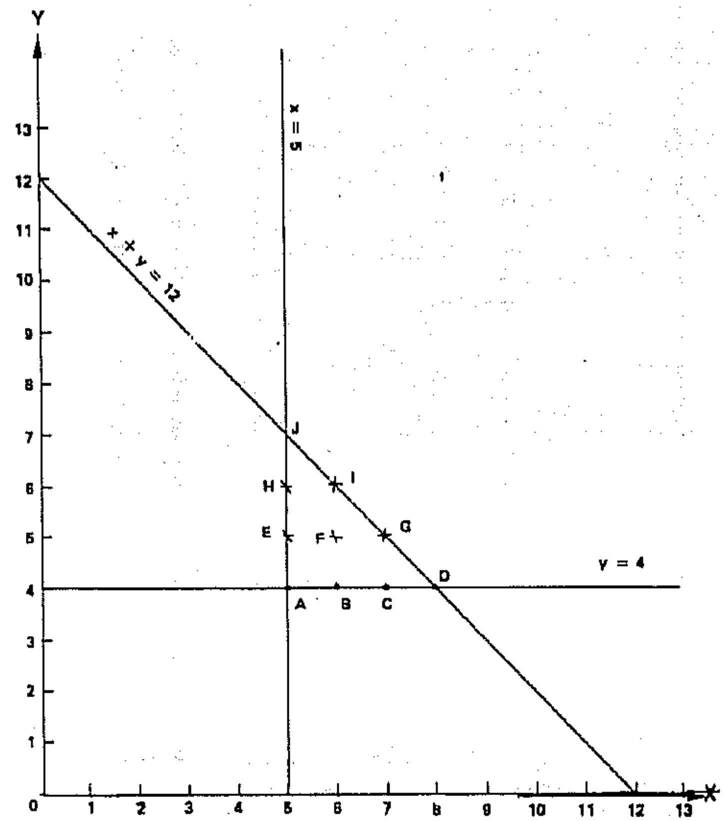


Figura 24

En la figura podemos ver que **(x y)** está dentro o en el límite del triángulo **A D J** y puesto que **x, y ∈ N**, sólo hay 10 pares ordenados de números naturales que satisfacen las tres desigualdades. Cada uno de estos puntos está representado en la gráfica por **A, B, C, D, E, F, G, H, I** y **J.**

La función utilidad la representamos como **U** y queda expresada como sigue:

$$U = 12x + 10y \begin{cases} 12x & \text{utilidad que dejan los hombres} \\ 10y & \text{utilidad que dejan las mujeres} \end{cases}$$

Si U_a es la utilidad para **A** (5,4) y U_b para **B** (6,4) y así sucesivamente obtenemos,

Para A (5,4)	$U_a = 12 \cdot 5 + 10 \cdot 4 =$	\$100
Para B (6,4)	$U_b = 12 \cdot 6 + 10 \cdot 4 =$	112
Para C (7,4)	$U_c = 12 \cdot 7 + 10 \cdot 4 =$	124
Para D (8,4)	$U_d = 12 \cdot 8 + 10 \cdot 4 =$	136
Para E (5,5)	$U_e = 12 \cdot 5 + 10 \cdot 5 =$	110
Para F (6,5)	$U_f = 12 \cdot 6 + 10 \cdot 5 =$	122
Para G (7,5)	$U_g = 12 \cdot 7 + 10 \cdot 5 =$	134
Para H (5,6)	$U_h = 12 \cdot 5 + 10 \cdot 6 =$	120
Para I (6,6)	$U_i = 12 \cdot 6 + 10 \cdot 6 =$	132
Para J (5,7)	$U_j = 12 \cdot 5 + 10 \cdot 7 =$	130

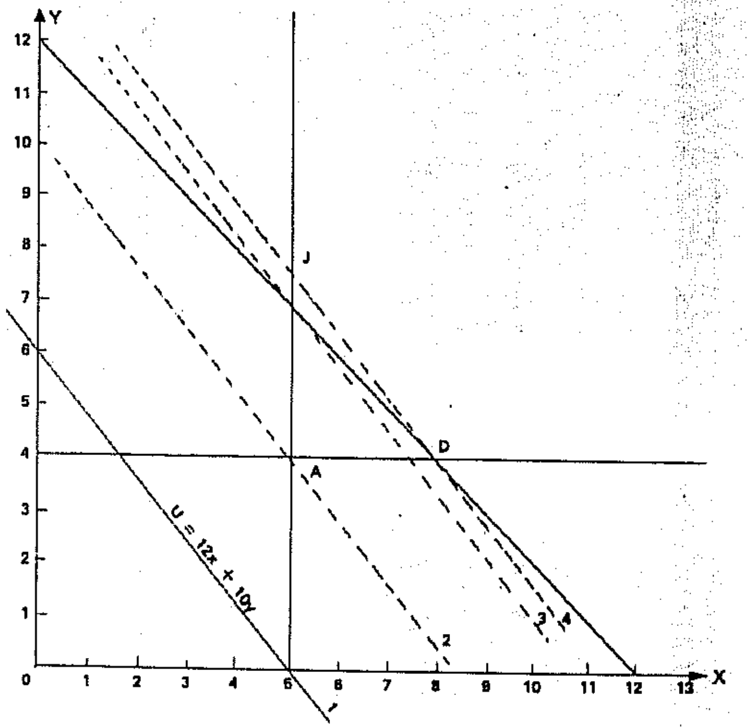
Podemos ver que la máxima utilidad se obtiene en el punto **D (8,4)**, es decir cuando en la excursión vayan 8 hombres y 4 mujeres. Vemos también que la mínima utilidad se obtiene en el punto **A** (5,4) es decir cuando vayan 5 hombres y 4 mujeres; por lo que podemos concluir que el valor máximo y el valor mínimo de la función **U** ocurre siempre en algún vértice del **polígono** que se forma con las desigualdades.

Hagamos de nuevo la gráfica anterior y de los 10 pares ordenados que analizamos, consideremos sólo los correspondientes a los vértices del triángulo.

Máximo y mínimo de una función utilidad.

En esta misma figura tracemos algunas rectas de la familia de rectas que representan la **función utilidad.** (Observa que esta familia de rectas tiene pendiente igual a $-\frac{6}{5}$) (Ver figura 25).

Algunas de estas rectas son las rectas 1, 2, 3 y 4, y en la figura vemos que el vértice más próximo al origen contenido en una de estas rectas es el punto donde la función utilidad es mínima (recta 2 en nuestro caso) y el vértice más alejado del origen contenido en una de estas rectas representa el punto donde la función utilidad es máxima (recta 4 en nuestro caso). Este método es otra forma de determinar qué vértice del polígono representa el valor **máximo o mínimo** para la **función utilidad.**



(Figura 25)

Ejemplo:

Una persona necesita 10, 12 y 12 unidades de los fertilizantes A, B y C, respectivamente para su jardín. Un producto líquido contiene 5, 2 y 1 unidades de los fertilizantes A, B y C respectivamente por litro; y un producto sólido contiene 1, 2 y 4 unidades de fertilizante A, B y C respectivamente por kilo. Si el costo del producto líquido es de $3.00 litro y el del producto sólido es de $2.00 por kilo, ¿cuántos litros del producto líquido y cuántos kilos del producto sólido debe comprar, para que el costo sea mínimo y además cumpla con los requerimientos de los fertilizantes **A, B y C?**

Antes de intentar resolver este problema, vamos a resumir los datos conocidos por medio de una tabla.

	Unidades por litro	Unidades por kilo	Unidades que se necesitan
Fertilizante A	5	1	10
Fertilizante B	2	2	12
Fertilizante C	1	4	12
Costo	3	2	

Representamos por medio de literales lo que nos piden. Haciendo

x = litros que se compran del producto líquido
y = kilos que se compran del producto sólido

Buscamos minimizar una función **C** (costo) que está dada por

$$C = 3x + 2y$$

sujeta a las siguientes condiciones

$$5x + y \geq 10$$
$$2x + 2y \geq 12$$
$$x + 4y \geq 12$$

En estos problemas de **programación lineal**, otra condición que debe de cumplirse es que las variables no sean negativas, es decir que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Graficamos todas estas condiciones. (Ver figura 26).

Los vértices del polígono son los puntos **A, B, C y D;** encontramos el valor de la **función costo** en cada uno de ellos.

Para **A** (0,10) $C_a = 3(0) + 2(10) = \$20$
Para **B** (1,5) $C_b = 3(1) + 2(5) = 13$
Para **C** (4,2) $C_c = 3(4) + 2(2) = 16$
Para **D** (12,0) $C_d = 3(12) + 2(0) = 36$

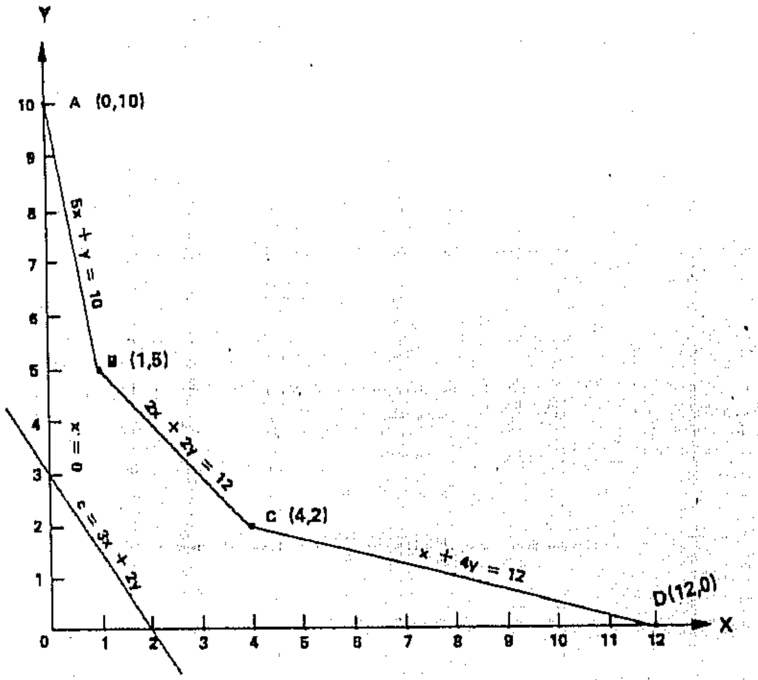


Figura 26

Podemos ver que el costo es mínimo en el punto B, por lo que se debe de comprar 1 litro de producto líquido y 5 kilos de producto sólido.

En la figura anterior, podemos ver la recta que representa la función costo, y si movemos una recta paralela hacia la derecha de esta recta, el primer vértice que toca es el B lo cual concuerda con lo que ya habíamos dicho acerca de qué punto hace que la función sea un mínimo.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Los primeros 10 ejercicios son problemas de planteo, los cuales podrás resolver mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres variables y los siguientes

2 ejercicios son problemas de programación lineal. Si tienes dificultad en la solución de este ejercicio se te recomienda que vuelvas a estudiar los ejemplos e indicaciones que se te dieron para este tipo de problemas.

a) Una colecta de la Cruz Verde en una escuela fué de \$130, si había 700 niños y cada uno de ellos aportó una moneda de \$0.10 ó una de \$0.25 ¿cuántos aportaron \$0.10 y cuántos \$0.25?

b) Durante un año una persona recibe \$9,000 por la renta de dos casas. Si las rentas difieren en \$200, y la más barata estuvo ocupada sólo 10 meses del año ¿cuánto era la renta de cada una de las casas?

c) Un contratista tiene trabajando 45 obreros en la construcción de una máquina, si una parte de ellos hacen la parte A y la restante la parte B y además sabemos que los que hacen la parte A son el doble de los que hacen la parte B ¿cuántos obreros trabajan haciendo la parte A y cuántos haciendo la parte B?

d) Se tienen dos soluciones de sal, una al 5% y la otra al 10% ¿Cuánto debemos poner de cada una para hacer 100 litros de una solución al 6% de sal?

e) Dos aeropuertos A y B, están a 800 km uno del otro y B está al Norte de A. Un avión voló en 4 horas de A a B y luego regresó a A en 5 horas. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del sur a velocidad constante, encontrar la velocidad del avión en aire en reposo y la velocidad del viento. Usese la fórmula. $d = vt$

d = distancia en kilómetros
v = velocidad en kilómetros por hora
t = tiempo en hora

f) Un estudiante compró un cuaderno, un libro y una pluma y en total pagó \$100. Si el libro costó el doble que la pluma y la pluma y el cuaderno juntos costaron las partes de lo que costó el libro ¿cuánto pagó el estudiante por cada una de las tres cosas que compró?

g) Un comerciante tiene tres diferentes calidades de arroz con precios por kilogramo de \$7, \$9 y \$12 respectivamente. Mezcla la mitad del de \$7 con la mitad del de \$9 y obtiene una calidad de \$7.75. El resto del de \$9 lo mezcla con el de 12 y obtiene una calidad de \$11.50 ¿cuántos kilogramos de cada calidad original tenía si la suma de ellos era de 310 kg?

h) Las sumas de las edades de un padre, su hijo y su hija suman 75 años. Si la edad del padres es el doble que la edad del hijo y 10 años después la edad del padre será el doble que la edad de la hija ¿cuál es la edad de cada uno?

i) Un matrimonio fue de compras al mercado y entre ambos llevaban $900 para gastar sólo que el esposo gastó las 2/3 partes de su dinero y la esposa gastó 4/5 del suyo por lo que regresaron a su casa con $260. ¿Cuánto llevaba cada uno de ellos inicialmente para gastar en el mercado?

j) Un sastre tiene 60 m^2 de tela de algodón y 80 m^2 de tela de lana. Para hacer un saco se necesitan 2 m^2 de tela de algodón y 4 m^2 de tela de lana. Para hacer un abrigo se necesitan 3 m^2 de tela de algodón y 2 m^2 de tela de lana. ¿Cuántos sacos y cuántos abrigos debe el sastre fabricar para obtener una utilidad máxima si cada saco lo vende a $20 y cada abrigo a $30? . Representa por **x** el número de sacos que va a fabricar y por **y** el número de abrigos.

k) Una compañía renta dos tipos diferentes de camiones de carga; el tipo A tiene un metro cúbico de espacio refrigerado y 2m^3 de espacio no refrigerado y el tipo B tiene 3 m^3 de espacio refrigerado y 2 m^3 de espacio no refrigerado. Una planta de alimentos necesita embarcar 60 m^3 de productos que necesitan refrigeración y 80 m^3 de productos que no necesitan refrigeración. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe rentar para minimizar sus costos si el camión A se lo rentan a $1 el kilómetro y el camión B se lo rentan a $2 el kilómetro?

Represéntese por **X** el número de camiones de tipo A y por **Y** el número de camiones de tipo B.

Bibliografía para consulta. Unidad IX

ALGEBRA MODERNA
Eugene D. Nichols
Reaph T. Heimer
E. Henry Garland
Compañía Editorial Continental, S. A.
1969

ALGEBRA SUPERIOR
Ross H. Bardell
Abraham Spitzbart
Compañía Editorial Continental, S. A.
1966

Paneles de verificación

MODULO 1 – VALIDACION

1.–

a) $2x + y - 10 = 0 \quad x, y \in R \quad (0,10), (5,0), (1,8) \; x \in R$

b) $3x - y - 4 = 0 \quad (-2, -10), (-1, -7), (3,5) \; x \in I$

c) $7x - 5y - 7 = 0 \quad (-4, -7), (-1, -\frac{14}{5}) (-2, -\frac{21}{5}) \; x \in I$

d) $3x + 4y + 1 = 0 \quad (1, -1) (-3, 2), (-7,5)$

e) $2x - 3y - 4 = 0 \quad (2,0)$

f) $4x - y - 7 = 0 \quad (\frac{1}{2}, -5), (-\frac{5}{3}, -\frac{41}{3}), (2,1)$

g) $3x - y - 1 = 0 \quad (\frac{2}{3}, 1), (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}), (-\frac{3}{5}, -\frac{14}{5})$

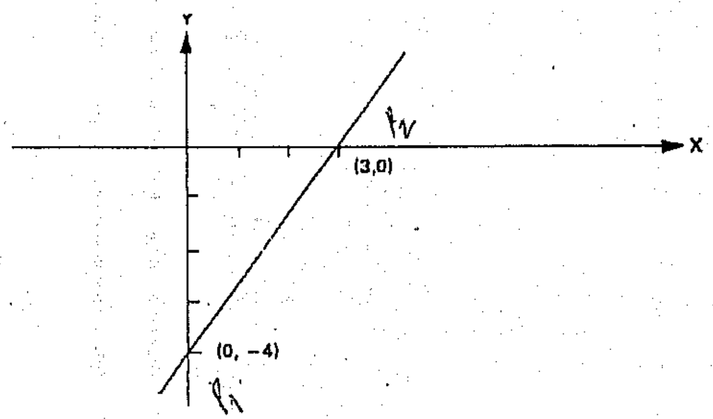
h) $3x + y - 7 = 0 \quad (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2} + 7), (\sqrt{2}, -3\sqrt{2} + 7), (\sqrt{3}, -3\sqrt{3} + 7)$

i) $4x - 2y - 3 = 0 \quad (\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{5} - 3}{2}), (\sqrt{7}, \frac{4\sqrt{7} - 3}{2}), (-\sqrt{13}, \frac{-4\sqrt{13} - 3}{2})$

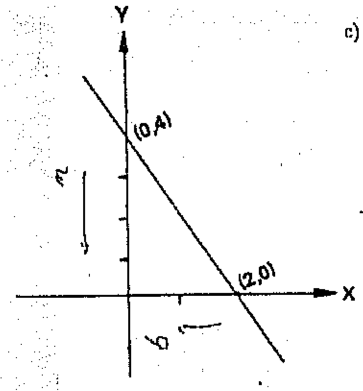
j) $7x - 4y - 12 = 0 \quad (-\sqrt{2}, \frac{-7\sqrt{2} - 12}{4}), \left(\frac{1}{2}, -\frac{17}{8}\right), \left(5, \frac{23}{4}\right)$

2.–

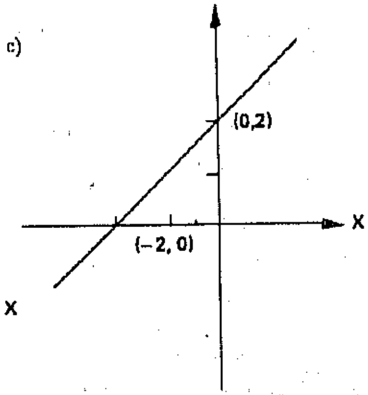
a)



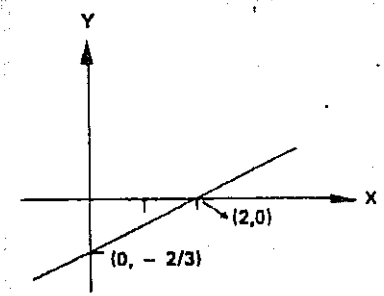
b)



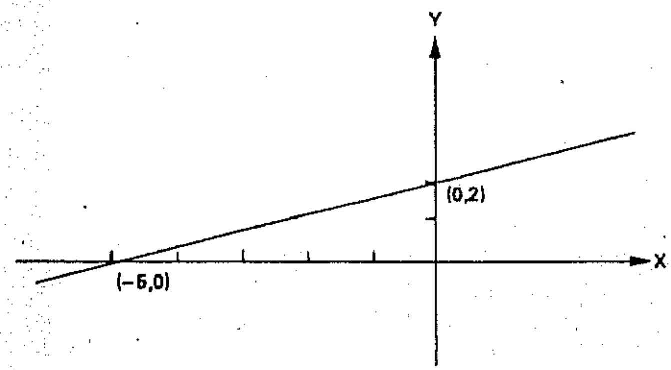
c)



d)



e)



f) $y = -3$
g) $x = -2$
h) $y = 0$
i) $x = 0$

3.

a) $m = -2, \quad b = \frac{1}{2}$

b) $m = -\frac{7}{8}, \quad b = -\frac{3}{8}$

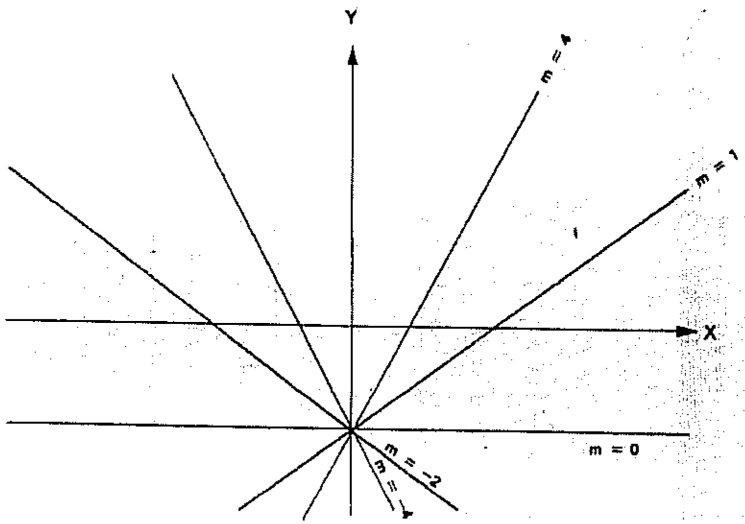
c) $m = \frac{2}{3}, \quad b = 0$

d) $m = 2, \quad b = -2$

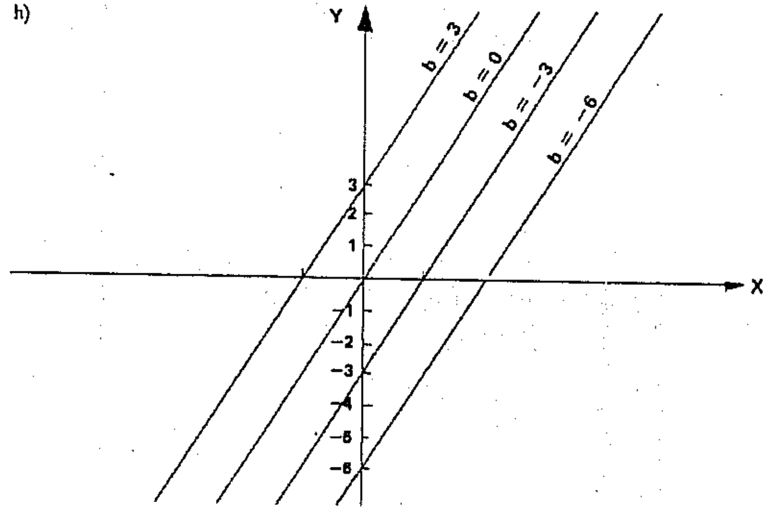
e) $m = 0, \quad b = 0$

f) $m = -1, \quad b = 4$

g)



h)

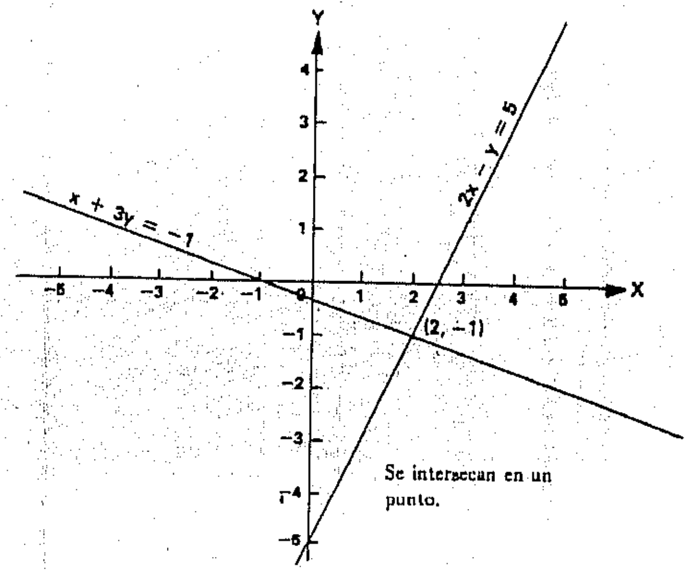


i) $y = 3x - 2$

MODULO 2 – VALIDACION

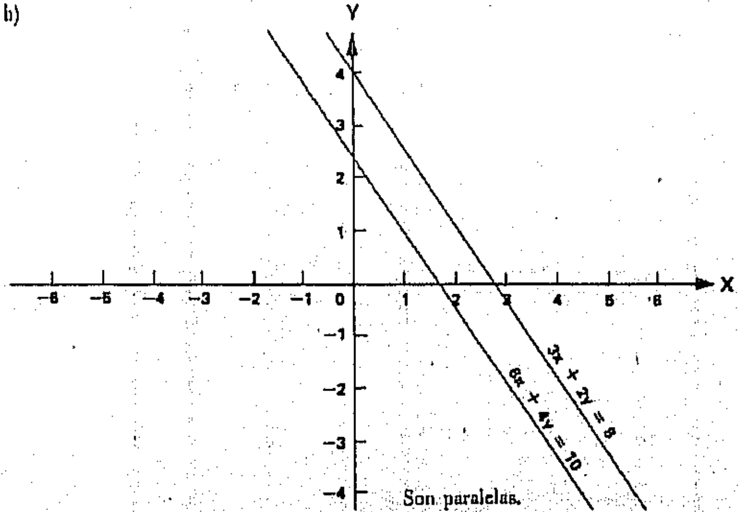
1.

a)

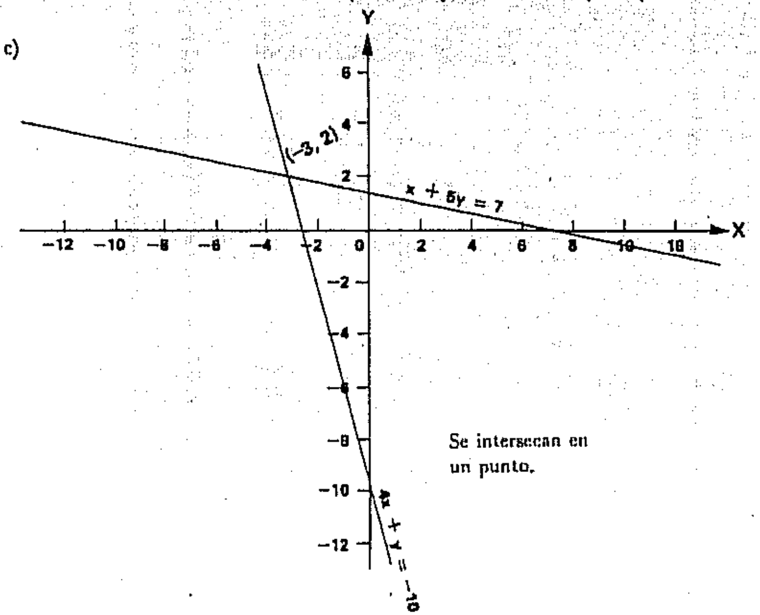


Se intersecan en un punto.

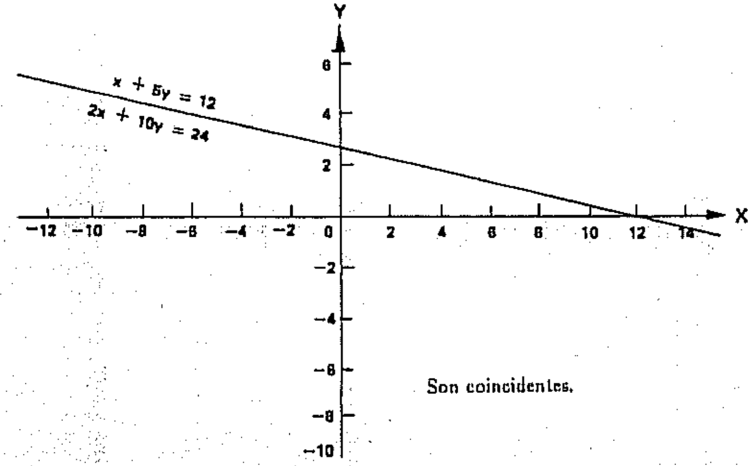
b)


Y
X
3x + 2y = 8
6x + 4y = 10
Son paralelas.

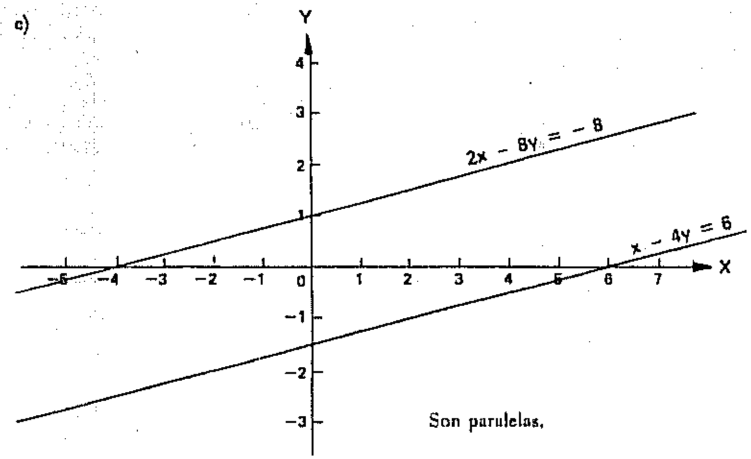
c)


Y
X
(−3, 2)
x + 5y = 7
4x + y = −10
Se intersecan en
un punto.

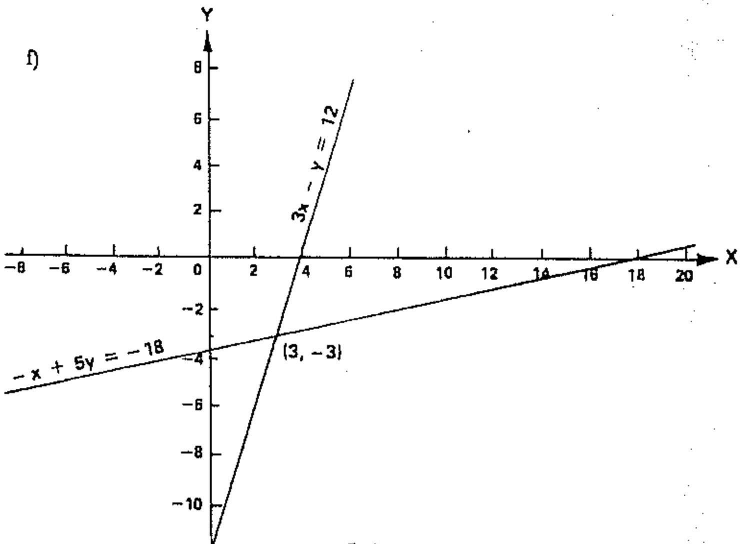
d)


Y
X
x + 5y = 12
2x + 10y = 24
Son coincidentes.

e)

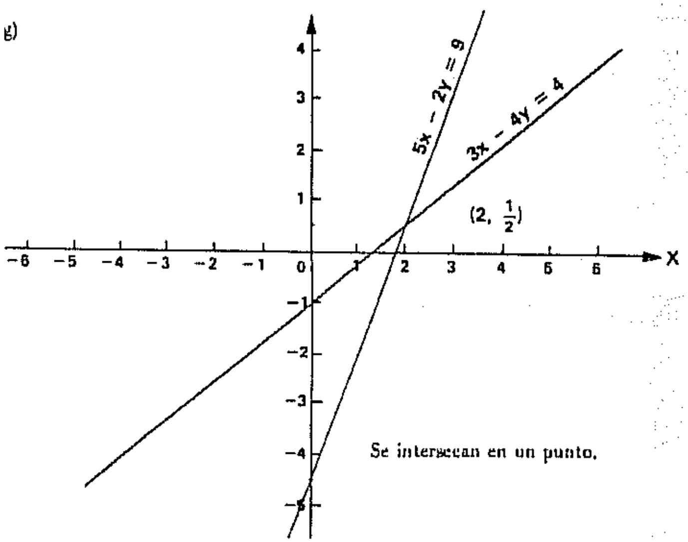

Y
X
2x − 8y = − 8
x − 4y = 6
Son paralelas.

f)



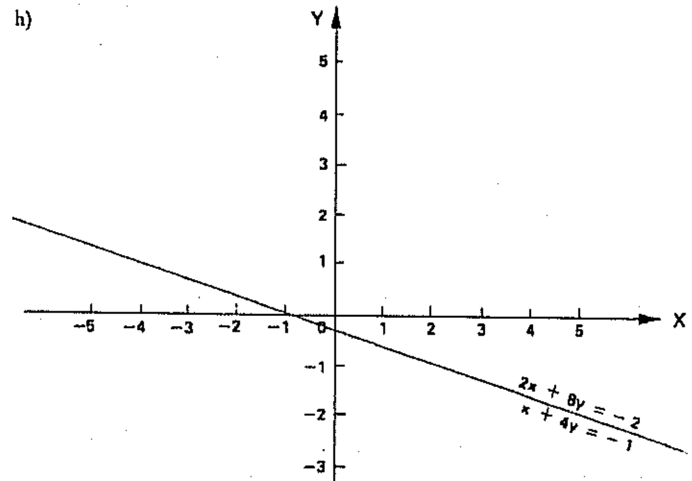
Se intersecan en un punto.

g)



Se intersecan en un punto.

h)



Son coincidentes.

2).

a)	$x = 2$	$y = 3$
b)	$x = -2$	$y = -1$
c)	$x = \frac{1}{2}$	$y = -\frac{3}{2}$
d)	$x = 4$	$y = -5$
e)	$x = 10$	$y = 5$
f)	$x = \frac{46}{17}$	$y = \frac{121}{17}$
g)	$x = \frac{b^2 + a^2}{2a + b}$	$y = \frac{2b - a}{2a + b}$
h)	$x = \frac{3}{5}$	$y = \frac{4}{5}$
i)	$x = \frac{31}{14}$	$y = \frac{5}{14}$
j)	No tiene solución. Son ecuaciones inconsistentes.	
k)	Un número infinito de soluciones.	
l)	$x = \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}$
m)	$x = -2$	$y = -3$

n) $x = \frac{8}{7}$ $y = \frac{19}{14}$
o) $x = 4$ $y = -1$
p) $x = 3$ $y = -2$
q) $x = \frac{5}{4}$ $y = \frac{1}{8}$
r) No tiene solución. Son ecuaciones inconsistentes.
s) $x = 1$ $y = \frac{3}{2}$
t) $x = -\frac{5}{2}$ $y = 2$

3.

a) $x = \frac{8}{5}$ $y = -\frac{6}{5}$
b) $x = 1$ $y = 2$
c) $x = -2$ $y = -1$
d) $x = 3$ $y = 3$
e) No tiene solución. Son ecuaciones inconsistentes.
f) $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$
g) $x = 2$ $y = -3$
h) $x = -1$ $y = -3$
i) $x = -5$ $y = 7$
j) Un número infinito de soluciones. Son rectas coincidentes.
k) $x = -5$ $y = 2$
l) $x = \frac{4}{3}$ $y = \frac{-11}{3}$
m) $x = 2$ $y = -3$
n) No tiene solución. Son ecuaciones inconsistentes.
o) $x = \frac{4}{3}$ $y = \frac{5}{6}$
p) $x = \frac{2}{3}$ $y = \frac{3}{4}$
q) $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{2}$
r) $x = 10$ $y = 8$
s) $x = -2$ $y = 1$
t) $x = 1$ $y = 1$

4.

a) $x = 2$ $y = -1$
b) $x = 1$ $y = 3$
c) $x = 2$ $y = 3$
d) $x = 1$ $y = 2$
e) $x = 3$ $y = 1$

f) $x = -2$ $y = \frac{3}{2}$
g) $x = -2$ $y = 7$
h) $x = -3$ $y = 1$
i) $x = 2$ $y = 2$
j) $x = 1$ $y = 0$
k) $x = 7$ $y = -\frac{7}{5}$
l) $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}$
m) $x = 3$ $y = \frac{3}{2}$
n) $x = 1$ $y = 2$
o) $x = 1$ $y = \frac{7}{2}$
p) $x = -\frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{2}$
q) $x = \frac{1}{6}$ $y = \frac{1}{5}$
r) $x = 1$ $y = 1$
s) $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$
t) No tiene solución.

MODULO 3 – VALIDACION

a) $x = 3$ $y = 1$ $z = 2$
b) $x = 1$ $y = -3$ $z = 5$
c) $x = 2$ $y = -2$ $z = -1$
d) $x = \frac{3}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ $z = \frac{1}{2}$
e) $x = 3$ $y = 2$ $z = -3$
f) $x = -\frac{3}{2}$ $y = -4$ $z = \frac{2}{3}$
g) $x = \frac{2}{3}$ $y = \frac{7}{3}$ $z = -\frac{5}{3}$
h) $x = -\frac{1}{2}$ $y = -1$ $z = \frac{3}{2}$
i) $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{2}$ $z = -\frac{2}{3}$
j) $x = 4$ $y = 0$ $z = 1$

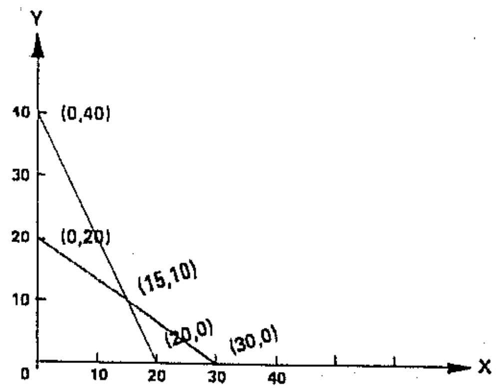
MODULO 4 – VALIDACION

a) 300 aportaron 10 centavos; 400 aportaron 25 centavos.
b) \$300 y \$500.

c) La parte A 30; la parte B 15.
d) 80 litros de la de 5%; 20 litros de la de 10%.
e) Velocidad del avión en aire en reposo 180 km por hora. Velocidad del viento 20 km por hora.
f) Cuaderno \$10; libro \$60, pluma \$30.
g) De \$7, 100 kilogramos; de \$9, 60 kilogramos; de \$12, 150 kilogramos.
h) Edad del padre 40 años, edad del hijo 20 años, edad de la hija 15 años.
i) Esposo \$600, esposa \$300.
j) Las desigualdades que forman el sistema son:

$$2x + 3y \leq 60 \qquad (1)$$
$$4x + 2y \leq 80 \qquad (2)$$

La función que se busca maximizar es $U = 20x + 30y$
La gráfica del sistema es la siguiente:



La solución óptima es:
15 sacos y 10 abrigos con una utilidad de \$600 ó 0 sacos y 20 abrigos con la misma utilidad de \$600.

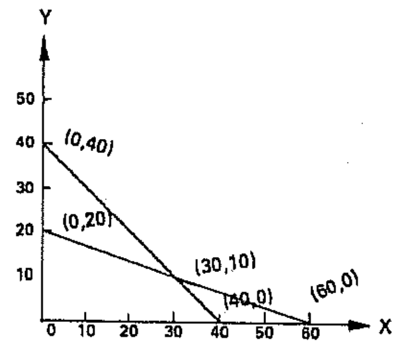
k) Las desigualdades que forman el sistema son:

$$x + 3y \geq 60 \qquad (1)$$
$$2x + 2y \geq 80 \qquad (2)$$

La función que se busca minimizar es

$$C = x + 2y$$

La gráfica del sistema es la siguiente:



La solución óptima es:
Rentar 30 camiones de tipo A y 10 camiones de tipo B.

UNIDAD X

NUMEROS COMPLEJOS

Introducción

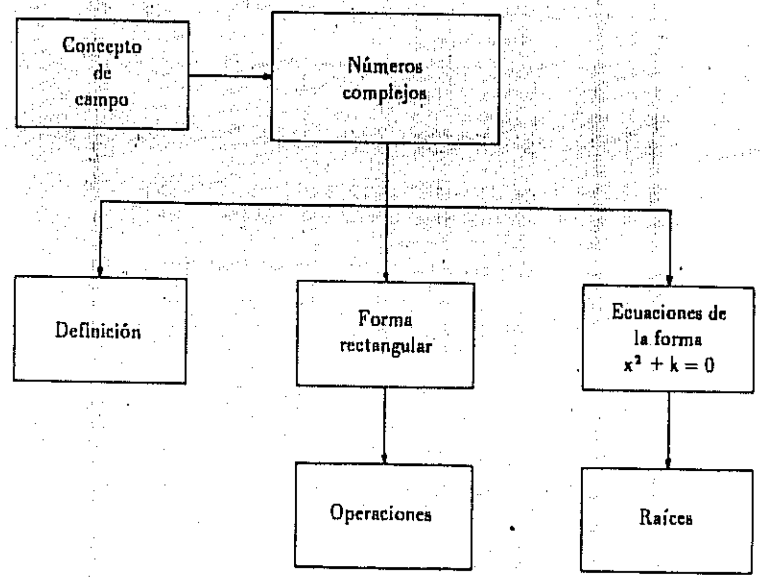
En el estudio del conjunto de los números complejos, tratados en la presente unidad, se demuestra que dicho conjunto cumple con los postulados de campo. Se desarrolla el álgebra de los números complejos utilizando el concepto de par ordenado y se establecen las operaciones fundamentales de suma y multiplicación, y sus propiedades. Asimismo se presenta la forma rectangular, el manejo de los números imaginarios y las operaciones de resta y división. Para terminar, se analiza la solución de ecuaciones en la forma rectangular y la obtención de raíces cuadradas. Es conveniente hacer notar la utilización frecuente de los números complejos en todas las ramas del álgebra, por ejemplo: Funciones cuadráticas y polinominales y su empleo en la geometría analítica. Como aplicación práctica citaremos la de teoría de circuitos de corriente alterna, de gran importancia en la vida moderna.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Mencionará las características de los números complejos.
2. Resolverá operaciones de suma y multiplicación con números complejos aplicando las propiedades conmutativa y asociativa.
3. Resolverá operaciones de resta y división con números complejos utilizando la forma rectangular de expresión.
4. Resolverá operaciones de raíz cuadrada con números complejos.
5. Graficará y obtendrá el valor absoluto de números complejos.

Diagrama temático estructural



Glosario

Conjunto de números complejos: conjunto de pares ordenados con componentes reales.
Forma rectangular de los números conplejos: $a + bi$
Números complejos conjugados: números complejos expresados en la forma rectangular que sólo difieren en el signo de su parte imaginaria.
$\overline{z}$: respresenta al conjugado de z
Valor absoluto de: $z; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

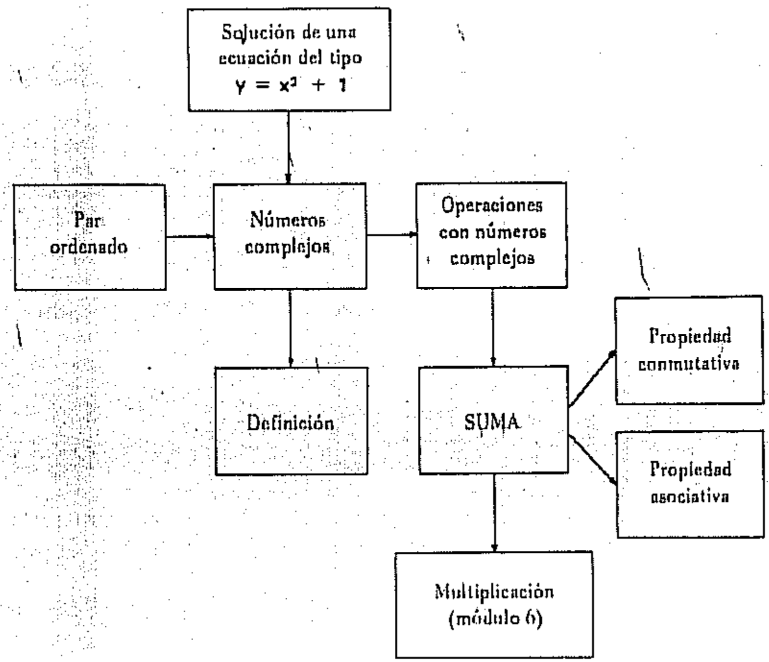
Módulo 5

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará que es un número complejo.
2. Explicará cuando dos números complejos son iguales entre si.
3. Efectuará sumas con números complejos.
4. Aplicará las propiedades conmutativa y asociativa en la suma de números complejos.

ESQUEMA-RESUMEN



5. Números complejos

En un tema anterior fue mostrado que a ecuaciones como $y = x^2 + 1$, les corresponden gráficas que no intersecan al eje X.

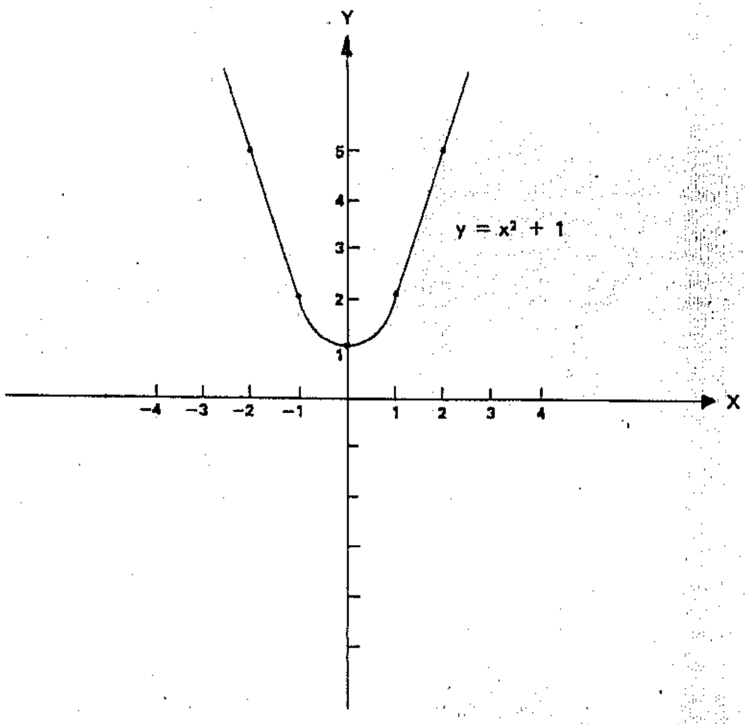


Figura 1

Conjunto de los números complejos.

Ello significa que para ningún "$x \in R$", resulta $y = 0$, o sea que si en $y = x^2 + 1$ a x se le asignan valores reales, $x^2 + 1$ siempre será distinto de cero; cuando esto sucede decimos que la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales; las soluciones de tales ecuaciones están contenidas en un conjunto de números al que llamamos El Conjunto de los Números Complejos y lo representamos por medio de la letra C, este conjunto C es un sistema matemático que vamos a describir en este capítulo; una parte

de C tiene exactamente el mismo comportamiento que tiene el conjunto de los números reales, razón por la que podemos trabajar con R como si fuera subconjunto propio de C.

Un número complejo es...

> **Definición:** Un número complejo es un par ordenado con componentes reales, a, b y recíprocamente cada par ordenado de números reales es un número complejo.

De acuerdo con la definición podemos representar a C en términos de la notación de conjuntos como sigue:

$$C = \{z \mid z = (a, b);\ a, b \in R\}$$

Con toda seguridad habrás notado ya, que cada número complejo se representa geométricamente como un punto del plano, y recíprocamente cada punto del plano representa un número complejo.

Sean $z_1 = (-3, 0)$, $z_2 = (1,2)$, $z_3 = (2,1)$
tres números complejos cuyas gráficas están dadas en la figura 2.

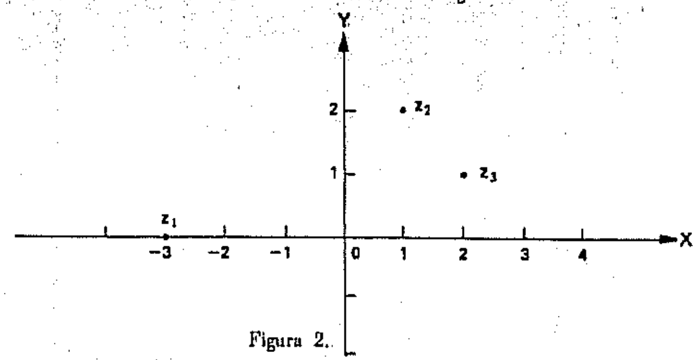


Figura 2.

Igualdad de números complejos.

> **Definición:** Dos números complejos son iguales si y sólo si tienen el mismo primer componente y también son iguales sus segundos componentes.

Simbólicamente: sean $z_1, z_2 \in C$ si $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$

$$z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = b_2$$

Ejemplo $\quad (\frac{3}{2}, -1) = (\frac{3}{2}, -\frac{2}{2})$

$$(x, y) = (3,2) \text{ si y sólo si } x = 3 \text{ y } y = 2$$

5.1 Suma de números complejos

Como siguiente paso en la descripción del conjunto de números complejos definiremos la operación suma en dicho conjunto, además mostraremos que en C existe un elemento identidad para dicha operación y que cada elemento de C tiene su inverso aditivo, en el mismo conjunto.

> **Definición:** sean $z_1, z_2 \in C$, $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$
> $$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

Cómo se suman dos números complejos.

Por definición, la suma de dos números complejos es un par ordenado con componentes $(a_1 + a_2)$ y $(b_1 + b_2)$, como a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales y ya que R es cerrado respecto a la operación suma, entonces $(a_1 + a_2) \in R$ y $(b_1 + b_2) \in R$; podemos concluir que los componentes del par ordenado que representa la suma son números reales, esto significa que la suma de dos números complejos es a su vez número complejo. Dicho de otra manera el conjunto C es cerrado respecto a la operación suma.

Ejemplo: Efectuar la operación indicada

$$(1,2) + (3, -4) = (1 + 3,\ 2 + (-4))$$
$$= (4, -2)$$

Ejemplos:
$$(1, 3) + (2, 1) = (1 + 2,\ 3 + 1) = (3, 4)$$
$$(2, x) + (3, y) = (2 + 3,\ x + y) = (5,\ x + y)$$

Ejemplo: Encuentra el valor de (x, y) si

$$(x, y) = (1, -2) + (2, 5)$$
$$(x, y) = (1 + 2,\ -2 + 5)$$
$$(x, y) = (3, 3)$$
$$x = 3,\quad y = 3$$

5.11 Propiedades conmutativa y asociativa para la suma en C

Hemos mostrado que C es cerrado respecto a la operación suma, mostramos ahora que la suma de estos números es conmutativa, para lograrlo debemos concluir que:

Para toda
$$z_1, z_2 \in C,\quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Demostración de la propiedad conmutativa.

sean $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$	hipótesis
$z_1 + z_2 \in C$	cerradura para suma en C
$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$	propiedad de sustitución
$= (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$	definición de suma
$= (a_2 + a_1,\ b_2 + b_1)$	postulado conmutativo de la suma para números reales
$= (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$	definición de suma en C
$= z_2 + z_1$	propiedad de sustitución
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	propiedad transitiva de las igualdades

Demostración de la propiedad asociativa.

2o. Para mostrar que la suma es asociativa necesitamos que para toda terna de números complejos $z_1, z_2, z_3 \in C$
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_3 = (a_3, b_3)$	hipótesis
$z_1 + (z_2 + z_3) \in C$	cerradura para suma en C
$z_1 + (z_2 + z_3) = (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)]$	propiedad de sustitución
$= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3,\ b_2 + b_3)$	definición de suma en C
$= (a_1 + (a_2 + a_3),\ b_1 + (b_2 + b_3))$	definición de suma en C
$= ((a_1 + a_2) + a_3,\ (b_1 + b_2) + b_3)$	postulado asociativa de la suma en R
$= [(a_1 + a_2),\ (b_1 + b_2)] + (a_3, b_3)$	definición de suma en C
$= [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3)$	definición de suma en C
$= (z_1 + z_2) + z_3$	propiedad de sustitución
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	propiedad transitiva de las igualdades

¿Qué igualdad debe satisfacer el elemento identidad?

El elemento identidad (x, y) para la suma de números complejos, debe satisfacer la siguiente igualdad:
Para todo $(a, b) \in C$
$$(a, b) + (x, y) = (a, b)$$

Usando la definición de suma de números complejos tenemos
$$(a + x,\ b + y) = (a, b)$$

Haciendo uso de la definición de igualdad de números complejos resulta: $a + x = a$; $b + y = b$

Como a, x, b, y, son números reales estas ecuaciones son ciertas si $x = y = 0$, consecuentemente el elemento identidad para la suma de números complejos es el par ordenado (0,0).

Ejemplo: $(2,3) + (0,0) = (2 + 0,\ 3 + 0) = (2,3)$

De la misma manera podemos establecer el inverso aditivo de cada número complejo.

Recordemos que el inverso aditivo de un elemento en un conjunto, es otro elemento del mismo conjunto tal que al efectuar la suma de ambos, se obtiene el elemento identidad para la suma.

Sea (x, y) el inverso aditivo de (a, b)

entonces: $(a, b) + (x, y) = (0,0)$	
$(a + x,\ b + y) = (0,0)$	definición de suma
$a + x = 0,\ b + y = 0$	definición de igualdad de números complejos
$x = -a,\ y = -b$	propiedad del inverso aditivo para números reales.

Por tanto, el inverso aditivo de (a, b) es el par ordenado $(-a, -b)$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Efectúa las operaciones indicadas en el siguiente conjunto de problemas.

a) $(3, -1) + (1,6)$
b) $(-2, 4) + (3,2)$
c) $(2, -3) + (-2, 3)$
d) $(-3, 4) + (1, -2)$
e) $(3, \frac{9}{5}) + (-\frac{7}{2}, -\frac{4}{5})$
f) $(1, -4) + (3, -2)$
g) $(-2, 4) + (-2, 4)$
h) $(0, 3) + (0, 2)$

2. Encuentra el valor de (x, y) en cada problema usando las definiciones de suma e igualdad de números complejos.

a) $(x, y) = (3, 2) + (3, 4)$
b) $(x, y) = (-1, 3) + (2, -4)$
c) $(5, 2) = (x, y) + (4, -1)$
d) $(-7, 2) = (1, -2) + (x, y)$
e) $(-2, 1) = (-2, 1) + (x, y)$
f) $(3, -7) = (2, -8) + (x, y)$
g) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = (x, y) + (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

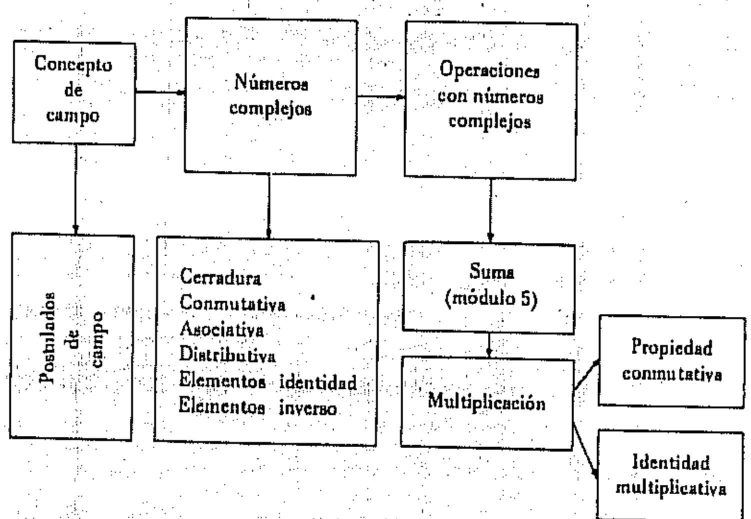
Módulo 6

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá la multiplicación con números complejos
2. Explicará la propiedad conmutativa para la multiplicación con números complejos.
3. Resolverá multiplicaciones con números complejos.
4. Mencionará cuál es el elemento identidad para la multiplicación con números complejos.
5. Explicará por que el conjunto de los números complejos es un campo.
6. Explicará como se asocian los números reales a los complejos en las operaciones de suma y resta.

ESQUEMA-RESUMEN



6.1 Mutiplicaciones de números complejos

Existencia del elemento identidad.

Al definir la multiplicación de números complejos mostraremos, que existe en C el elemento identidad para dicha operación, y que cada elemento de C excepto (0, 0), tiene en el mismo conjunto su inverso multiplicativo, que la multiplicación de números complejos es conmutativa y aceptaremos que es asociativa y que se distribuye sobre la suma.

El producto de números complejos se establece...

> Definición: sean $z_1, z_2 \in C$; $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$
> $z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$

Nota que el producto o resultado de la multiplicación de dos números complejos, está dado en términos de tres operaciones con números reales; el conjunto R es cerrado respecto a estas tres operaciones por lo que $(a_1a_2 - b_1b_2) \in R$ y $(a_1b_2 + b_1a_2) \in R$, los componentes del par ordenado que representan al producto son números reales, esto es, el producto de dos números complejos es un número complejo.

6.11 Propiedad conmutativa para la multiplicación

si $z_1 \cdot z_2 \in C$ mostrar que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

sean

$$z_1 = (a_1, b_1), \quad z_2 = (a_2, b_2)$$

entonces

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$$

y

$$z_2 \cdot z_1 = (a_2 \cdot a_1 - b_2b_1,\ a_2b_1 + b_2a_1$$

dado que la multiplicación y la suma de números reales son conmutativas, podemos expresar

$$z_2 \cdot z_1 = (a_2a_1 - b_2b_1,\ b_2a_1 + a_2b_1) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$$

o sea

$$z_2z_1 = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$$

con lo que tenemos

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$$
$$z_2z_1 = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$$

y entonces $z_1z_2 = z_2z_1$, por la propiedad transitiva de las igualdades. Por lo tanto: la multiplicación de números complejos es conmutativa.

Ejemplo 1: $(3, -1)\ (2,5) = (3 \cdot 2 - (-1)5,\ 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2)$
$= (6 + 5,\ 15 - 2)$
$= (11,\ 13)$

Ejemplo 2: $(2,3)\ (0,1) = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1,\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0)$
$= (0 - 3,\ 2 + 0)$
$= (-3,\ 2)$

Ejemplo 3: $(1,2)\ (1,0) = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0,\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1)$
$= (1 - 0,\ 0 + 2)$
$= (1,2)$

6.12 Identidad multiplicativa

¿Cómo establecemos el elemento identidad?

Si existe en C un elemento identidad para la multiplicación, este elemento debe ser un (x, y) tal que, haga cierta la siguiente igualdad para todo $(a,b) \in C$, de la cual partimos para determinarlo

$(a, b)\ (x, y) = (a, b)$	hipótesis
$(ax - by,\ ay + bx) = (a, b)$	definición de multiplicación de números complejos
$ax - by = a$ y $ay + bx = b$	definición de igualdad de números complejos.

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos: $x = 1 \quad y = 0$ luego (1,0) es el elemento identidad para la multiplicación.

Conviene hacer notar que los valores de x y de y no dependen de a ni de b y por lo tanto (1,0) funciona como elemento identidad para todo $(a, b) \in C$.

De la misma forma podemos establecer la existencia en C de un inverso multiplicativo (recíproco) para cada elemento del conjunto con excepción de (0,0).

¿Podemos demostrar la existencia del multiplicativo?

Sean $(a, b),\ (x, y) \in C$ con

$(a, b)\ (x, y) = (1,0)$	hipótesis
$(ax - by,\ ay + bx) = (1,0)$	definición de multiplicación en C
$ax - by = 1$ y $ay + bx = 0$	definición de igualdad de números complejos

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos:

(1) $ax - by = 1$
(2) $ay + bx = 0$

(1) $ax - by = 1$ ordenando
(3) $bx + ay = 0$

$a^2x - aby = a$ multiplicando (1) por **a** y (2) por **b** y sumando
$aby + b^2x = 0$

(4) $(a^2 + b^2)\, x = a$

$x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ si $a^2 + b^2 \neq 0$, es decir si $(a, b) \neq (0,0)$

$\dfrac{a^2}{a^2 + b^2} - by = 1$ sustituyendo $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ en (1)

$\dfrac{a^2}{a^2 + b^2} - 1 = by$ sumando $by - 1$ en ambos lados

$\dfrac{a^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = by$ efectuando

$\dfrac{-b^2}{a^2 + b^2} = by$ simplicando

$\dfrac{-b}{a^2 + b^2} = y$ multiplicando por $\dfrac{1}{b}$ ambos lados

de donde el inverso multiplicativo de (a, b), si $(a, b) \neq (0,0)$ es

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2};\ \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

En el caso en que $(a, b) = (0,0)$, no es posible encontrar un complejo (x, y) tal que $(a, b)\ (x, y) = (1,0)$

ya que $(0,0)\ (x, y) = (0 \cdot x - 0 \cdot y,\ 0 \cdot y + 0 \cdot x)$
$= (0 - 0,\ 0 + 0)$
$= (0,0)$

y $(0,0) \neq (1,0)$ pues $0 \neq 1$

Por tal razón, decimos que el elemento (0,0) no tiene inverso multiplicativo.

Ejemplo: Determina el recíproco de (1,2)
Solución: En este caso $a = 1$ y $b = 2$

luego $\dfrac{a}{a^2 + b^2} = \dfrac{1}{1 + 4} = \dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{-b}{a^2 + b^2} = \dfrac{-2}{1 + 4} = -\dfrac{2}{5}$

por lo que el recíproco de (1,2) es $\left(\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$

Comprueba este resultado multiplicando

$$(1,2)\ \left(\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{1}{5},\ \frac{-2}{5}\right)\ (1,2) = (1,0)$$

El recíproco de $z = (a, b)$ se acostumbra escribir como $\dfrac{1}{z}$ ó $\dfrac{1}{(a, b)}$

6.2 El conjunto de los números complejos es un campo

¿Qué propiedades debe satisfacer el conjunto de los números complejos para que sea un campo?

Hemos establecido un conjunto en el que se han definido dos operaciones, suma y multiplicación; ambas operaciones son binarias, es decir, el conjunto es cerrado respecto a cada una de estas operaciones. Cada operación es conmutativa y asociativa, además la multiplicación se distribuye sobre la suma; para cada operación existe en el conjunto un elemento identidad, y cada elemento del conjunto tiene en el mismo conjunto un inverso para la suma, y si es diferente de (0,0) tiene también un inverso para la multiplicación; dadas estas características del conjunto debemos considerarlo como un campo, ya que satisface los seis postulados que definen un campo o sea:

Cerradura:
Para toda $z_1, z_2, \in C$
$z_1 + z_2 \in C$
$z_1 \cdot z_2 \in C$

Conmutativa $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Asociativa $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Distributiva $z_1, z_2, z_3 \in C$
Para toda $z_1\ (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Identidades

Existen en **C** dos elementos (0,0) y (1,0) diferentes entre sí tales que, si $(a, b) \in C$

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$
y
$$(a, b)\ (1, 0) = (1, 0)\ (a, b) = (a, b)$$

(0, 0) es el elemento identidad para la suma
(1, 0) es el elemento identidad para la multiplicación

Inversos

Para cada $z = (a,b) \in C$ existe también en C un elemento
$$-z = -(a,b) = (-a, -b)$$

tal que $(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$

Para cada $z \in C$, $z \neq (0, 0)$ existe un $\frac{1}{z} \in C$ tal que
$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = (1,0)$$

si $z = (a, b)$, $\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$
$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1,0)$$

Ordenación del conjunto de los números reales.

Para ordenar el conjunto de los números reales, fue necesario que indujeras la correspondencia biunívoca entre este conjunto R y el conjunto de puntos en una línea recta llamada recta numérica o escala numérica (figura 3). Es esta correspondencia la que nos permite ubicar a un punto en la recta cuando conocemos su coordenada o número real asociado.

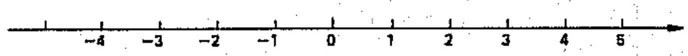


Figura 3

Correspondencia biunívoca entre los elementos de C y los puntos del plano.

En esta unidad te hemos indicado que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de C (pares ordenados con componentes reales) y los puntos del plano. Todo punto del plano se determina cuando conocemos su par ordenado o número complejo asociado.

Cuando el segundo componente del par ordenado es cero, la gráfica del número complejo es un punto en el eje X.

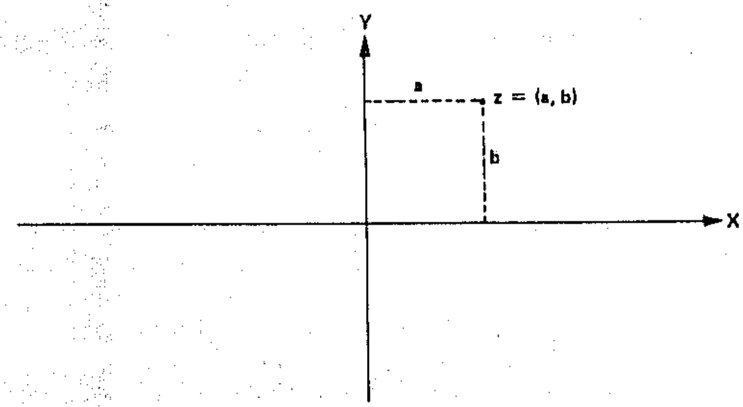


Figura 4

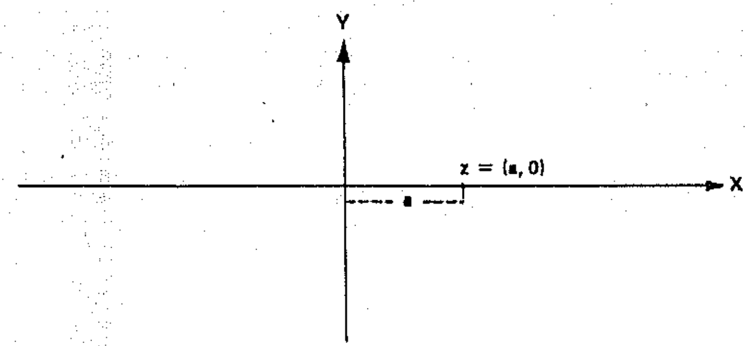


Figura 5

Relación entre punto en el plano y par ordenado.

Con lo anterior hemos considerado dos formas distintas de referirnos a un punto de una recta: mediante un número real que nos indica la separación entre el origen y el punto o mediante un par ordenado que ubica el punto en el plano. Este hecho de poder referirnos a cada punto del eje X mediante un número real a ó mediante el par $(a,0)$, nos ayuda a visualizar la correspondencia biunívoca entre los elementos $a \in R$ y $(a,0) \in C$ y que esta correspondencia se preserva a través de las operaciones suma y multiplicación.

Ejemplo: $5 + 3 = 8$

$(5,0) + (3,0) = (8,0)$

> **La suma de dos números reales es el número asociado con la suma de sus correspondientes complejos.**

Ejemplo: $4 + (-4) = 0$

$(4,0) + (-4,0) = (0,0)$

> **El producto de dos números reales es el número asociado con el producto de sus correspondientes complejos.**

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$(3,0) \cdot \left(\frac{1}{3}, 0\right) = (1,0)$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$(5,0) \cdot (3,0) = (15,0)$$

En forma general

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & a + b \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (a, 0) & + & (b, 0) & = & (a + b, 0) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & b & = & a \cdot b \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (a, 0) & \cdot & (b, 0) & = & (a \cdot b, 0) \end{array}$$

El conjunto de números reales es subconjunto del conjunto de números complejos.

Dado que los números complejos de la forma $(a, 0)$ tienen exactamente el mismo comportamiento de los números reales en lo referente a las operaciones de suma y multiplicación, no existe impedimento para representar el número complejo $(a, 0)$ como a, y considerar al conjunto de los números reales como un subconjunto de $\mathbf{C}$.

Si $k \in R$

$$k\,(a, b) = (k, 0)\,(a, b) = (k \cdot a - 0 \cdot b,\ k \cdot b + 0 \cdot a) = (ka, kb)$$

o sea $\quad k\,(a, b) = (k \cdot a,\ k \cdot b)$

Ejemplos: si $k = -1$

$-1\,(a, b) = (-a, -b)$

si $\quad k = 2,\ (a, b) = (3, -4)$

$2 \cdot (3, -4) = (6, -8)$

Es probable que te preguntes por qué en lugar de los números complejos de la forma $(a, 0)$ no consideramos los de la forma $(0, b)$; la razón es la siguiente:

Aún cuando existe la correspondencia biunívoca entre los elementos de R y los del $\{z \in \mathbf{C} \mid z = (0, b)\}$ esta correspondencia no se preserva a través de la multiplicación

$$a \cdot b = ab$$

$$(0, a) \cdot (0, b) = (-ab, 0)$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$(0, 2) \cdot (0, 3) = (-6, 0)$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Efectúa las operaciones indicadas en el siguiente conjunto de problemas:

a) $(3, -1)\ (1, 5)$
b) $(-2, 4)\ (3, 2)$
c) $(2, -3)\ (-2, 3)$
d) $(-3, 4)\ (1, -2)$
e) $\left(3, \frac{1}{2}\right)\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
f) $(1, -4)\ (3, -2)$
g) $(-1, 2)\ (-1, 2)$
h) $(0, 3)\ (0, 2)$
i) $(x, y)\ (0, 0)$
j) $(0, 1)\ (0, 1)$
k) $(0, 1)^3$
l) $(0, 1)^4$

2. Encuentra (x, y), $(-x, -y)$, $\frac{1}{(x, y)}$ si existen.

a) $(x, y) = (-1,2)\ (2,3)$
b) $(-2,1)\ (x, y) = (1,0)$
c) $(x, y) = (-1, 3)\ (2, -4)$
d) $(5,2) = (x, y)\ (4, -1)$
e) $(3, -4) = (2, -3)\ (x, y)$
f) $(x, y) = (-1,2)\ (-\frac{1}{5}, \frac{-2}{5})$
g) $(x, y) = (2, -4)\ (\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$

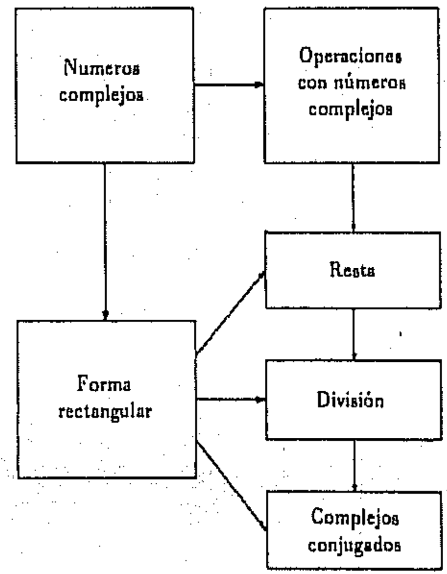
Módulo 7

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Expresará números complejos en forma rectangular.
2. Resolverá restas con números complejos.
3. Resolverá divisiones con números complejos.
4. Resolverá operaciones con números complejos y su conjugado

ESQUEMA-RESUMEN



7.1 Forma rectangular de los Números Complejos

¿Cómo podemos representar a los números complejos para facilitar su manejo?.

El considerar al conjunto de los números reales como un subconjunto de **C** hace posible expresar cada número complejo en otra forma, llamada forma rectangular de los números complejos la cual simplifica su manejo. Las definiciones de suma y multiplicación en **C** permiten expresar los pares ordenados (a, b) y $(0, b)$ de la siguiente manera:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

y $$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Entonces, sustituyendo la expresión para $(0, b)$ de la segunda igualdad en la primera tenemos

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Representando los complejos $(a, 0)$ y $(b, 0)$ mediante sus números reales asociados, tenemos

$$(a, b) = a + b\,(0, 1)$$

y como $(0,1)$ se acostumbra representarlo por i resulta

$$(a, b) = a + bi$$

Ejemplos:

$$(2, 3) = 2 + 3i$$
$$(-3, 5) = -3 + 5i$$
$$(0, -1) = 0 + (-i) = -i$$
$$(0, 0) = 0 + 0i = 0$$
$$(1, 0) = 1 + 0i = 1$$

¿Qué nos representa el símbolo i?.

Un hecho que ayuda a simplificar el manejo de los números complejos cuando los expresamos en forma rectangular, es el siguiente: $i = (0, 1)$

de donde $i^2 = (0, 1)^2$

y como $(0, 1)^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0)$

luego $i^2 = (-1, 0)$

pero $(-1, 0) = -1$

entonces $i^2 = -1$

Sin embargo, la simplificación del manejo de los números complejos en la forma $a + bi$ resulta realmente al poder operar con ellos como si fueran números reales igual que podemos hacerlo con los elementos de cualquier conjunto que sea un campo.

Pongamos por ejemplo la multiplicación de números complejos:

Aplicación del símbolo $[a + bi]$, a la multiplicación de números complejos.

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 + b_1b_2 i^2 + a_1b_2 i + b_1a_2 i$$
$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 + b_1b_2(-1) + a_1b_2 i + b_1a_2 i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$$

Esta nueva notación de los números complejos, motiva la representación de las definiciones dadas en esta unidad en términos de la notación $a + bi$.

Usando el símbolo $[a + bi]$ representar las definiciones del conjunto de números complejos.

Conjunto de los números complejos:

$$\boxed{C = \{a + bi \mid a, b \in R\}}$$

Igualdad de números complejos:

$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

Suma de números complejos:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Multiplicación de números complejos:

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

Si usamos ahora la forma rectangular para expresar los números de la forma $(0, b)$, tenemos

$$(0, b) = 0 + bi = bi$$

A estos números se les conoce como imaginarios o complejos puros.

Desde hace mucho tiempo, se ha considerado que cada sumando del número $a + bi$ es una parte independiente del mismo, y se ha llamado a a la parte real y a b la parte imaginaria del número aun cuando de imaginarios no tienen nada que no tengan los números reales.

Ha quedado establecido que el conjunto de los números complejos es un campo. Continuamos ahora la descripción del mismo definiendo las operaciones de resta y división.

La resta de números complejos es:

7.2 Definición de resta

si $z_1, z_2 \in C$ entonces $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$$

$$= (a_1 + b_1 i) + [-(a_2 + b_2 i)] \qquad \text{definición de la resta}$$

$$= (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i) \qquad -(a + bi) = (-a - bi)$$

$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \qquad \text{transitiva de igualdades}$$

Ejemplo: $z_1 = -3 + 2i \qquad z_2 = 1 + 4i$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 2i) - (1 + 4i)$$

$$z_1 - z_2 = (-3 - 1) + (2 - 4)i$$

$$z_1 - z_2 = -4 - 2i$$

La división de números complejos se define así.

7.3 División de números complejos

Definición

$$z_1 \; z_2 \in C, \qquad z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = (a_1 + b_1 i) \; \frac{1}{a_2 + b_2 i} \qquad \text{definición de la división}$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = (a_1 + b_1 i)\left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i\right) \frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i$$

El conjugado de un número complejo.

Existe sin embargo, un camino más sencillo para llegar al mismo resultado, este camino requiere la siguiente definición:

Un número complejo $\bar{z}$ se dice que es el conjugado de otro, si la única diferencia entre ellos es el signo de su parte imaginaria.

si $z = a + bi$ entonces $\bar{z} = a - bi$

Ejemplo: si $z = 2 + 3i$ su conjugado $\bar{z}$ se determina cambiando el signo de la parte imaginaria de z así:

$$\bar{z} = 2 - 3i$$

Ejemplo: si $z = 5 - 2i \qquad \bar{z} = 5 + 2i$

Ejemplo: si $z = -6 + 3i \qquad \bar{z} = -6 - 3i$

¿cómo obtenemos un número real a partir de un número complejo?

Cuando se multiplica un número complejo por su conjugado, el resultado siempre es un número real;

sean: $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)\;(a - bi)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 + abi - abi$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2(-1) + (ab - ab)i$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 + 0$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Mostramos ahora el camino para determinar el cociente $\frac{z_1}{z_2}$:

¿cómo obtenemos el cociente? ;

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot 1$$

$$= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$$

$$= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)\,i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i$$

Ejemplo:

$$\frac{1-3i}{1+2i} = \frac{1-3i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(1-6) + (-3-2)\,i}{1+4} = \frac{-5-5i}{5}$$

por lo tanto $\dfrac{1-3i}{1+2i} = -\dfrac{5}{5} - \dfrac{5}{5}\,i$

$$\frac{1-3i}{1+2i} = -1 - i$$

Ejemplos:

a) $(3+i) + (-2+7i) = 1 + 8i$
b) $3 + (-2+7i) = (3+0i) + (-2+7i) = 1 + 7i$
c) $i + (-2+7i) = (0+i) + (-2+7i) = -2 + 8i$
d) $(3+i) - (-2+7i) = (3+i) + (2-7i) = 5 - 6i$
e) $3 - (-2+7i) = (3+0i) + (2-7i) = 5 - 7i$
f) $i - (-2+7i) = (0+i) + (2-7i) = 2 - 6i$
g) $(3+i)(-2+7i) = (-6+7i^2) + (21i - 2i) = -13 + 19i$
h) $3(-2+7i) = -6 + 21i$
i) $i(-2+7i) = -2i + 7i^2 = -2i + 7(-1) = -7 - 2i$
j) $\dfrac{3+i}{-2+7i} = \dfrac{3+i}{-2+7i}\cdot\dfrac{-2-7i}{-2-7i} = \dfrac{-6+7-21i-2i}{4+49} = \dfrac{1}{53} - \dfrac{23}{53}\,i$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $(2+3i) + (7-5i)$
b) $(5-4i) + (6-i)$
c) $(3+7i) + (-6-7i)$
d) $7 - (2-4i)$

e) $5i - (7+2i)$
f) $(2-4i) - 5i$
g) $(2+5i) - (4+3i)$
h) $(1-i)(1+2i)$
i) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$
j) $2i(5-2i)$
k) $2i(3-i)^2$
l) $-5(-3-2i)$
m) $i(2-i)(3-4i)$
n) $\dfrac{5+2i}{3-i}$
o) $\dfrac{i}{2+3i}$
p) $\dfrac{5-2i}{i}$
q) $\dfrac{1+3i}{-2i}$
r) $\dfrac{1}{4-3i}$

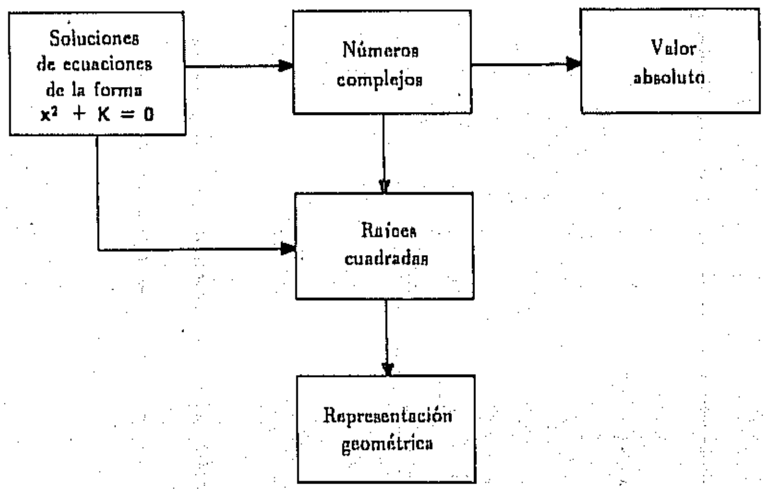
Módulo 8

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Resolverá raíces cuadradas que son números complejos.
2. Representará geométricamente números complejos en el plano cartesiano.
3. Obtendrá el valor absoluto de números complejos.

ESQUEMA-RESUMEN



8.1 Números complejos que son Raíces Cuadradas

Recordemos las soluciones a ecuaciones d del tipo $x^2 + k = 0$.

Al comenzar esta unidad, expresamos que la razón para introducirnos en el conjunto de números complejos fue establecer las soluciones de ecuaciones de la forma $x^2 + K = 0$ ó $x^2 = -K$, $K > 0$; para lograrlo partimos del caso más simple, es decir, cuando $K = 1$.

En este caso tenemos

si $\quad x^2 = -1$

como $(0,1) = i$ y $(0,1)^2 = i^2 = -1$ podemos sustituir el miembro derecho de la igualdad por i^2, $(i^2 = -1)$ quedando

$$x^2 = i^2$$

y ya que $(\pm\, i)^2 = i^2$ tenemos que

$$x = i \quad ó \quad x = -i$$

Las raíces cuadradas de -1 la obtenemos como como...

Pero no olvides que $x^2 = -1$ y que en realidad estamos buscando las raíces cuadradas de -1 las que son i ó $-i$ por lo que

$$\sqrt{-1} = i \quad ó \quad -\sqrt{-1} = -i$$

Ejemplo:

Sea $x^2 = -16$

$x = \sqrt{-16}$ ó $x = -\sqrt{-16}$

$x = \sqrt{-1 \cdot 16}$ ó $x = -\sqrt{-1 \cdot 16}$

$x = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}$ ó $x = -\sqrt{-1}\,\sqrt{16}$

$x = i \cdot 4$ ó $x = -i \cdot 4$

$x = 4i$ ó $x = -4i$

Ejemplo: $(x-2)^2 + 4 = 0$

$(x-2)^2 = -4$

$x - 2 = \sqrt{-4}$ ó $x - 2 = -\sqrt{-4}$

$x - 2 = 2i$ ó $x - 2 = -2i$

$x = 2 + 2i$ ó $x = 2 - 2i$

Ejemplo: efectuar el producto $\sqrt{-25}\ \sqrt{-16}$

$$\sqrt{-25} \cdot \sqrt{-16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}$$

$= i\sqrt{25} \cdot i\sqrt{16}$
$= i \cdot 5 \cdot i \cdot 4$
$= i^2 \cdot 20$
$= -1 \cdot 20$
$= -20$

debes notar que $\sqrt{-25}\,\sqrt{-16} \neq \sqrt{25 \cdot 16}$
$\sqrt{-25} \cdot \sqrt{-16} \neq \sqrt{400}$

Ejemplo: $\sqrt{-25} + \sqrt{-16} = i\sqrt{25} + i\sqrt{16}$
$= i \cdot 5 + i \cdot 4$
$= 5i + 4i$
$= 9i$

8.2 Representación geométrica

El número complejo en forma rectangular.

Ya sabes que existe correspondencia biunívoca entre el conjunto de números complejos y el conjunto de puntos del plano y que el punto asociado a un número complejo se determina al hacer referencia a un sistema de coordenadas rectangulares; observa que al representar el número complejo en la forma rectangular $z = a + bi$, a es la abscisa y b la ordenada del punto correspondiente.

¿Qué es un plano complejo?

Desde que se estableció la representación geométrica de los números complejos, se ha acostumbrado llamar plano complejo al plano cartesiano para enfatizar que los puntos representan números complejos, y también es costumbre llamar eje real al eje X y eje imaginario al eje Y.

Sea $z = a + bi$ un número complejo cuya gráfica es el punto en la siguiente gráfica.

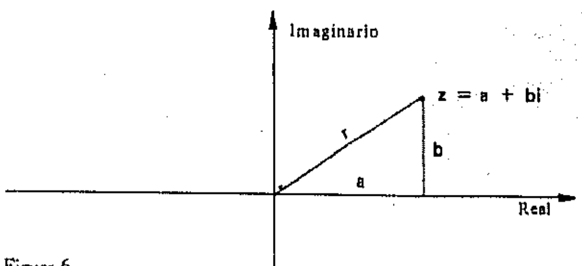


Figura 6

¿Cómo determinamos el valor absoluto?

La abcisa y la ordenada del punto son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento que une dicho punto con el origen de coordenadas; el teorema de Pitágoras nos permite afirmar que la distancia entre el punto y el origen es $\sqrt{a^2 + b^2}$; a esta magnitud la llamamos el **valor absoluto de z** y se representa $|z|$.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como puedes ver, el valor absoluto de un número complejo es un número real.

En qué condiciones un número complejo forma una circunferencia unitaria.

Consideremos que **C** es el conjunto de reemplazamiento de z en la expresión $|z| = 1$; si $|z|$ representa la distancia entre un punto y el origen de coordenadas, los números complejos que hacen cierta la igualdad $|z| = 1$ son todos aquéllos cuya gráfica está a una unidad del origen y este conjunto de puntos forman una circunferencia cuyo centro es el origen y su radio es 1.

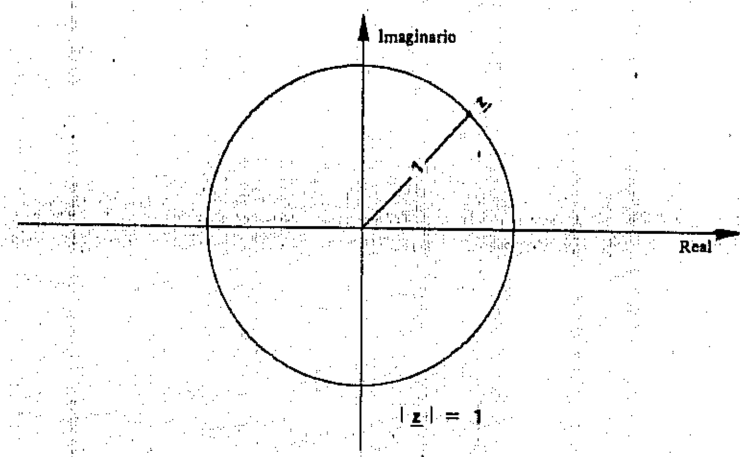


Figura 7

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Efectúa las operaciones indicadas y escribe cada respuesta en la forma $a + bi$.

a) $3 - \sqrt{-2}$
b) $\sqrt{32} - \sqrt{-32}$
c) $\sqrt{2}\,(\sqrt{-3} - \sqrt{2})$
d) $(\sqrt{5} - \sqrt{-3})\,(\sqrt{5} + \sqrt{-3})$
e) $\dfrac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}}$

2. Encuentra el conjunto solución de cada ecuación, $x \in C$ y escribe todas las soluciones en la forma $a + bi$.

a) $x^2 = -16$
b) $x^2 + 5 = 0$
c) $(x + 3)^2 = -5$
d) $(x + 4)\,(x - 4) = -12$
e) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} = 1$
f) $\frac{1}{x+2} = -\frac{x-2}{2}$

3. Encuentra cada uno de los valores absolutos indicados.

a) $|\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,i\,|$
b) $|5 - i\,|$
c) $|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,|$
d) $|\sqrt{3} + i\,|$

4. Expresa el número dado en una de las formas $a\sqrt{x}$, $-a\sqrt{x}$, $ai\sqrt{x}$ ó $-ai\sqrt{x}$ en las que a es un número real positivo, y x es un número natural que no tiene factores con raíz cuadrada exacta.

a) $-\sqrt{-50}$
b) $-\sqrt{32}$
c) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-6}$
d) $\sqrt{-32} + 2\sqrt{-128}$
e) $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{2}}$

5. Demuestra que

a) $|z| = |-z|$
b) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

6. Grafica en el plano complejo

a) $|z| = 3$
b) $|z| = 2$

7. ¿Qué región del plano describe cada una de las siguientes desigualdades?

a) $|z| \leq 1$
b) $|z| > 3$
c) $\{z \mid |z| \leq 4\} \cap \{z \mid |z| \geq 2\}$

Bibliografía para consulta. Unidad X

ALGEBRA
Florence M. Lovaglia
Merrit A. Elmore
Donald Conwey
Harla, S. A. de C. V.
1972

ALGEBRA SUPERIOR
Ross H. Bardell
Abraham Spitzbart
Compañía Editorial Continental, S. A.
1966

Paneles de verificación

1. Conjunto de Problemas X-1

1.

a) (4, 4)
b) (1, 6)
c) (0, 0)
d) (−2, 2)
e) $(-\frac{1}{2}, 1)$
f) (4, −6)
g) (−4, 8)
h) (0, 5)

2.

a) (6, 6)
b) (1, −1)
c) (1, 3)
d) (−8, 4)
e) (0, 0)
f) (1, 1)
g) $(1, -\frac{1}{2})$

1. Conjunto de Problemas X-2.

1.

a) (8, 14)
b) (−14, 8)
c) (5, 12)
d) (6, 10)
e) $(\frac{13}{4}, -1)$
f) (−5, −14)
g) (−3, −4)
h) (−6, 0)
i) (0, 0)
j) (−1, 0)
k) (0, −1)
l) (1, 0)

2.

a) (−8, 1)
b) $(-\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$
c) (10, 10)
d) $(\frac{18}{17}, \frac{13}{17})$
e) $(\frac{18}{13}, \frac{1}{13})$
f) (1, 0)

a) (8, −1)
b) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$
c) (−10, −10)
d) $(\frac{-18}{17}, \frac{-13}{17})$
e) $(\frac{-18}{13}, \frac{-1}{13})$
f) (−1, 0)

a) $(\frac{-8}{65}, \frac{-1}{65})$
b) (−2, 1)
c) $(\frac{1}{20}, \frac{-1}{20})$
d) $(\frac{306}{493}, \frac{-221}{493})$
e) $(\frac{18}{25}, \frac{-1}{25})$
f) (1, 0)

g) (1, 0) g) (−1, 0) g) (1, 0)

Conjunto de Problemas X-3

1.

a) $9 - 2i$
b) $11 - 5i$
c) -3
$5 + 4i$
e) $-7 + 3i$
f) $2 - 9i$
g) $-2 + 2i$
h) $3 + i$
i) 4
j) $4 + 10i$
k) $12 + 16i$
l) $15 + 10i$
m) $11 + 2i$
n) $\frac{13}{10} + \frac{11}{10}i$
o) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$
p) $-2 - 5i$
q) $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
r) $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

Conjunto de Problemas X-4.

1.

a) $3 - \sqrt{2}i$
b) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$
c) $-2 + \sqrt{6}i$
d) $8 + 0i$
e) $0 - i$

2.
a) $\{-4i, 4i\}$
b) $\{-\sqrt{6}i, \sqrt{6}i\}$
c) $\{-3 + \sqrt{5}i, -3 - \sqrt{5}i\}$
d) $\{-2 + 0i, 2 + 0i\}$
e) $\{-i, i\}$
f) $\{-\sqrt{2} + 0i, \sqrt{2} + 0i\}$

3.

a) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

b) $\sqrt{26}$
c) 1
d) 2

4.

a) $-5\sqrt{2}i$
b) $-4\sqrt{2}$
c) $-3\sqrt{2}$
d) $20\sqrt{2}i$
e) $\sqrt{3}i$

5.

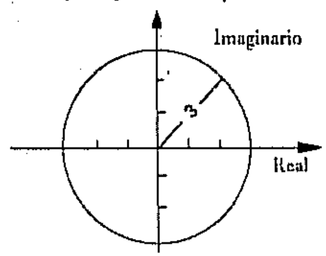
a) Sean $z_1 = a + bi$ $\qquad -z = -a - bi$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Definición.
$|-z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Definición.
$|z| = |-z|$ Propiedad transitiva de las igualdades

b) Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$, $\qquad z_2 = a_2 + b_2 i$
$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

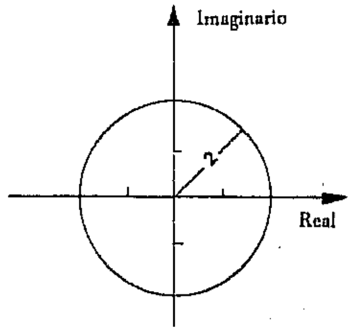
$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2}$$
$$= \sqrt{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 a_2^2}$$
$$= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2}$$
$$|z_1||z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2}$$
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$ Propiedad transitiva de las igualdades

6.

a)

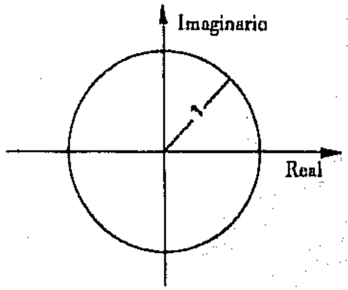


b)

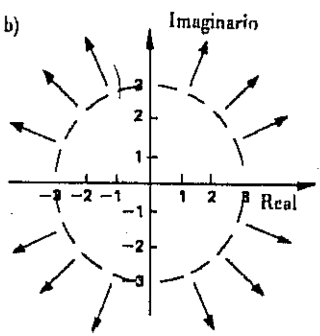

Imaginario
2
Real

7.

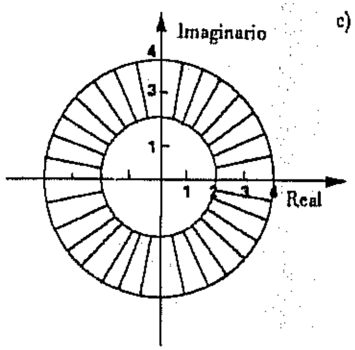
a)


Imaginario
1
Real

b)


Imaginario
3
2
1
−3 −2 −1
−1
1 2 3
Real
−2
−3

c)


Imaginario
4
3
1
1 2 3 4
Real

UNIDAD XI

FUNCIONES CUADRATICAS

Introducción

En esta unidad estudiaremos las funciones cuadráticas y las desigualdades cuadráticas, representación gráfica y métodos de solución.

Por otra parte partiendo de las funciones cuadráticas, se presentan las ecuaciones cuadráticas, indicando lo que se entiende por raíces o ceros, además describiendo sus operaciones y el análisis del discriminante $b^2 - 4ac$ así como su interpretación geométrica.

Finalmente se presentan sistemas de dos ecuaciones una lineal y una cuadrática, o bien, dos cuadráticas exponiendo sus diferentes métodos de solución.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

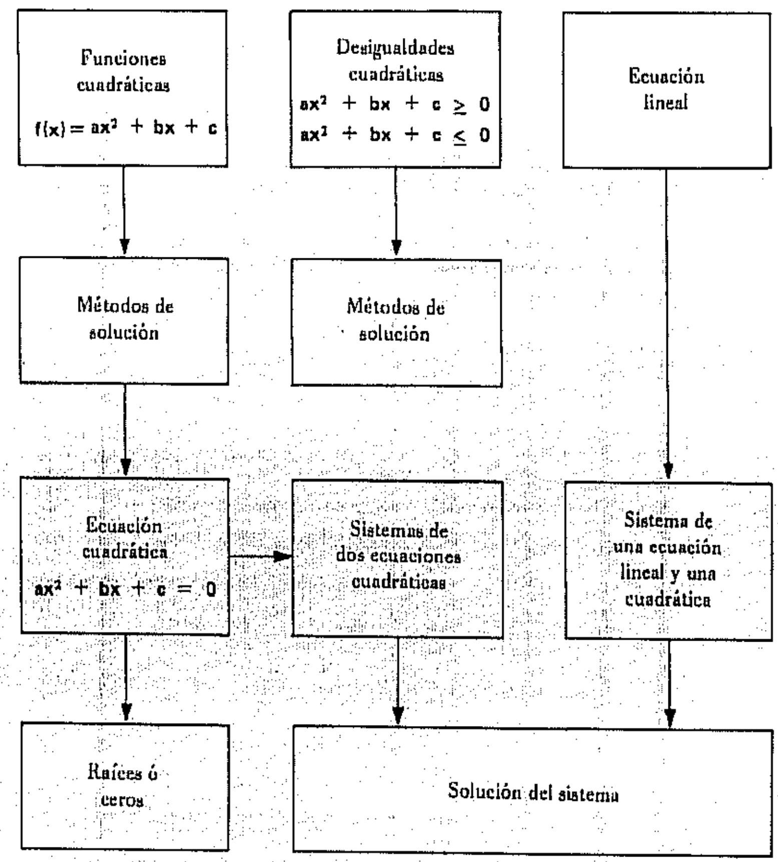
1. Resolverá y graficará funciones cuadráticas.
2. Obtendrá el vértice y trazará la parábola de funciones cuadráticas dadas.
3. Resolverá ecuaciones cuadráticas aplicando alguno de los métodos de solución (gráfico, factorización o fórmula general).
4. Resolverá desigualdades cuadráticas utilizando el método gráfico o el método algebraico.
5. Resolverá ecuaciones de la forma:

   $a(f(x))^n + b(f(x))^{n/2} + c = 0;\ n \in I$

   que contengan radicales, $= 0,\ n \in I$

6. Resolverá sistemas de ecuaciones cuadráticas.

Diagrama temático



Glosario

Función cuadrática: Función definida por la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$

Parábola: Nombre de la gráfica de toda ecuación cuadrática.

Vértice de la parábola: Punto donde la función cuadrática toma su valor máximo o mínimo.

Ecuación cuadrática: Es toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Raíces o ceros de la ecuación: Valores de "X" que hacen cierto la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Raíces imaginarias o complejas: Raíces no reales de la ecuación cuadrática.

Desigualdades cuadráticas: Toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ ó $ax^2 + bx + c \leq 0$

Desigualdad condicional: Desigualdad que es cierta solo para algunos valores de la variable.

Ecuación condicional: Ecuación que es cierta sólo para algunos valores de la variable.

Desigualdad absoluta: Desigualdad que es cierta para todo valor permitido de la variables.

Identidad: Igualdad que es cierta para todo valor permitido de la variable.

Discriminante: $b^2 - 4ac$, a, b, c coeficientes de la ecuación cuadrática.

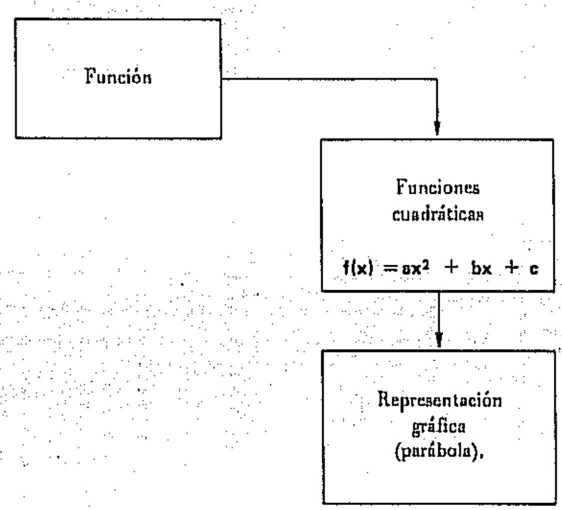
Módulo 9

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Definirá función cuadrática en términos de la ecuación de 2o. grado: $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Graficará funciones cuadráticas en el plano cartesiano.
3. Mencionará cuando la gráfica o parábola de una función cuadrática es cóncava hacia arriba y cuando concáva hacia abajo.
4. Obtendrá mediante una fórmula general el vértice de la parábola de funciones cuadráticas.
5. Resolverá problemas de planteo que involucren funciones cuadráticas.

ESQUEMA-RESUMEN



9.1 La función cuadrática

Una ecuación de 2o. grado es. . .

Vamos a considerar ahora un segundo tipo de función a la que llamaremos **función cuadrática**, y se define de la siguiente forma:

Función cuadrática es una función f definida por la ecuación de segundo grado.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Ejemplo 1: Trácese la gráfica de la **función cuadrática**

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

Para trazar la gráfica de esta ecuación, tabularemos un número suficiente de puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

Dándole valores a la X en la ecuación, tenemos:

Cuando $x = -1$, $y = 2(-1)^2 - 8(-1) + 6 = 16$
Cuando $x = 0$, $y = 2(0)^2 - 8(0) + 6 = 6$
Cuando $x = 1$, $y = 2(1)^2 - 8(1) + 6 = 0$
Cuando $x = 2$, $y = 2(2)^2 - 8(2) + 6 = -2$
Cuando $x = 3$, $y = 2(3)^2 - 8(3) + 6 = 0$
Cuando $x = 4$, $y = 2(4)^2 - 8(4) + 6 = 6$
Cuando $x = 5$, $y = 2(5)^2 - 8(5) + 6 = 16$

Los valores así obtenidos los resumimos en la siguientes tabla:

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	16	6	0	−2	0	6	16

Graficamos todos estos puntos que hemos obtenido en un sistema de coordenadas cartesianas, y los unimos por medio de una línea suave (no tiene segmentos de recta) (Figura 1).

¿Qué nos indica el coeficiente del Término cuadrado?

La gráfica de toda **función cuadrática** se llama **parábola** y sus ramas pueden extenderse hacia arriba o hacia abajo. Cuando el coeficiente de la x^2 es positivo ($a > 0$), la curva es cóncava hacia arriba y cuando es negativo ($a < 0$), la curva es cóncava hacia abajo. Esta proposición no se demostrará en esta sección, se hará cuando hayas

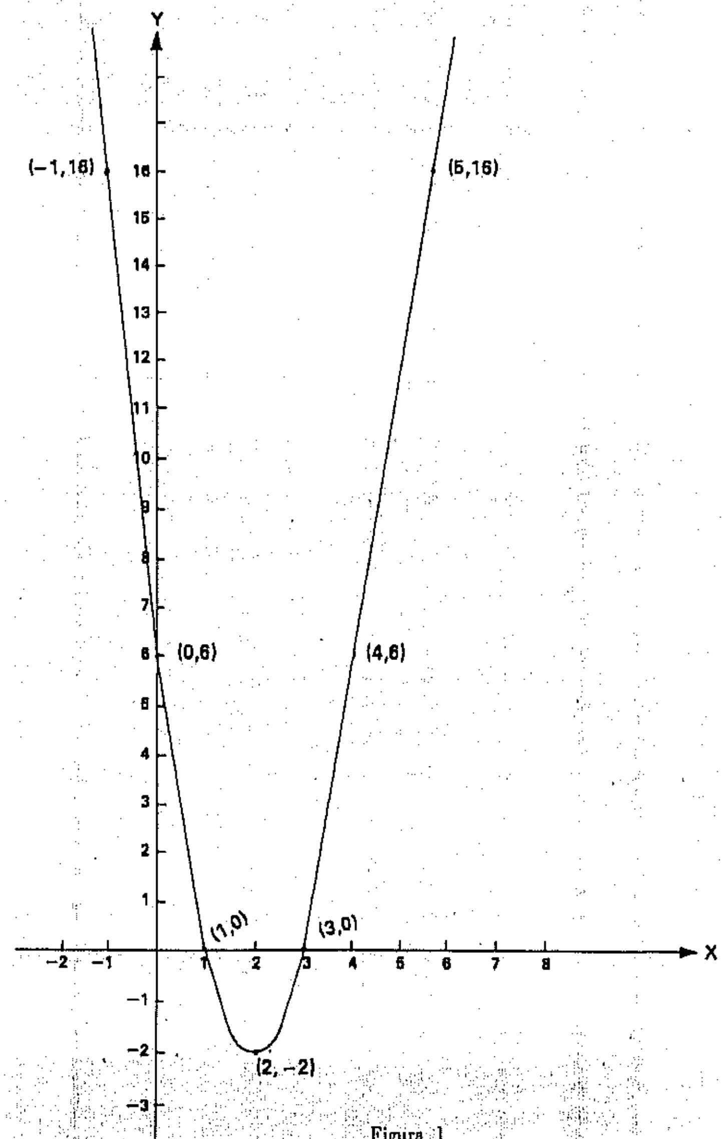


Figura 1

adquirido conocimientos sobre derivados y se estudie esta curva exhaustivamente.

Análisis de una función cuadrática.

Habiendo trazado una función cuadrática particular, podemos ahora hacer un análisis de la función cuadrática general y a partir de este análisis, aprender muchas de las propiedades de la función. Procedemos como sigue, escribiendo

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

sacamos como factor común a

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

asociamos $x^2 + \frac{b}{a}x$

$$y = a[(x^2 + \frac{b}{a}x) + \frac{c}{a}]$$

Le sumamos $(\frac{b}{2a})^2$ a $(x^2 + \frac{b}{a}x)$ para completar el cuadrado perfecto y restamos $(\frac{b}{2a})^2$ dentro del paréntesis rectangular

$$y = a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}]$$

Simplificando esta expresión tenemos:

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}]$$

La función toma su valor máximo y su valor mínimo cuando.

Como $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ la expresión que queda dentro del paréntesis rectangular toma su valor mínimo cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, la función tomará su valor mínimo cuando $x = -\frac{b}{2a}$, siendo este valor igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$ y le llamaremos el mínimo de la función. Si $a < 0$, la función toma su valor máximo cuando $x = -\frac{b}{2a}$, siendo este valor igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$ y le llamaremos el máximo de la función.

En ambos casos, al punto

$$[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}] \qquad (1)$$

se le llama vértice de la parábola. Conocido el vértice y cuando menos dos puntos más, podemos construir la figura con toda facilidad.

Síntesis de los resultados del análisis de la función cuadrática

Haciendo un resumen del análisis anterior tenemos:

1. La gráfica de la función $ax^2 + bx + c$, es una curva en forma de U o en forma de ∩ con su vértice en $[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}]$, llamándose esta curva parábola.
2. La gráfica es simétrica* con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Si $a > 0$, la curva es cóncava hacia arriba y el vértice será el punto más bajo de la gráfica (su y mínima). Si $a < 0$, la curva es cóncava hacia abajo y el vértice será el punto más alto de la gráfica (su y máxima).
4. La gráfica debe intersecar el eje X en dos puntos distintos, ser tangente a él o no intersectarlo en ningún punto.

Ejemplo 2:

Encontrar el vértice de la parábola representada por la ecuación $y = -2x^2 + 2x + 12$. Trazar su gráfica.

En lugar de usar la fórmula que encontramos para el vértice usaremos el proceso de completar el cuadrado perfecto procediendo de la siguiente manera:

$$y = -2x^2 + 2x + 12$$

$$y = -2[(x^2 - x) - 6]$$ Se sacó -2 de factor común.

$$y = -2[(x^2 - x + \frac{1}{4}) - 6 - \frac{1}{4}]$$ Se sumó y restó $\frac{1}{4}$ para completar el cuadrado perfecto

$$y = -2[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}]$$ Efectuando

Luego, el vértice de la parábola está en $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{25}{2}$.

Para trazar la gráfica de la ecuación, se necesitan cuando menos dos puntos más, los que obtenemos dándole valores a la x: cuando $x = -3$, $y = -12$ y cuando $x = 4$, $y = -12$. La gráfica de esta función está dada en la figura 2.

Ejemplo 3:

Usando la fórmula 1, encontrar el vértice de la parábola representada por la ecuación $y = 3x^2 - 4x + 2$.

* Una gráfica es simétrica con respecto a una recta o eje, si al trazar rectas perpendiculares al eje o recta intersecan a la gráfica en puntos que equidistan del eje o recta.

De la fórmula 1 tenemos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad y \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

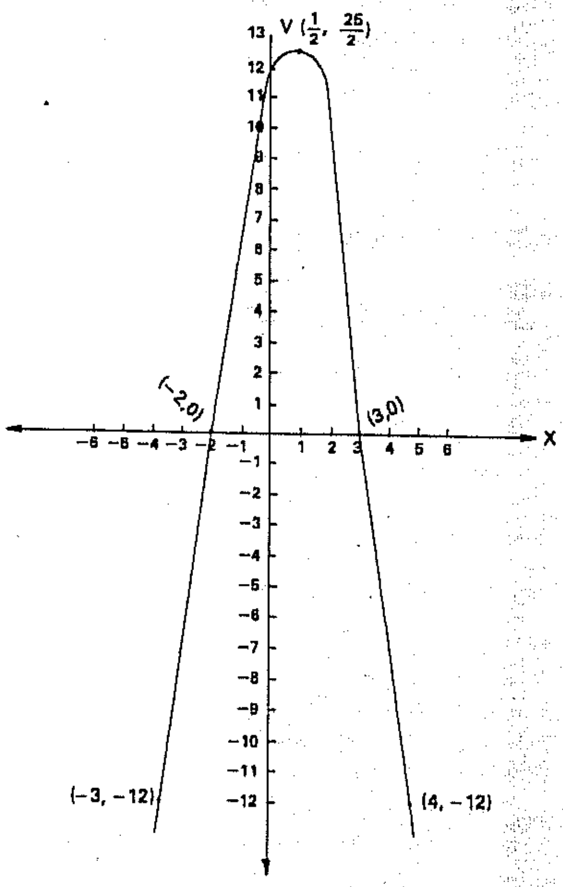


Figura 2

De la ecuación $a = 3$, $b = -4$ y $c = 2$; sustituimos estos valores en la x y en la fórmula, quedándonos:

$$x = -\frac{-4}{2(3)} = -\frac{-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{4(3)(2) - (-4)^2}{4(3)} = \frac{24 - 16}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Luego el vértice de la parábola es el punto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Ejemplo 4:

Encontrar dos números que al sumarse den 12 y su producto sea máximo.

Hagamos

x = uno de los números
z = el otro número
luego, $x + z = 12$

El producto de los dos números lo representamos como y

$$y = xz$$

Resolviendo para z de la ecuación $x + z = 12$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$z = 12 - x$$
$$y = x(12 - x)$$
$$y = 12x - x^2$$
$$y = -x^2 + 12x$$

Como podemos ver, la ecuación $y = -x^2 + 12x$ nos representa una parábola con sus ramas hacia abajo, por lo que su vértice es el punto máximo y por lo tanto el valor de la x del vértice es uno de los números pedidos.

Usando la fórmula 1 tenemos:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2(1)} = -\frac{12}{-2} = 6$$

sustituimos este valor en

$$z = 12 - x = 12 - 6 = 6$$

Luego, los dos números cuya suma es 12 y el producto es máximo, son 6 y 6 con su producto igual a 36.

Prueba otros dos números que sumen 12 y encuentra su producto para que veas que siempre será menor a 36.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. En los siguientes problemas, encuentra el vértice de la parábola y di si la parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

a) $y = 3x^2 - 6x + 10$
b) $y = x^2 + 4x - 3$
c) $y = -2x^2 - 2x + 1$
d) $y = -5x^2 + 15x - 2$
e) $y = 6x^2 - 18x$
f) $y = 10x^2 - 20$
g) $y = x^2 - 8x + 16$
h) $y = -x^2 + 8x + 2$
i) $y = -4x^2 + 4x - 2$
j) $y = -x^2 + 12x$

2. En los siguientes problemas traza la gráfica de la parábola. Usa papel milimétrico.

a) $y = x^2 + 4x - 5$
b) $y = -x^2 - 2x + 8$
c) $y = x^2 + 6x + 9$
d) $y = x^2 + 4$

3.
a) Encontrar dos números que sumen 20 y que su producto sea máximo.
b) Una persona desea cercar un terreno rectangular y dispone de 120 metros de alambre. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que su área sea máxima?
c) La suma de dos números es 20, ¿cuáles son estos números para que la suma de sus cuadrados sea un mínimo?

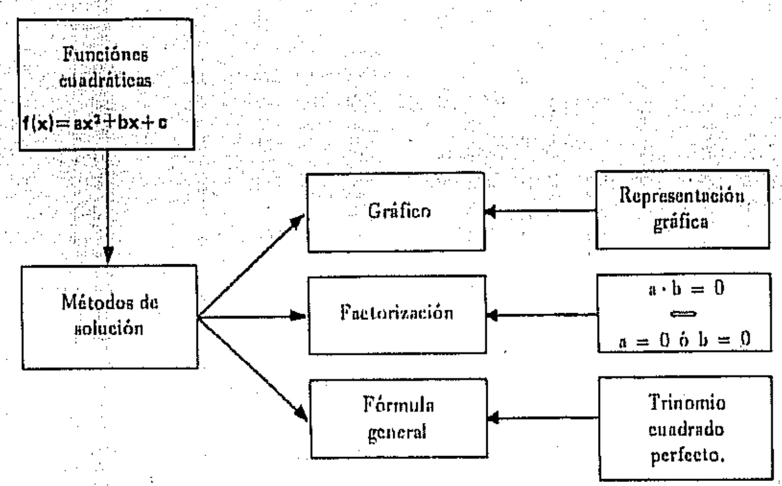
Módulo 10

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Resolverá ecuaciones cuadráticas utilizando el método gráfico.
2. Resolverá ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.
3. Resolverá ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general de solución.

ESQUEMA-RESUMEN



10.1 Métodos de solución para una Ecuación Cuadrática

Determinación de los valores que hacen cierta la ecuación cuadrática.

En la lección anterior, aprendiste que la figura de toda función cuadrática es una **parábola**, la cual puede intersecar el eje **X** en dos puntos distintos, ser tangente o no intersectarlo. Ahora lo que nos interesa es determinar las raíces o ceros de una función cuadrática cualquiera, es decir, nos interesa determinar aquellos valores de x que hacen cierta la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$; para encontrar estas raíces o ceros de la **ecuación cuadrática**, disponemos de varios métodos los cuales estudiaremos a continuación.

10.11 Método gráfico

En este método nos interesa determinar la abscisa de los puntos donde la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, interseca o es tangente al eje **X**.

En el ejemplo 1 del módulo 9, la gráfica de la ecuación $y = 2x^2 - 8x + 6$ interseca al eje **X** en los puntos donde $x = 1$ ó $x = 3$, siendo estos valores los que llamamos raíces o ceros de la ecuación. (Ver figura 1).

Obtención de las raíces de la ecuación por el método gráfico.

En el ejemplo 2 del módulo 9, la gráfica de la ecuación $y = -2x^2 + 2x + 12$ interseca al eje **X** en los puntos donde $x = -2$ ó $x = 3$, siendo estos valores sus raíces o ceros. Estos dos ejemplos bastan para comprender perfectamente en qué consiste el método gráfico; sin embargo, en la práctica se usa poco, ya que si las raíces no son números enteros, los puntos donde la gráfica interseca al eje **X** tendríamos que determinarlos sólo en forma aproximada. Una segunda razón para el poco uso de este método es que disponemos de otros métodos que son más fáciles y precisos para determinar los ceros de la ecuación, y vamos a estudiarlos en seguida.

10.12 Método de factorización

En qué condiciones un factor lo podemos igualar a cero

Este método sólo lo usaremos cuando se pueda factorizar con facilidad el primero miembro de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, y está basado en el hecho de que cada factor se puede igualar a cero si el producto de los factores es cero. (Teorema que ya estudiaste y que dice: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$).

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$ usando el método de factorización.

Puesto que $x^2 - 5x + 6 \equiv (x-3)(x-2)$ la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ la podemos escribir como

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

igualando a cero cada factor tenemos:

$$x - 3 = 0 \quad ó \quad x - 2 = 0$$

resolviendo para x ambas ecuaciones lineales nos queda finalmente

$$x = 3 \quad ó \quad x = 2$$

estos valores son las raíces ó ceros de la ecuación.

Por lo que conjunto solución $= \{3, 2\}$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + x - 6 = 0$ usando el método de factorización.

Factorizamos la ecuación de la siguiente forma:

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

Multiplicamos el coeficiente de x^2 por el término independiente

$$(2)(-6) = -12$$

buscamos ahora dos números que multiplicados den -12 y la suma de ellos sea igual al coeficiente de x; estos dos números son $+4$ y -3 ya que

$$(4)(-3) = -12$$
$$y \quad 4 + (-3) = 1$$

Escribimos la ecuación original descomponiendo el término en x en $4x - 3x$, resultando una ecuación equivalente de la forma

$$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$$

asociamos los dos primeros términos y los dos últimos

$$(2x^2 + 4x) + (-3x - 6) = 0$$
$$(2x^2 + 4x) - (3x + 6) = 0$$

usando la propiedad distributiva por la izquierda en cada uno de los términos tenemos

$$2x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$$

usando la propiedad distributiva por la derecha nos queda

$$(2x - 3)\ (x + 2) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \quad ó \quad x + 2 = 0$$

resolviendo para x en ambas ecuaciones lineales

$$x = \frac{3}{2} \quad ó \quad x = -2$$

estos valores son las raíces o ceros de la ecuación dada.
Conjunto solución $= \{\frac{3}{2}, -2\}$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación cuadrática $6x^2 + 10x - 4 = 0$ usando el método de factorización que se dio en el ejemplo 2. Da la justificación en cada paso siguiendo el proceso del ejemplo 2.

$$
\begin{aligned}
6x^2 + 10x - 4 &= 0 \\
(6)\ (-4) &= -24 \\
(+12)\ (-2) &= -24 \\
+12 + (-2) &= +10 \\
6x^2 + 12x - 2x - 4 &= 0 \\
(6x^2 + 12x) - (2x + 4) &= 0 \\
6x(x + 2) - 2(x + 2) &= 0 \\
(6x - 2)\ (x + 2) &= 0 \\
6x - 2 = 0 \ ó \ x + 2 &= 0 \\
x = \frac{2}{6} \qquad ó \qquad x &= -2 \\
x = \frac{1}{3} \qquad ó \qquad x &= -2
\end{aligned}
$$

Por tanto, las raíces o ceros de la ecuación son $x = \frac{1}{3}$ ó $x = -2$.
Conjunto solución $= \{\frac{1}{3}, -2\}$

Ejemplo 4:

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 4 = 0$ usando el método de factorización.

Este tipo de ecuación no la podemos factorizar sobre el conjunto de los números reales, por lo que tenemos que factorizarla sobre el conjunto de los complejos recordando que $i^2 = -1$, entonces tenemos que

$$x^2 + 4 = (x - 2i)\ (x + 2i) = 0$$

luego $x = 2i$ ó $x = -2i$

Conjunto solución $= \{2i, -2i\}$

10.13 Método de la Fórmula General

Solución de la ecuación cuadrática complementando el cuadrado perfecto.

En muchos casos presenta serias dificultades descomponer en factores la ecuación cuadrática y en algunos otros puede inclusive no haber factores reales, por lo que el método más simple para resolver la ecuación cuadrática es el de la fórmula general, la que deduciremos a partir de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ usando el método de completar un cuadrado perfecto.

Partimos de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	se multiplicó la ecuación por $\frac{1}{a}$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	se sumó a ambos lados de la ecuación $-\frac{c}{a}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	se sumó a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x: $(\frac{b}{2a})^2$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$	se sumaron las fracciones del lado derecho de la ecuación
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	se reacomodó el numerador de la fracción del lado derecho de la ecuación
$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	se escribió el lado izquierdo de la ecuación como un binomio al cuadrado

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$ se sacó raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ se sacó raíz cuadrada al término $4a^2$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ se sumó a ambos lados de la igualdad $-\frac{b}{2a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ se sumaron las dos fracciones

A la expresión $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se le conoce como fórmula general para la solución de una ecuación cuadrática y las dos raíces o ceros de la ecuación cuadrática quedan expresadas como:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 4 = 0$, usando la fórmula general. De la ecuación tenemos que $a = 1$, $b = -4$ y $c = 4$.
Sustituyendo estos valores en la fórmula general queda

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

Efectuando y simplificando

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$

por lo que las raíces o ceros de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ó \quad x_2 = \frac{4 - 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Conjunto solución = $\{2, 2\}$

Ejemplo 6:

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 10 = 0$ usando la fórmula general. De la ecuación tenemos que $a = 1$, $b = 3$ y $c = -10$.
Sustituyendo estos valores en la fórmula general queda

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$

efectuando y simplificando

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ó \quad x_2 = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Por lo que las raíces o ceros de la ecuación cuadrática son $x_1 = 2$ ó $x_2 = -5$.

Conjunto solución = $\{2, -5\}$

Ejemplo 7:

Resolver la ecuación cuadrática $3x^2 - 4x + 1 = 0$ usando la fórmula general. De la ecuación tenemos que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.
Sustituyendo estos valores en la fórmula general queda

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

Efectuando y simplificando

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}$$

$$x_1 = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6}$$

por lo que las dos raíces o ceros de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Conjunto solución $= \{1, \frac{1}{3}\}$

Ejemplo 8:

Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 - 3x - 4 = 0$ cuando la fórmula general. De la ecuación tenemos que $a = 2$, $b = -3$ y $c = -4$.

Sustityendo estos valores en la fórmula general que

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

Efectuando y simplificando

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+32}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

por lo que las raíces o ceros de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{4} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{4}$$

Ejemplo 9:

Resolver la ecuación cuadrática $5x^2 - 4x + 1 = 0$ usando la fórmula general. De la ecuación tenemos que: $a = 5$, $b = -4$ y $c = 1$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula general queda

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

Efectuando y simplificando

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{10}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{10}$$

Puesto que lo que está dentro del radical es un número negativo, las raíces o ceros de la ecuación cuadrática no son reales, de tal

modo que tendrás que usar lo que aprendiste en la lección 4 de la Unidad X. Lo hacemos de la siguiente manera:

$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)\,4}$

$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}$	Leyes de la multiplicación de radicales del mismo orden
$= i\sqrt{4}$	definición de $\sqrt{-1} = i$
$= i \cdot 2$	se sacó raíz cuadrada a 4
$= 2i$	postulado conmutativo

por lo que $\sqrt{-4} = 2i$

sustityendo este valor en $x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{10}$ queda $x = \frac{4 \pm 2i}{10}$

Las dos raíces o ceros de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{4+2i}{10} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{4-2i}{10}$$

Simplificando

$$x_1 = \frac{2+i}{5} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{2-i}{5}$$

Conjunto solución $= \{\frac{2+i}{5}, \frac{2-i}{5}\}$

A este tipo de raíces se les llama imaginarias o complejas.

Ejemplo 10:

Resolver la ecuación cuadrática $3x^2 + 4x + 2 = 0$ usando la fórmula general. De la ecuación tenemos que $a = 3$, $b = 4$ y $c = 2$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación general queda

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

Efectuando y simplificando

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm i\sqrt{8}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm i\sqrt{4 \cdot 2}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2i\sqrt{2}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

por lo que las dos raíces o ceros de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-2 + i\sqrt{2}}{3} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{-2 - i\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Conjunto solución} = \left\{\frac{-2 + i\sqrt{2}}{3}, \frac{-2 - i\sqrt{2}}{3}\right\}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Encuentra los ceros o raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas usando el método de factorización.

a) $3x^2 + 11x + 10 = 0$
b) $x^2 + 5x - 24 = 0$
c) $-2x^2 - 7x + 5 = 0$
d) $16x^2 + 22x - 3 = 0$
e) $a^2x^2 - b^2 = 0$
f) $-15x^2 - 7x + 2 = 0$
g) $x^2 + 8x + 15 = 0$
h) $x^2 + x - 30 = 0$
i) $8x^2 + 8x - 6 = 0$
j) $x^2 - 8x + 16 = 0$
k) $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$
l) $6a^2x^2 + 24ax + 24 = 0$
m) $x^2 - x - 90 = 0$
n) $14x^2 - 33x - 5 = 0$

o) $x^2 + x - 42 = 0$
p) $x^2 + 9 = 0$
q) $x^2 + 16 = 0$
r) $x^2 + 5 = 0$
s) $x^2 + 12 = 0$
t) $x^2 + 20 = 0$

2. Encuentra las raíces o ceros de las siguientes ecuaciones cuadráticas usando el método de la fórmula general.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
b) $6x^2 - 7x - 5 = 0$
c) $4x^2 - 8x - 21 = 0$
d) $5x^2 + 3x - 1 = 0$
e) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
f) $4x^2 - 3x + 6 = 0$
g) $21x^2 - 46x - 7 = 0$
h) $36x^2 - 12x + 1 = 0$
i) $4x^2 - 5x - 7 = 0$
j) $x^2 + 6x + 5 = 0$
k) $x^2 + x + 5 = 0$
l) $x^2 + 10x + 41 = 0$
m) $9x^2 - x - 5 = 0$
n) $2x^2 + 6x - 16 = 0$
o) $100x^2 - 60x + 9 = 0$

Módulo 11

OBJETIVOS ESPECIFICOS

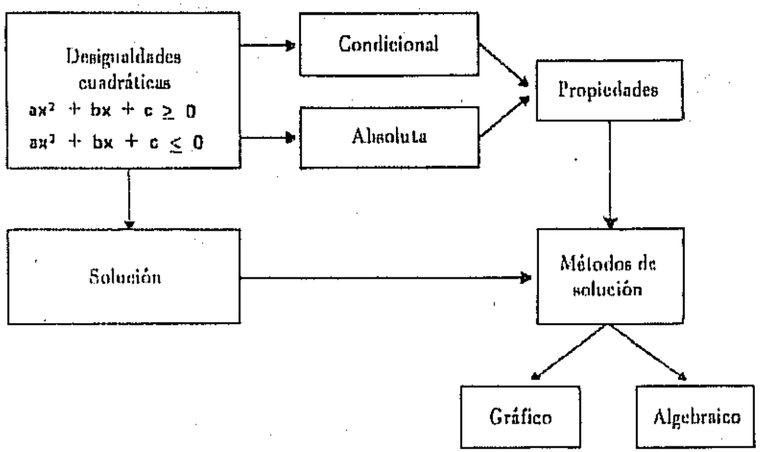
Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

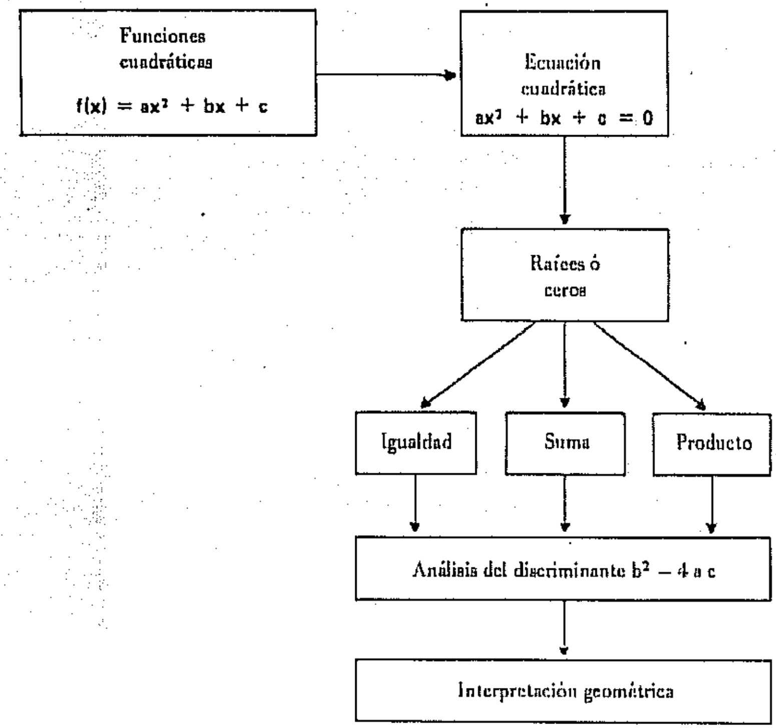
1. Identificará desigualdades cuadráticas.
2. Aplicará el método gráfico en la resolución de desigualdades cuadráticas.
3. Aplicará el método algebraico en la resolución de desigualdades cuadráticas.
4. Obtendrá la suma y el producto de las raíces de ecuaciones cuadráticas, sin resolverlas.
5. Resolverá ecuaciones que contengan radicales.
6. Resolverá ecuaciones de la forma:

   $a[f(x)]^{n} + b[f(x)]^{\frac{n}{2}} + c = 0, n \in I$

   reduciéndolas a la forma cuadrática.

ESQUEMA-RESUMEN





11.1 Desigualdades Cuadráticas

¿Cuántos tipos de desigualdades cuadráticas existen?

En la Unidad VII estudiaste **desigualdades lineales** y aprendiste cómo se resuelven. Ahora estudiarás otro tipo de desigualdades que llamaremos **desigualdades cuadráticas** siendo su forma una de las dos siguientes expresiones:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ó} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

Tenemos dos tipos de desigualdades: la **desigualdad condicional**, que corresponde a la **ecuación condicional**, y la **desigualdad absoluta**, que corresponde a la **identidad**; en este tema solo estudiaremos el primer tipo.

> **Definición:** Una desigualdad es condicional si es cierta sólo para algunos valores de la variable o variables que en ella intervienen.

Ejemplo:

La desigualdad $3x - 6 < 0$ es una **desigualdad condicional** puesto que sólo es cierta para valores de la x menores que 2.

> **Definición:** Una desigualdad es absoluta si es cierta para todos los posibles valores de la variable o variables que en ella intervienen.

Ejemplo:

$x^2 + y^2 + 1 > 0$ es una desigualdad absoluta puesto que es cierta para todos los valores reales de la x y y, puesto que todo número real elevado al cuadrado es mayor ó igual a cero.

Antes de estudiar los diferentes métodos para resolver una **desigualdad cuadrática**, es útil que recuerdes las siguientes propiedades de las desigualdades.

Recordemos las propiedades de las desigualdades.

1. En toda desigualdad podemos sumar o restar un mismo número a ambos miembros sin que la desigualdad se altere.
2. El sentido de una desigualdad no se invierte si ambos miembros se multiplican o dividen por un mismo número positivo.
3. El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican o dividen por un mismo número negativo.

Estudiaremos dos métodos para resolver una desigualdad cuadrática: el método gráfico y el método algebraico.

11.11 Método Gráfico

Por medio de un ejemplo, estudiaremos este método.

Ejemplo:

Resolver gráficamente la desigualdad $x^2 - 5x > -6$.

Primero es necesario que la desigualdad nos quede en la forma $f(x) > 0$, por lo que sumamos a ambos lados $+6$, quedándonos

$$x^2 - 5x + 6 > -6 + 6$$
$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Si hacemos el miembro de la izquierda igual a y, tenemos

$$y = x^2 - 5x + 6$$

buscamos ahora valores de x tales que $y > 0$.

Construimos la gráfica de $y = x^2 - 5x + 6$ usando el método de tabulación:

Dándole valores a la x en la ecuación, tenemos:

Cuando $x = -1$, $\quad y = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 12$
Cuando $x = 0$, $\quad y = (0)^2 - 5(0) + 6 = 6$
Cuando $x = 1$, $\quad y = (1)^2 - 5(1) + 6 = 2$
Cuando $x = 2$, $\quad y = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$
Cuando $x = 3$, $\quad y = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0$
Cuando $x = 4$, $\quad y = (4)^2 - 5(4) + 6 = 2$
Cuando $x = 5$, $\quad y = (5)^2 - 5(5) + 6 = 6$
Cuando $x = 6$, $\quad y = (6)^2 - 5(6) + 6 = 12$

los valores así obtenidos los resumimos en la siguiente tabla:

x	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	12	6	2	0	0	2	6	12

De la tabla podemos ver que la gráfica interseca al eje X en $x = 2$ ó $x = 3$, porque para estos valores $y = 0$; y necesitamos un punto intermedio entre estos dos valores de x, con el objeto de que te des cuenta que esta gráfica no tiene ningún segmento rectilíneo.

Para $x = \frac{5}{2}$ $\quad y = -\frac{1}{4}$

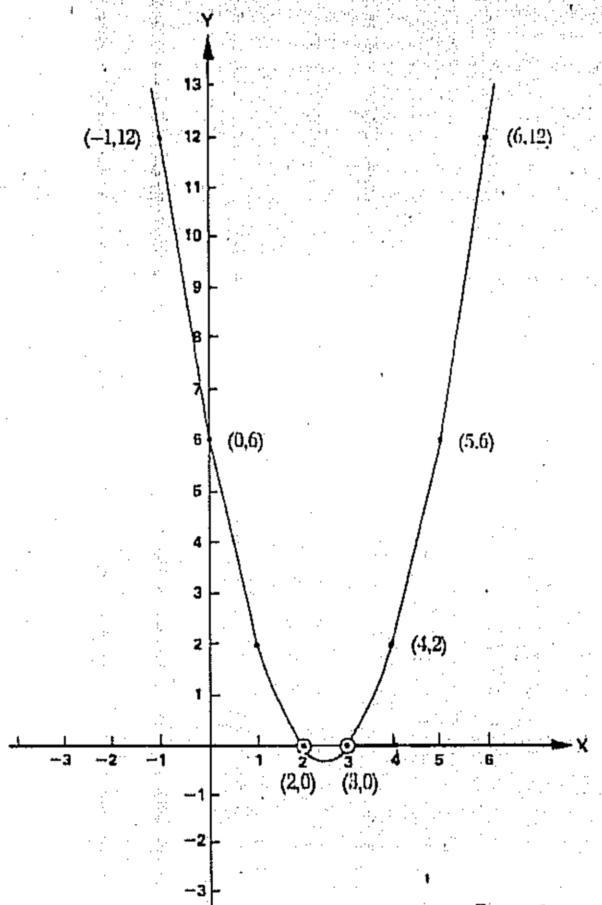


Figura 1

Construimos la gráfica con los valores obtenidos. (Ver figura 1)

De la gráfica vemos que $y > 0$ (queda arriba del eje X) para toda $x > 3$ ó $x < 2$, por lo que la solución de la desigualdad $x^2 - 5x > -6$ es:

$$\{x \in R \mid x > 3 \text{ ó } x < 2\}$$

En general, para obtener gráficamente la solución de una desigualdad cuadrática, se hace lo siguiente:

Método para obtener la solución de la desigualdad.

1. Se transforma la desigualdad dada en otra equivalente de la forma $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$, haciendo uso de las propiedades de las desigualdades.
2. Se iguala la expresión resultante a una nueva variable (y).
3. Graficamos la ecuación obtenida en el paso 2.
4. Si $f(x) > 0$ en el paso 1 la solución es todos aquellos valores de x para los cuales la gráfica queda arriba del eje X, y si $f(x) < 0$ la solución es todos aquellos valores de x para los cuales la gráfica queda abajo del eje X.

Ejemplo:

Resolver gráficamente la siguiente desigualdad: $2x^2 - 10 < x$.

Sumamos $-x$ a ambos lados, quedando

$$2x^2 - x - 10 < 0$$

Hacemos $y = 2x^2 - x - 10$

Obtenemos valores para la y dándole valores a la x.

Cuando $x = -3$, $\quad y = 2(-3)^2 - (-3) - 10 = 11$
Cuando $x = -2$, $\quad y = 2(-2)^2 - (-2) - 10 = 0$
Cuando $x = -1$, $\quad y = 2(-1)^2 - (-1) - 10 = 7$
Cuando $x = 0$, $\quad y = 2(0)^2 - (0) - 10 = 10$
Cuando $x = 1$, $\quad y = 2(1)^2 - (1) - 10 = -9$
Cuando $x = 2$, $\quad y = 2(2)^2 - (2) - 10 = -4$
Cuando $x = 2.5$, $\quad y = 2(2.5)^2 - (2.5) - 10 = 0$
Cuando $x = 3$, $\quad y = 2(3)^2 - (3) - 10 = 5$

Los valores así obtenidos los resumimos en la siguiente tabla:

x	−3	−2	−1	0	1	2	2.5	3
Y	11	0	−7	−10	−9	−4	0	5

Construimos la gráfica usando los valores de la tabla anterior.

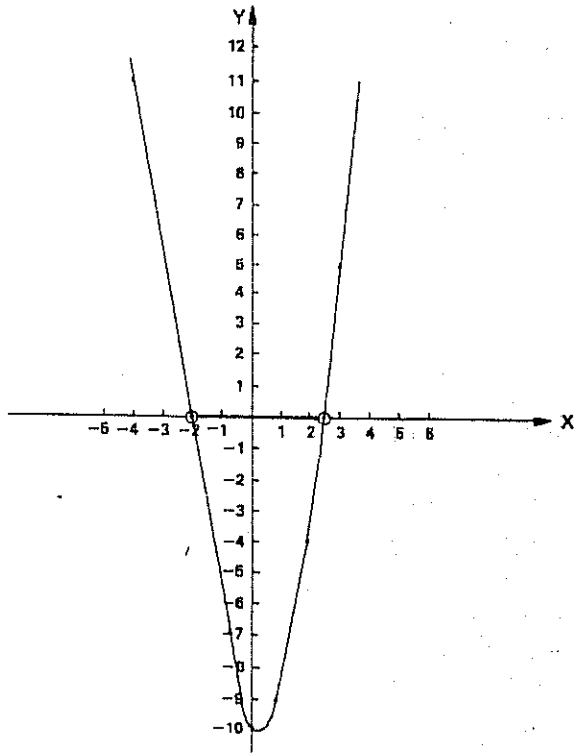


Figura 2

En la gráfica vemos que $f(x) < 0$ (la gráfica queda debajo del eje **X**) para $x < \frac{5}{2}$ y $x > -2$, por lo que la solución es

$$\{x \in R \mid -2 < x < \tfrac{5}{2}\}$$

11.12 Método Algebraico

Usaremos algunos ejemplos para estudiar este método y después indicaremos todos los pasos a seguir para obtener la solución de la **desigualdad cuadrática.**

Ejemplo:

Resolver algebraicamente la desigualdad $3x^2 > 15 - 4x$

Sumando $-15 + 4x$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$3x^2 + 4x - 15 > 0$$

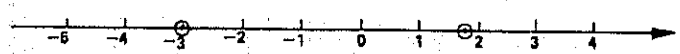
Hacemos $f(x) = 3x^2 + 4x - 15$

Se encuentran los ceros de la función por cualquiera de los métodos que ya conoces. En este ejemplo lo hacemos por factorización quedando

$$f(x) = (3x - 5)\ (x + 3)$$

Siendo los ceros $x = \frac{5}{3}$ ó $x = -3$, si graficamos estos puntos en el eje **X**, tendríamos los siguientes intervalos

$-\infty < x < -3$ $\qquad -3 < x < \frac{5}{3}$ $\qquad \frac{5}{3} < x < \infty$



$x = -3$ $\qquad x = \frac{5}{3}$

Puesto que $3x^2 + 4x - 15 = (3x - 5)\ (x + 3)$ escribimos la desigualdad como

$$(3x - 5)\ (x + 3) > 0$$

que es equivalente a la desigualdad original y dado que son dos factores, su producto será mayor que 0 si ambos son positivos o si ambos son negativos. Analizamos el signo de los factores numéricos en cada uno de los intervalos.

$-\infty < x < -3$	$-3 < x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \infty$
$(-)\ (-) > 0$	$(-)\ (+) < 0$	$(+)\ (+) > 0$

Lo hicimos tomando un valor de la x que quede dentro del intervalo, y lo sustituimos en cada uno de los factores considerando sólo el signo del factor numérico que es lo que nos interesa.

Podemos ver que el signo de dos factores es negativo en el intervalo $-\infty < x < -3$, y que los dos factores son positivos en el intervalo $\frac{5}{3} < x < \infty$ por lo que la solución de la desigualdad dada es:

$$\{x \in R \mid -\infty < x < -3 \quad ó \quad \frac{5}{3} < x < \infty\}$$

Ejemplo:

Resolver el ejemplo anterior considerando la desigualdad como menor que (<) en lugar de mayor que (>).

Escribimos la desigualdad factorizada como

$$(3x - 5) \quad (x + 3) < 0$$

Vemos que en el intervalo $-3 < x < \frac{5}{3}$ el primer factor es negativo y el segundo es positivo, entonces su producto es menor que cero, por lo que la solución de la desigualdad es:

$$\{x \in R \mid -3 < x < \frac{5}{3}\}$$

Pasos para obtener la solución de la desigualdad cuadrática.

A partir de los ejemplos anteriores, podemos deducir los pasos para obtener la solución de una desigualdad cuadrática por el método algebraico:

1. Se transforma la desigualdad dada a una equivalente de la forma $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$. Si la desigualdad está en una de estas formas, se omite este paso.
2. Se determinan los ceros de la función obtenida por cualquiera de los métodos ya conocidos.
3. Se encuentran los intervalos tomando en cuenta los ceros obtenidos.
4. Se determina el signo de la función en cada uno de los intervalos obtenidos en el paso anterior.
5. La solución de la desigualdad es el intervalo o intervalos que la satisfagan.

Ejemplo:

Resolver la desigualdad $2x^2 + 2x - 5 > 0$ usando el método algebraico.

Hacemos $f(x) = 2x^2 + 2x - 5$ y encontramos los ceros de esta función usando la fórmula general.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(2)\ (-5)}}{2(2)}$$

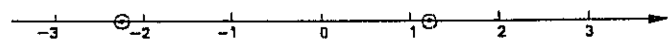
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 40}}{4}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{44}}{4} = \frac{-2 + 6.64}{4} = 1.16 \quad \text{aproximadamente}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{44}}{4} = \frac{-2 - 6.64}{4} = -2.16 \quad \text{aproximadamente}$$

Graficamos estos valores en el eje X, quedándonos como sigue:



$x_2 = -2.16$ $\qquad$ $x_1 = 1.16$

En seguida analizamos el valor de $f(x)$ en cada uno de los intervalos.

$-\infty < x < -2.16$	$-2.16 < x < 1.16$	$1.16 < x < \infty$
$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$

De acuerdo con el valor de $f(x)$ la solución es

$$\{x \in R \mid -\infty < x < -2.16 \quad ó \quad 1.16 < x < \infty\}$$

En este ejemplo $f(x)$ no se factorizó debido a que los ceros no son números racionales por lo que el valor de $f(x)$ se encontró sustituyendo la x de cada intervalo directamente en

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 5.$$

11.2 Relaciones, entre los ceros o raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática

¿Qué relaciones importantes podemos establecer entre los ceros o raíces y los coeficientes?

En el módulo 10, se expresaron los ceros o raíces de la ecuación cuadrática en términos de los coeficientes a, b y c. Ahora, encontraremos otras relaciones importantes entre los ceros o raíces y los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática.

Sean r_1 y r_2 los ceros o raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

donde

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sumando las dos raíces, obtenemos

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b - b}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a}$$

$$\boxed{r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}}$$

Si multiplicamos r_1 por r_2, obtenemos

$$r_1 \cdot r_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\boxed{r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}}$$

Ejemplo:

Sin resolver la ecuación $2x^2 - 4x + 8 = 0$, determínese la suma y el producto de sus raíces.

De la ecuación tenemos que $a = 2$, $b = -4$ y $c = 8$, por lo que

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

y

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{2} = 4$$

Ejemplo:

Sin resolver, formar una ecuación cuadrá cuyas raíces sean el cuadrado de las raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación dada, en la que $a = 1$, $b = -5$ y $c = 6$, luego

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \qquad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

y puesto que $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$, la suma de las nuevas raíces deberá ser

$$R_1 + R_2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 = (5)^2 - 2(6) = 25 - 12 = 13$$

y el producto debe ser

$$(r_1 \cdot r_2)^2 = (6)^2 = 36$$

Entonces, la ecuación que se busca es

$$x^2 - 13x + 36 = 0. \quad (\text{¿Por qué?})$$

Si resuelves esta ecuación por alguno de los métodos que aprendiste, las raíces que encontrarás son $r_1 = 4$ ó $r_2 = 9$ que son el cuadrado de las raíces de la ecuación dada.

¿A qué llamamos discriminante?

Si le llamamos **discriminante** a la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece dentro del radical en la fórmula general, del valor del **discriminante** dependerá qué tipo de raíces o ceros tiene una **ecuación cuadrática:**

1. Si $b^2 - 4ac = 0$ las dos raíces son iguales

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Ejemplo: 5 del módulo 10.

2. Si $b^2 - 4ac > 0$ y tiene raíz exacta las dos raíces serán racionales y diferentes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos 6 y 7 del módulo 10.

3. Si $b^2 - 4ac > 0$ y no tiene raíz exacta las dos raíces serán diferentes e irracionales.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: 8 del módulo 10.

4. Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces serán imaginarias.

Ejemplos 9 y 10 del módulo 10.

Si en lugar de considerar las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ consideramos la gráfica de

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

tendríamos lo siguiente:

1. Si $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de la parábola tiene su vértice en el eje X.
2. Si $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica de la parábola interseca al eje X en dos puntos reales.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de la parábola no interseca ni toca al eje X.

Ejemplo:

Sin resolver la ecuación, determinar cómo son las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

dado que $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(-6) = 16 + 48 = 64$$

ya que $b^2 - 4ac > 0$ y cuadrado perfecto las raíces serán racionales y desiguales.

Ejemplo:

Sin resolver la ecuación, determinar cómo son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 3x + 10 = 0$.

De la ecuación $a = 1$, $b = -3$ y $c = 10$

Sustituyendo estos valores en el discriminante tenemos

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(10) = 9 - 40 = -31$$

y como $b^2 - 4ac < 0$ las raíces de la ecuación serán imaginarias.

Ejemplo:

¿Cómo debe ser K para que las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x + K = 0$ sean iguales?

Para que las raíces de una ecuación cuadrática sean iguales, $b^2 - 4ac = 0$.

De la ecuación tenemos $a = 2$, $b = -3$ y $c = K$

Sustituimos estos valores en el discriminante y lo igualamos a cero, quedándonos

$$(-3)^2 - 4(2)(K) = 0$$
$$9 - 8K = 0$$

Resolvemos para K

$$K = \frac{9}{8}$$

Por lo tanto, para que la ecuación $2x^2 - 3x + K = 0$ tenga raíces iguales, $K = \frac{9}{8}$

11.3 Ecuaciones con Radicales

Estudiaremos ahora, un tipo de ecuaciones en las que la variable puede aparecer dentro de un radical de segundo orden, como por ejemplo:

$$\sqrt{x + 1} + 1 = \sqrt{2x + 2}$$

ó

$$x + \sqrt{x - 1} = 3$$

Si la ecuación tiene más de un radical.

En esta sección desarrollaremos un método para resolver ecuaciones de este tipo, método que consiste en dejar en un lado de la igualdad un radical solamente y elevar después al cuadrado ambos miembros de la ecuación con lo que se elimina el radical que quedó solo en un lado de la igualdad; en caso de que la ecuación tenga más de un radical, este proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta que se elimine el último radical; resolviendo después la ecuación resultante por alguno de los métodos ya conocidos.

Cuando se resuelven ecuaciones de este tipo es necesario probar las raíces obtenidas en la ecuación original, ya que al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, a menudo se introducen raíces que satisfacen la ecuación final pero que son extrañas a la ecuación original.

Resolveremos algunos ejemplos que nos ilustrarán diferentes casos con ecuaciones de este tipo.

Ejemplo: Resolver $\sqrt{3x+4} = 4$

Como esta ecuación contiene sólo un radical, lo eliminamos elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

$$(\sqrt{3x+4})^2 = 4^2$$
$$3x + 4 = 16$$
$$3x = 16 - 4$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Sustituimos $x = 4$ en la ecuación original, y comprobamos que sí la satisface

$$\sqrt{3(4)+4} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$

Como la ecuación tiene dos radicales sumamos a ambos lados de la ecuación $\sqrt{x-3}$ para que quede sólo un radical en un lado de la ecuación, y después elevamos ambos miembros al cuadrado, quedándonos

$$(\sqrt{x+5})^2 = (2 + \sqrt{x-3})^2$$
$$x + 5 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3$$

reduciendo

$$x + 5 = 1 + 4\sqrt{x-3} + x$$

sumamos -1 $-x$ a ambos lados de la ecuación

$$x + 5 - 1 - x = 4\sqrt{x-3}$$

reduciendo

$$4 = 4\sqrt{x-3}$$

elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$16 = 16\,(x-3)$$
$$16 = 16x - 48 \qquad \text{efectuando}$$
$$16 + 48 = 16x \qquad \text{sumando a ambos lados } +48$$
$$64 = 16x \qquad \text{efectuando}$$
$$\frac{64}{16} = x \qquad \text{se dividió ambos lados entre 16}$$
$$4 = x \qquad \text{efectuando}$$
$$x = 4 \qquad \text{simetría de la igualdad}$$

Sustituimos $x = 4$ en la ecuación original y comprobamos que sí la satisface

$$\sqrt{4+5} - \sqrt{4-3} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$$

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x+3} - \sqrt{8x+1} = -1$

Sumamos a ambos lados de la ecuación $\sqrt{8x+1}$

$$\sqrt{x+3} = -1 + \sqrt{8x+1}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$x + 3 = +1 - 2\sqrt{8x+1} + 8x + 1$$

Reduciendo y dejando de un solo lado el radical

$$-7x + 1 = -2\sqrt{8x+1}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$49x^2 - 14x + 1 = 4(8x+1)$$

Efectuando $\quad 49x^2 - 14x + 1 = 32x + 4$

Reduciendo a una ecuación cuadrática

$$49x^2 - 46x - 3 = 0$$

Resolvemos esta ecuación usando la fórmula general

$$x = \frac{-(-46) \pm \sqrt{(46)^2 - 4(49)(-3)}}{2(49)}$$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{2116 + 588}}{98}$$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{2704}}{98}$$

$$x = \frac{46 \pm 52}{98}$$

$$x_1 = \frac{46 + 52}{98} = 1$$

$$x_2 = \frac{46 - 52}{98} = \frac{-6}{98}$$

Si sustituimos $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{-6}{98}$ en la ecuación original, encontramos que sólo $x_1 = 1$ la satisface por lo que concluimos que esta ecuación tiene sólo una raíz, siendo x_2 una raíz extraña a la ecuación original.

11.4 Ecuaciones que se pueden reducir a la forma cuadrática

¿Si tenemos una ecuación, cómo la podemos reducir a la forma cuadrática?

Si tenemos una ecuación de la forma

$$a\,[f(x)]^n + b\,[f(x)]^{\frac{n}{2}} + c = 0,\quad n \in I$$

decimos que es de forma cuadrática, si el símbolo $f(x)$ representa una expresión e x, como por ejemplo:

$$2(3x^2 + 1)^2 + 4(3x^2 + 1) - 2 = 0;\quad f(x) = 3x^2 + 1$$

y $$3\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right)^2 - 5\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right) + 3 = 0;\quad f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

El proceso para resolver este tipo de ecuaciones, lo ilustraremos mediante algunos ejemplos.

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 6 = 0$$

Hagamos

$$z = (x^2 - 2x)$$
$$z^2 = (x^2 - 2x)^2$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación original, queda

$$z^2 - z - 6 = 0$$

Resolvemos esta ecuación cuadrática en z usando cualquiera de los métodos conocidos (en este caso la resolveremos por el método de factorización) y procedemos como sigue:

$$z^2 - z - 6 = 0$$

Factorizando

$$(z - 3)\,(z + 2) = 0$$
$$z = 3 \text{ ó } z = -2$$

Sustituimos cada uno de estos valores de z en la expresión $z = x^2 - 2x$, resultando dos ecuaciones cuadráticas en x.

$$3 = x^2 - 2x, \qquad -2 = x^2 - 2x$$

Resolvemos cada una de estas ecuaciones:

$$3 = x^2 - 2x \qquad\qquad -2 = x^2 - 2x$$
$$0 = x^2 - 2x - 3 \qquad\qquad 0 = x^2 - 2x + 2$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$(x - 3)\,(x + 1) = 0 \qquad\qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)\,(2)}}{2(1)}$$
$$x = 3 \text{ ó } x = -1 \qquad\qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$
$$x = 1 \pm i$$

Luego, las cuatro raíces o ceros de la ecuación original, son $x = 3$,

$$x = -1,\; x = 1 + i \;\text{ y }\; x = 1 - i$$

Conjunto solución $= \{3,\ -1,\ 1 + i,\ 1 - i\}$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación:

$$2\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^2 - 2\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = 24$$

Hagamos

$$z = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$z^2 = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^2$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación original, quedando

$$2z^2 - 2z - 24 = 0$$

Resolvemos

$$(2z+6)(z-4) = 0$$

$$2z + 6 = 0 \qquad z - 4 = 0$$

$$z = -3 \qquad z = 4$$

Sustituimos cada uno de estos valores de en la expresión

$z = \frac{3x-1}{x+2}$, y resolvemos para x

$$-3 = \frac{3x-1}{x+2} \qquad 4 = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$-3(x+2) = 3x - 1 \qquad 4(x+2) = 3x - 1$$

$$-3x - 6 = 3x - 1 \qquad 4x + 8 = 3x - 1$$

$$-6x = 5 \qquad x = -1 - 8$$

$$x_1 = -\frac{5}{6} \qquad x_2 = -9$$

Luego, las raíces o ceros de la ecuación original son

$$x_1 = -\frac{5}{6} \text{ ó } x_2 = -9$$

Conjunto solución $= \{-\frac{5}{6}, -9\}$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Resolver gráficamente las desigualdades de los siguientes problemas

a) $x^2 - x > 20$
b) $x^2 - 9 < 0$
c) $x^2 > 4x$
d) $x^2 - 4x > -4$
e) $x^2 - 6x < -9$
f) $3x^2 < 4x + 15$
g) $x^2 + 1 > 0$
h) $x^2 + 2x + 1 < 0$

2. Resolver algebraicamente las desigualdades de los siguientes problemas.

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$
b) $2x^2 + x - 3 > 0$
c) $x^2 - 4x < -4$
d) $x^2 > -6x - 9$
e) $(7x + 1)(2x + 3) < 0$
f) $(5x - 6)(8x + 10) > 0$
g) $2x^2 + 3x - 7 < 0$
h) $x^2 - 6x + 7 > 0$
i) $x^2 + 2x + 4 < 0$
j) $x^2 + 2x + 4 > 0$
k) $(x - 7)(x + 8) > 0$
l) $3x^2 + 2x + 1 < 0$

3. En los problemas siguientes, encontrar una ecuación cuadrática con coeficientes enteros que tenga los siguientes números como raíces.

a) $x_1 = 3, \; x_2 = 2$
b) $x_1 = \frac{1}{2}, \; x_2 = -3$
c) $x_1 = 0, \; x_2 = 5$
d) $x_1 = -\frac{2}{3}, \; x_2 = \frac{1}{3}$
e) $x_1 = \sqrt{2}, \; x_2 = -\sqrt{2}$

4. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean los cuadrados de las raíces de $x^2 - 2x - 8 = 0$.

5. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean el triple de las raíces de la ecuación. $x^2 - 3x + 2 = 0$.

6. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean los recíprocos de las raíces de la ecuación. $4x^2 + 4x - 3 = 0$.

7. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean un cuarto de las raíces de la ecuación. $x^2 - 4x - 32 = 0$.

8. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean la mitad de las raíces de la ecuación. $4x^2 - 8x + 3 = 0$.

9. Encontrar el valor de K para que la ecuación cuadrática $2x^2 + Kx - 15 = 0$, tenga una raíz $= 3$.

10. Encontrar el valor de k para que la ecuación cuadrática $kx^2 - 4x + 6 = 0$, tenga raíces iguales.

11. Encontrar el valor de k para que la ecuación cuadrática $3x^2 - 4kx + 2k = 0$ tenga raíces reales.

12. Encontrar el valor de k para que la ecuación cuadrática $2x^2 - 2kx + 6 = 0$ tenga raíces imaginarias.

13. Encontrar el valor de k para que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 6x + 2k$ sea tangente al eje sea tangente al eje X.

14. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2x + 5} - x = 1$

b) $\sqrt{4 - x} = 2x - 5$

c) $\sqrt{5 - x} = -\sqrt{x + 3}$

d) $x - 1 = \sqrt{x - 1}$

e) $\sqrt{2x^2 + x + 2} = \sqrt{2x + 3}$

f) $\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{2x + 2}$

g) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = 1$

h) $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{7x + 2} = -\sqrt{x + 3}$

i) $x - 4 = \sqrt{3x + 6}$

j) $\sqrt{3x + 3} = \sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1}$

k) $\sqrt{2x + \sqrt{x + 5}} = \sqrt{11}$

l) $\sqrt{x^2 + x + 3} = 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

m) $\sqrt{x - a^2} - \sqrt{2x - a^2} = -a$

n) $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{x - 6} + \sqrt{2x + 5}$

o) $\sqrt{bx + b^2} = b + \sqrt{bx - 2b^2}$, $b \neq 0$

15. Resolver los siguientes problemas reduciendo primero cada ecuación a una ecuación de forma cuadrática.

a) $4x^4 + 32x^2 - 36 = 0$

b) $2x^4 - 14x^2 + 24 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

d) $3x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

e) $(x^2 - x)^2 + (x^2 - x) - 6 = 0$

f) $2(2x^2 + x)^2 + 11(2x^2 + x) + 12 = 0$

g) $3(x^2 - 1)^2 - 12(x^2 - 1) + 12 = 0$

h) $5x^{-2} + 12x^{-1} - 9 = 0$ Hacer $z = x^{-1}$ y $z^2 = x^{-2}$

i) $20x^{-2} - 3x^{-1} - 2 = 0$

j) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

k) $4\left(\frac{x - 3}{2x + 1}\right) - \left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right) - 3 = 0$ Hacer $z = \frac{x - 3}{2x + 1}$, $\frac{1}{z} = \frac{2x + 1}{x - 3}$

l) $2\left(\frac{2x - 1}{x}\right) - 10\left(\frac{x}{2x - 1}\right) - 1 = 0$

m) $\left(\frac{2x - 1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{2x - 1}{x}\right) + 3 = 0$

n) $3x + 8 = 5\sqrt{3x + 2}$ Sumar -6 a cada miembro de la ecuación y hacer $z = \sqrt{3x + 2}$

o) $7\sqrt{4x - 3} = 6(4x - 3) + 2$

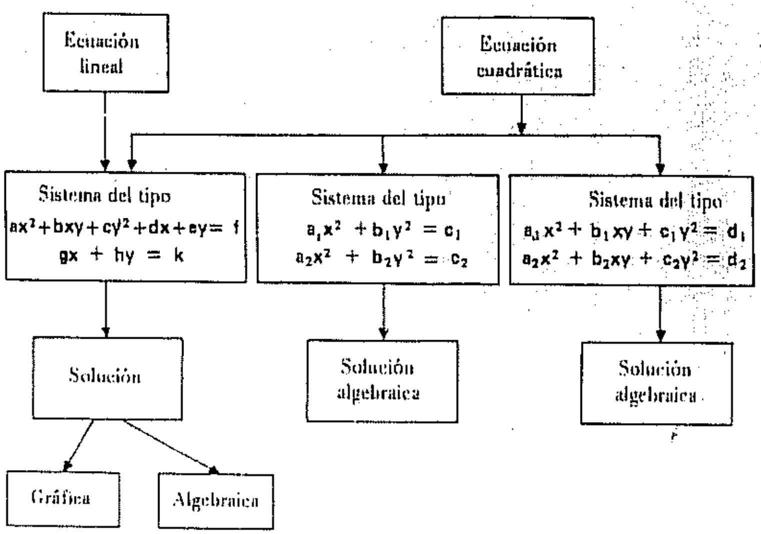
Módulo 12

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Aplicará el método gráfico en la resolución de sistemas de ecuaciones formados por una ecuación cuadrática y una ecuación lineal.
2. Aplicará el método algebraico en la resolución de sistemas de ecuaciones formadas por una ecuación cuadrática y una ecuación lineal.
3. Resolverá sistemas de ecuaciones cuadráticas formadas por 2 ecuaciones del tipo $ax^2 + by^2 = c$
4. Resolverá sistemas de ecuaciones de la forma: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

ESQUEMA-RESUMEN



12. Solución de sistemas de ecuaciones cuadráticas

En la Unidad IX, estudiaste sistemas de ecuaciones lineales y los diferentes métodos para resolverlos; algunos de esos métodos te servirán también para resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas.

Solución de un sistema formado por una ecuación cuadrática y una ecuación lineal.

En esta lección estudiaremos sistemas de ecuaciones formadas por una ecuación cuadrática y una ecuación lineal, dos ecuaciones de la forma $ax^2 + by^2 = c$ y por último dos ecuaciones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

12.1 Solución de un sistema de ecuaciones formado por una Ecuación Cuadrática y una Ecuación Lineal

¿Cómo encontramos la solución de un sistema de ecuaciones?

Un sistema de este tipo puede escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey &= f \\ gx + hy &= k \end{aligned}}$$

donde a, b, c, d, e, f, g, h y k son constantes a, b y c no todos son igual a cero y g y h no son ambas cero. Cada ecuación representa un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación respectiva: la intersección de estos dos conjuntos consta de los puntos comunes a las curvas representadas por las ecuaciones.

Tal como en los sistemas de ecuaciones lineales, podemos resolver este sistema en forma gráfica o en forma algebraica.

12.11 Método Gráfico

¿Cómo obtenemos los puntos donde se intersectan las Gráficas?

Este método consiste en graficar ambas ecuaciones sobre un mismo sistema de ejes de coordenadas, siendo la solución del sistema los pares ordenados (x, y) asociados con los puntos donde se intersecan las gráficas.

Ejemplo:

Resolver gráficamente el siguiente sistema

$$x^2 - 6x - y = -5$$

$$-2x + y = -7$$

Transformamos cada ecuación a otra equivalente y escribimos el sistema como

$$y = x^2 - 6x + 5$$
$$y = 2x - 7$$

Dándole valores a la x en la ecuación, $y = x^2 - 6x + 5$ tenemos:

Cuando $x = 0$, $y = (0)^2 - 6(0) + 5 = 5$

Cuando $x = 1$, $y = (1)^2 - 6(1) + 5 = 0$

Cuando $x = 2$, $y = (2)^2 - 6(2) + 5 = -3$

Cuando $x = 3$, $y = (3)^2 - 6(3) + 5 = -4$

Cuando $x = 5$ $y = (5)^2 - 6(5) + 5 = 0$

Cuando $x = 6$ $y = (6)^2 - 6(6) + 5 = 5$

Resumimos estos valores en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	5	6
y	5	0	−3	−4	0	5

Para la ecuación $y = 2x - 7$, tenemos:

Cuando $x = 0$, $y = 2(0) - 7 = -7$

Cuando $y = 0$, $0 = 2x - 7$, $x = \frac{7}{2}$

Graficamos cada una de las ecuaciones usando los valores obtenidos:

Luego, a partir de la gráfica vemos que la curva y la recta se intersecan en los puntos con coordenadas (2, −3) y (6, 5), por lo que la solución del sistema es el conjunto

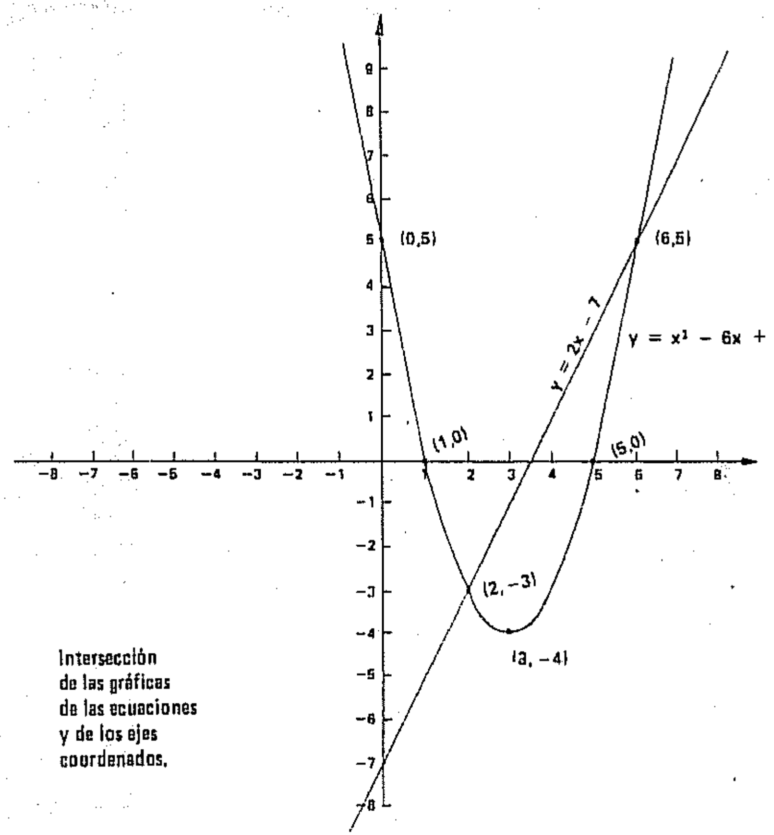


Figura 1

$$\{(x, y) \mid x^2 - 6x - y = -5\} \cap \{(x, y) \mid -2x + y = -7\} = \{(2, -3), (6, 5)\}$$

12.12 Método algebraico

El método algebraico para este tipo de sistemas, consiste en resolver para una de las variables en función de la otra la ecuación lineal y sustituir esta expresión en la ecuación cuadrática, quedando con esto una ecuación cuadrática con una sola variable, la que resolvemos por cualquiera de los métodos ya conocidos. Sustituyendo estos valores en la ecuación lineal, obtenemos la solución completa del sistema.

Ejemplo:

Resolver algebraicamente el siguiente sistema

$$x^2 - x - y - 6 = 0 \qquad (1)$$
$$2x - y - 2 = 0 \qquad (2)$$

Resolvemos para y la ecuación (2) y obtenemos

$$y = 2x - 2 \qquad (3)$$

Sustituimos $2x - 2$ por y en la ecuación (1) y obtenemos

$$x^2 - x - (2x - 2) - 6 = 0$$

Simplificamos

$$x^2 - x - 2x + 2 - 6 = 0$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ por factorización, quedando

$$(x - 4)\ (x + 1) = 0$$

por lo que $x = 4$ ó $x = -1$

Sustituimos estos valores en la ecuación (3) y obtenemos

$$y = 2(4) - 2 = 6 \quad \text{ó} \quad y = 2(-1) - 2 = -4$$

Luego, la solución del sistema es el conjunto

$$\{(x, y) \mid x^2 - x - y - 6 = 0\} \cap \{(x, y) \mid 2x - y - 2 = 0\} = \{(4,6),\ (-1, -4)\}$$

Ejemplo

Resolver algebraicamente el siguiente sistema

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x + y = 1$$

Resolvemos para y la ecuación lineal y nos queda

$$y = -x + 1$$

Sustituimos $(-x + 1)^2$ por y^2 en la ecuación cuadrática

$$x^2 + (-x + 1)^2 = 25$$

Efectuamos y simplificamos

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 25$$
$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 + 48}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{1 + 7}{2} = 4 \quad \text{ó} \quad x = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

Sustituimos estos valores en $y = -x + 1$ y obtenemos

$$y = -4 + 1 = -3 \quad \text{ó} \quad y = -(-3) + 1 = 4$$

Luego la solución del sistema es el conjunto

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\} \cap \{(x, y) \mid x + y = 1\} = \{(4, -3),\ (-3, 4)\}$$

Cuando graficamos una ecuación de primer grado y una de segundo grado, sus gráficas se intersecan en dos puntos diferentes (Ejemplos 1, 2 y 3); se intersecan en un sólo punto (problema d de los problemas de Auto-Evaluación del módulo 12) o no se intersecan en ningún punto (problema c de los problemas de Auto-Evaluación del módulo 12).

12.2 Sistemas de ecuaciones cuadráticas formadas por dos ecuaciones del tipo $ax^2 + by^2 = c$

Cuando se tiene un sistema formado por dos ecuaciones del tipo $ax^2 + by^2 = c$ los métodos que más conviene usar, son los de suma o resta o el de la sustitución, métodos que ya estudiaste en la Unidad IX y en el tema anterior, por lo que haremos ahora algunos ejemplos para que veas cómo se aplican estos métodos en sistemas de ecuaciones de este tipo

Si utilizamos el método de suma y resta. . .

Ejemplo 4:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma o resta

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$
$$4x^2 - 4y^2 = 36 \qquad (2)$$

Multiplicamos por 4 la ecuación (1) y le sumamos la ecuación (2), quedando

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 4y^2 = 100 \\ 4x^2 - 4y^2 = 36 \\ \hline 8x^2 = 136 \end{array}$$

$$x^2 = \frac{136}{8}$$
$$x^2 = 17$$
$$x = \pm\sqrt{17}$$
$$x = \sqrt{17} \quad ó \quad x = -\sqrt{17}$$

Sustituimos estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones originales (lo hacemos en la (1)) y obtenemos los correspondientes valores de la y. (Al sustituir $x = \sqrt{17}$ ó $x = -\sqrt{17}$ se obtendrá el mismo valor debido de y debido a que la x en ambas ecuaciones aparece elevada al cuadrado por lo que sustituiremos un solo valor, es decir $x^2 = 17$):

$$(\pm\sqrt{17})^2 + y^2 = 25$$
$$17 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - 17$$
$$y^2 = 8$$
$$y = \pm\sqrt{8}$$
$$y = \pm 2\sqrt{2}$$

si $x = \sqrt{17}$, $y = +2\sqrt{2}$ ó $-2\sqrt{2}$; si $x = -\sqrt{17}$, $y = 2\sqrt{2}$ ó $y = -2\sqrt{2}$

Luego, el conjunto solución es

$$\{(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2}),\ (\sqrt{17},\ -2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{17},\ 2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})\}$$

Ejemplo 5:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de sustitución:

$$2x^2 + 4y^2 = 20 \qquad (1)$$
$$x^2 - 2y^2 = 50 \qquad (2)$$

Resolvemos para x^2 la ecuación (2)

$$x^2 = 50 + 2y^2$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (1)

$$2(50 + 2y^2) + 4y^2 = 20$$

Efectuamos y simplicamos

$$100 + 4y^2 + 4y^2 = 20$$
$$100 + 8y^2 = 20$$
$$8y^2 = 20 - 100$$
$$8y^2 = -80$$
$$y^2 = -10$$
$$y = \pm i\sqrt{10} \ldots \; i = \sqrt{-1}$$

Sustituimos $y^2 = -10$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales (lo hacemos en la (2)) quedando

$$x^2 - 2(-10) = 50$$
$$x^2 + 20 = 50$$
$$x^2 = 50 - 20$$
$$x^2 = 30$$
$$x = \pm\sqrt{30}$$

Luego, el conjunto solución es

$\{(\sqrt{30},\ i\sqrt{10}),\ (-\sqrt{30},\ i\sqrt{10}),\ (\sqrt{30},\ -i\sqrt{10}),\ (-\sqrt{30},\ -i\sqrt{10})\}$
$= \{\ \}$ sobre el conjunto de los números reales

En este ejemplo vemos que el segundo componente de cada par ordenado del conjunto solución, es un número complejo por lo que concluimos que las gráficas de las ecuaciones no se intersecan.

Ejemplo 6:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de sustitución

$$5x^2 - 11y^2 = 69 \qquad (1)$$
$$2x^2 - 7y^2 = 25 \qquad (2)$$

Resolvemos para x^2 en la ecuación (2)

$$x^2 = \frac{25 + 7y^2}{2}$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (1)

$$5\left(\frac{25 + 7y^2}{2}\right) - 11y^2 = 69$$

Efectuamos y simplificamos

$$\frac{125 + 35y^2}{2} - 11y^2 = 69$$
$$\frac{125 + 35y^2 - 22y^2}{2} = 69$$
$$125 + 35y^2 - 22y^2 = 138$$
$$13y^2 = 138 - 125$$
$$13y^2 = 13$$
$$y^2 = \frac{13}{13}$$
$$y^2 = 1$$
$$y = \pm 1$$

Sustituimos $y^2 = 1$ en la ecuación (2)

$$2x^2 - 7(1) = 25$$
$$2x^2 = 25 + 7$$
$$x^2 = \frac{32}{2}$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Luego, el conjunto solución es

$$\{(4,\ 1)\ (4,\ -1),\ (-4,\ 1)\ (-4,\ -1)\}$$

Las gráficas de este tipo de ecuaciones, se intersecan en cuatro puntos diferentes o no se intersecan en ninguno.

El método de suma o resta, se puede aplicar también a sistemas de ecuaciones que contengan términos en xy, o términos de primer grado ó ambos, siempre y cuando el término en xy aparezca en ambas ecuaciones y que después de sumar o restar ambas ecuaciones resulte una ecuación con una sola variable.

Ejemplo 7:

Resolver por el método de suma o resta el siguiente sistema de ecuaciones

$$x^2 + 3xy + x = -3 \qquad (1)$$
$$xy + 2x = -3 \qquad (2)$$

Multiplicamos por -3 la ecuación (2) y la sumamos a la (1)

$$\begin{array}{r} x^2 + 3xy + x = -3 \\ - 3xy - 6x = 9 \\ \hline x^2 \qquad -5x = 6 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{array}$$

Resolvemos por factorización $\quad (x - 6)\ (x + 1) = 0$
$\qquad x = 6 \quad ó \quad x = -1$

Sustituimos cada uno de estos valores en la ecuación (2), quedando para $x = 6$.

$$(6)y + (2)(6) = -3$$

$$6y = -3 - 12$$
$$6y = -15$$
$$y = \frac{-15}{6} = -\frac{5}{2}$$

para $x = -1$

$$(-1)y + 2(-1) = -3$$
$$-y - 2 = -3$$
$$-y = -1$$
$$y = 1$$

Luego, el conjunto solución es

$$\{(6, -\tfrac{5}{2}), (-1, 1)\}$$

12.3 Solución de Sistemas de Ecuaciones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Para obtener la solución de un sistema de ecuaciones de la forma

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \qquad (1)$$
$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \qquad (2)$$

procedemos de la siguiente manera:

Pasos en la solución de un sistema de ecuaciones del tipo $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

1. Eliminamos el término constante por suma o resta, multiplicando la ecuación (1) por d_2 y la otra por $-d_1$ y sumamos después ambas ecuaciones, quedando una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$. Si d_1 ó d_2 son cero, se omite este paso y se empieza con el paso dos usando la ecuación con término independiente igual a 0.
2. Se resuelve la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$, para y en términos de x ó para x en términos de y por cualquiera de los métodos que ya se han estudiado, obteniendo dos soluciones de la forma $y = Dx$ ó $y = Ex$ ó $x = D_1y$ ó $x = E_1y$ donde D, D_1, E y E_1 son constantes.
3. Se sustituye cada valor obtenido en el paso anterior para x ó para y en cualquiera de las ecuaciones originales, obteniendo dos ecuaciones que contienen una sola variable, que puede ser la x ó la y, dependiendo si se sustituyó la y en términos de x ó la x en términos de y.

4. Se resuelve para la variable que quedó en las ecuaciones obtenidas en el paso anterior, obteniendo dos soluciones para cada ecuación.
5. Cada solución de la ecuación obtenida a partir de $y = Dx$ ó $x = D_1y$ se sustituye en $y = Dx$ ó $x = D_1y$, obteniendo así los correspondientes valores de y o x. De igual forma cada solución de la ecuación obtenida a partir de $y = Ex$ ó $x = E_1y$ se sustituye en $y = Ex$ ó $x = E_1y$, obteniendo así los correspondientes valores de y ó x.
6. Se ordenan las soluciones, obteniendo cuatro pares ordenados que es el conjunto solución del sistema.

Ejemplo 8:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + 2xy - 4y^2 = 16 \qquad (1)$$
$$2x^2 + 7xy + 4y^2 = 104 \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por -104, la ecuación (2) por 16 y sumamos

$$\begin{array}{rcrcrcr} -104x^2 & - & 208xy & + & 416y^2 & = & -1664 \\ 32x^2 & + & 112xy & + & 64y^2 & = & 1664 \\ \hline -72x^2 & - & 96x & + & 480y^2 & = & 0 \end{array}$$

Reducimos dividiendo la ecuación entre -24

$$3x^2 + 4xy - 20y^2 = 0$$

Resolvemos esta ecuación por factorización

$$(3x + 10y)(x - 2y) = 0$$
$$x = -\frac{10y}{3} \qquad ó \qquad x = 2y$$

Sustituimos $x = -\frac{10y}{3}$ en la ecuación (1)

$$(-\frac{10y}{3})^2 + 2(-\frac{10y}{3})y - 4y^2 = 16$$

Efectuamos y simplificamos

$$\frac{100y^2}{9} - \frac{20y^2}{3} - 4y^2 = 16$$

$$\begin{aligned} 100y^2 - 60y^2 - 36y^2 &= 144 \\ 4y^2 &= 144 \\ y^2 &= 36 \\ y &= \pm 6 \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de $y = \pm 6$ en $x = -\frac{10y}{3}$ obteniendo

$$x = -\frac{10}{3}(6) = -20, \qquad x = -\frac{10}{3}(-6) = 20$$

Sustituimos ahora, $x = 2y$ en la ecuación (1) (se podría hacer también en la ecuación (2)), quedando

$$(2y)^2 + 2(2y)y - 4y^2 = 16$$

Efectuamos y simplificamos

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y^2 - 4y^2 &= 16 \\ 4y^2 &= 16 \\ y^2 &= 4 \\ y &= \pm 2 \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de $y = \pm 2$ en $x = 2y$ obteniendo

$$x = 2(2) = 4, \quad x = 2(-2) = -4$$

Ordenando estos valores obtenemos el conjunto solución que es

$$\{(-20, 6), (20, -6), (4, 2), (-4, -2)\}$$

En este ejemplo obtuvimos cuatro pares ordenados que satisfacen el sistema, lo que sucede generalmente, sin embargo en ciertos casos especiales puede haber menos de cuatro pares ordenados que satisfagan el sistema.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Resolver gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $x^2 + 2x - y + 4 = 0$
$3x - y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 36$
$y - x = 0$

c) $-x^2 - y - 4 = 0$
$x - y + 1 = 0$

d) $x^2 - 2x - y - 8 = 0$
$x - 3 = 0$

2. Resolver algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

e) $x^2 + y^2 = 16$
$y - 2x = 1$

f) $x^2 + y = 3$
$6x + y = 7$

g) $y^2 + y - 2x + 4 = 0$
$-4y + x - 6 = 0$

h) $3x^2 - 16y^2 - 11 = 0$
$3x - 8y - 1 = 0$

3. Encontrar $A \cap B$ para los siguientes conjuntos.

i) $A = \{(x, y) \mid 7y^2 - 12x - 18y = 0\}$

$B = \{(x, y) \mid 6x - 8y + 14 = 0\}$

j) $A = \{(x, y) \mid 2ax - 2by + 2b^2 = 0\}$

$B = \{(x, y) \mid xy + ab - ay = 0\}$

a, b constantes y $a \neq 0$, $b \neq 0$

4. Resolver, usando el método de suma o resta o de sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $x^2 + 3y^2 = 43$
$3x^2 + y^2 = 57$

b) $9x^2 + y^2 = 90$
$x^2 + 9y^2 = 90$

c) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{y^2} = 5$
$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} = 6$

d) $x^2 + 3y^2 = 37$
$2x^2 - 9y^2 = 14$

e) $4x^2 + 9y^2 = 36$
$15x^2 + 9y^2 = 80$

f) $5x^2 - 2y^2 = 47$
$3x^2 + 7y^2 = 184$

g) $ax^2 + by^2 = c$
$bx^2 - ay^2 = 0$

h) $\frac{13x^2}{5} - \frac{17y^2}{3} = 4$
$-\frac{31x^2}{15} + \frac{29y^2}{9} = \frac{2}{3}$

i) $15x^2 - 19y^2 = -\frac{27}{2}$
$-27x^2 + 13y^2 = -\frac{15}{2}$

j) $8x^2 + 5y^2 = 11$
$7x^2 - 6y^2 = -63$

k) $2x^2 + y^2 = 6$
$x^2 + y^2 + 2x = 3$

l) $x^2 - y^2 = 16$
$-2x + y^2 = -1$

m) $4x^2 + 4xy + 3x = 15$
$5x^2 + 4xy + 5x = 18$

n) $5x^2 + 5xy + 4x = -18$
$48x^2 + 25xy - 3x = 48$

o) $4xy - y^2 + 3y = 8$
$3xy - y^2 + 3 = 0$

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $-4x^2 + 3xy + 2y^2 = 40$
$6x^2 + xy = 10$

b) $6x^2 + 3xy + 2y^2 = 24$
$3x^2 + 2xy + 2y^2 = 18$

c) $x^2 - xy - 12y^2 = 0$
$x^2 + xy - 10y^2 = 20$

d) $x^2 - xy + y^2 = 28$
$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$

e) $x^2 - 2xy - y^2 = -7$
$x^2 - 3xy + y^2 = -5$

f) $8x^2 - 7xy = -10$
$25x^2 - 24xy + y^2 = -35$

g) $y^2 + 2xy - 12 = 0$
$2x^2 - xy = -1$

h) $x^2 + xy + 2y^2 = 28$
$2x^2 + 7xy - y^2 = -64$

Bibliografía para consulta. Unidad XI

ALGEBRA MODERNA
Eugene D. Nichols
Ralph T. Heimer
E. Henry Garland
Compañía Editorial Continental, S. A.
1969

INTRODUCCION A LA MATEMATICA MODERNA
Elbridge P. Vance
Fondo Educativo Interamericano, S. A.
1968.

Paneles de verificación

Conjunto de Problemas XI-9

1.

a) Vértice en (1, 7), cóncava hacia arriba.

b) Vértice en (−2, −7), cóncava hacia arriba.

c) Vértice en $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, cóncava hacia abajo.

d) Vértice en $(\frac{3}{2}, \frac{37}{4})$, cóncava hacia abajo.

e) Vértice en $(\frac{3}{2}, -\frac{27}{2})$ cóncava hacia arriba.

f) Vértice en (0, −20), cóncava hacia arriba.

g) Vértice en (4, 0), cóncava hacia arriba.

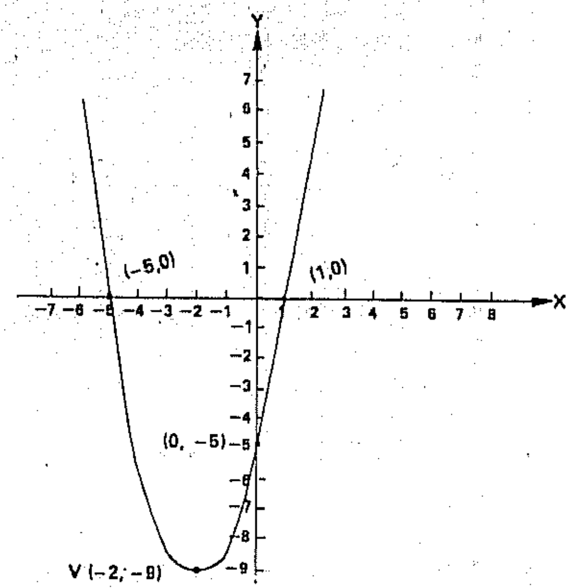
h) Vértice en (4, 18), cóncava hacia abajo.

i) Vértice en $(\frac{1}{2}, -1)$, cóncava hacia abajo.

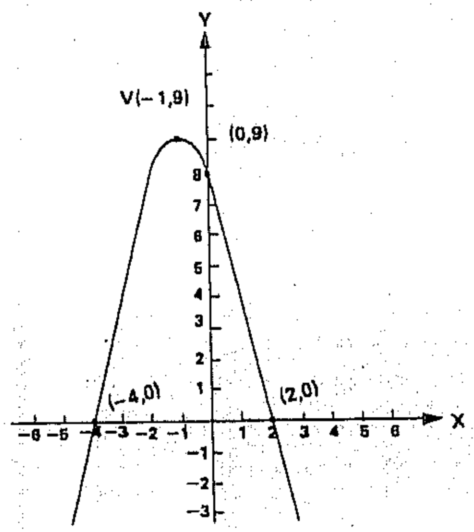
j) Vértice en (6, 36), cóncava hacia abajo

2.

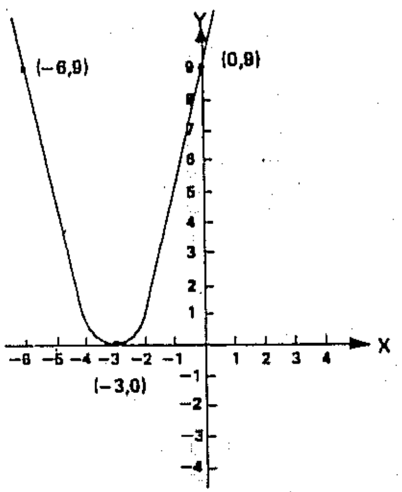
a)



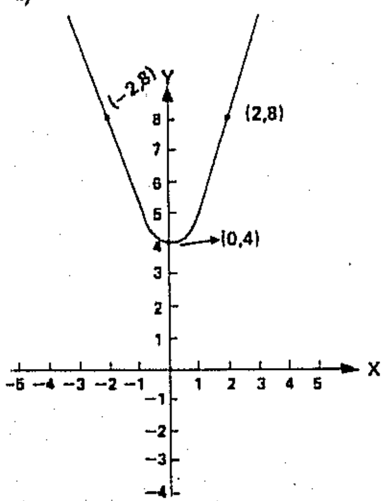
b)



c)



d)



3.

a) 10 y 10.
b) Terreno cuadrado de 30 m por lado.
c) 10 y 10.

Conjunto de Problemas XI-10

1.

a) $x = -\frac{5}{3}$ ó $x = -2$
b) $x = 3$ ó $x = -8$
c) $x = \frac{5}{2}$ ó $x = 1$
d) $x = \frac{1}{8}$ ó $x = -\frac{3}{2}$
e) $x = -\frac{b}{a}$ ó $x = \frac{b}{a}$
f) $x = \frac{1}{5}$ ó $x = -\frac{2}{3}$
g) $x = -5$ ó $x = -3$
h) $x = 5$ ó $x = -6$
i) $x = \frac{1}{2}$ ó $x = -\frac{3}{2}$
j) $x = 4$ ó $x = 4$ (Es una raíz repetida)
k) $x = \frac{1}{2}$ ó $x = -\frac{3}{2}$
l) $x = -\frac{2}{a}$ ó $x = -\frac{2}{a}$ (Es una raíz repetida)
m) $x = 10$ ó $x = -9$
n) $x = -\frac{1}{7}$ ó $x = \frac{5}{2}$
o) $x = 6$ ó $x = -7$
p) $x = 3i$ ó $x = -3i$
q) $x = 4i$ ó $x = -4i$
r) $x = \sqrt{5}\, i$ ó $x = -\sqrt{5}\, i$
s) $x = 2\sqrt{3}\, i$ ó $x = -2\sqrt{3}\, i$
t) $x = 2\sqrt{5}\, i$ ó $x = -2\sqrt{5}\, i$

2.

a) $x_1 = 1$ ó $x_2 = -5$

b) $x_1 = -\frac{1}{2}$ ó $x_2 = \frac{5}{3}$

c) $x_1 = \frac{7}{2}$ ó $x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{10}$ ó $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{10}$

e) $x_1 = \frac{5}{2}$ ó $x_2 = \frac{5}{2}$

f) $x_1 = \frac{3 + i\sqrt{87}}{8}$ ó $x_2 = \frac{3 - i\sqrt{87}}{8}$

g) $x_1 = -\frac{1}{7}$ ó $x_2 = \frac{7}{3}$

h) $x_1 = \frac{1}{6}$ ó $x_2 = \frac{1}{6}$

i) $x_1 = \frac{5 + \sqrt{137}}{8}$ ó $x_2 = \frac{5 - \sqrt{137}}{8}$

j) $x_1 = -1$ ó $x_2 = -5$

k) $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{19}}{2}$ ó $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{19}}{2}$

l) $x_1 = -5 + 4i$ ó $x_2 = -5 - 4i$

m) $x_1 = \frac{1 + \sqrt{181}}{18}$ ó $x_2 = \frac{1 - \sqrt{181}}{18}$

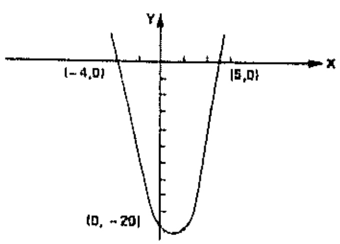
n) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}$ ó $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}$

o) $x_1 = \frac{3}{10}$ ó $x_2 = \frac{3}{10}$

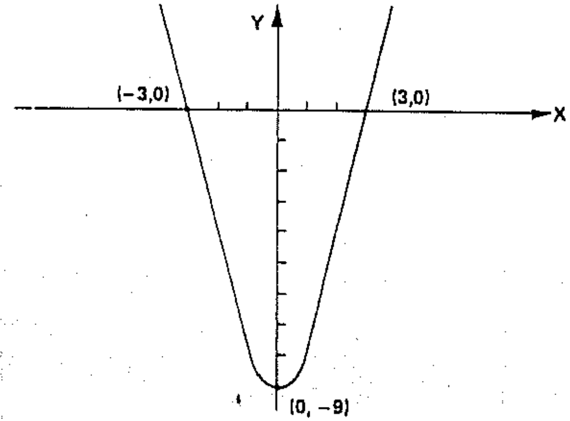
Conjunto de Problemas XI-11.

1.

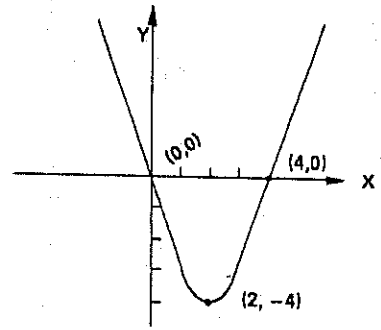
a)



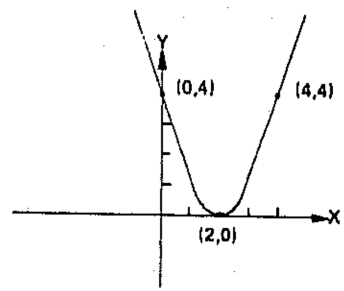
b)



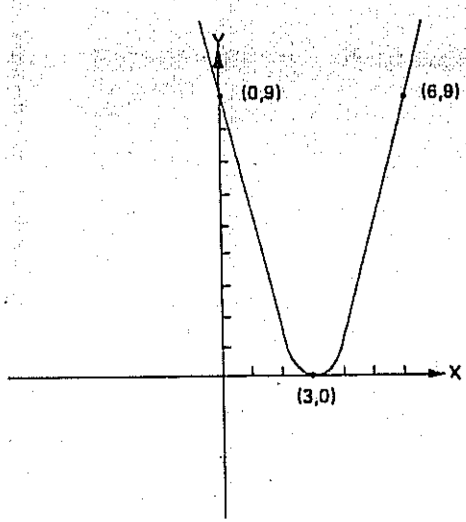
c)



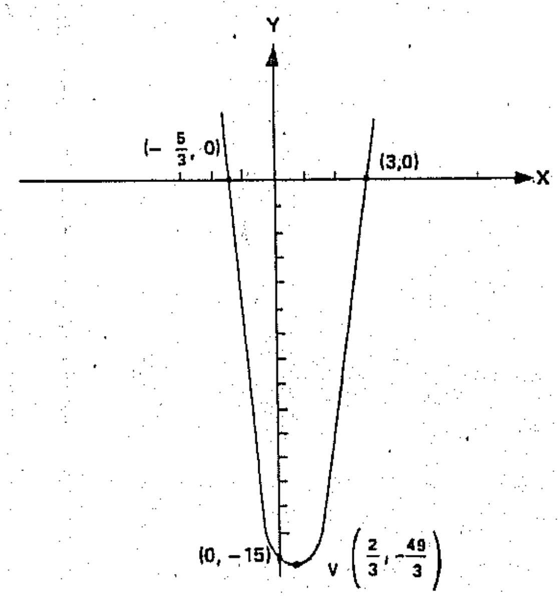
d)



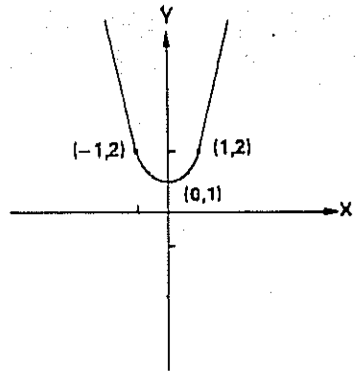
e)



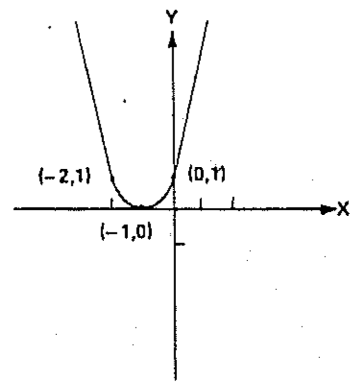
f)



g)



h)



2.

a) $\{x \mid -1 < x < 4\}$

b) $\left\{x \mid x > 1 \quad \text{ó} \quad x < -\frac{3}{2}\right\}$

c) Conjunto vacío

d) $\{x \mid x \in R, \quad x \neq -3\}$

e) $\left\{x \mid -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{7}\right\}$

f) $\left\{x \mid x > \frac{6}{5} \quad \text{ó} \quad x < -\frac{5}{4}\right\}$

g) $\left\{x \mid \frac{-3-\sqrt{65}}{4} < x < \frac{-3+\sqrt{65}}{4}\right\}$

h) $\left\{x \mid x > \frac{6+\sqrt{6}}{2} \quad ó \quad x < \frac{6-\sqrt{6}}{2}\right\}$

i) Conjunto vacío

j) $\{x \mid x \in R\}$

k) $\{x \mid x > 7 \quad ó \quad x < -8\}$

l) Conjunto vacío.

3.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $x^2 - 2 = 0$

4. $x^2 - 20x + 64 = 0$

5. $x^2 - 9x + 18 = 0$

6. $3x^2 - 4x - 4 = 0$

7. $x^2 - x - 2 = 0$

8. $16x^2 - 16x + 3 = 0$

9. $k = -1$

10. $k = \frac{2}{3}$

11. $k \geq \frac{3}{2}, \quad k \leq 0$

12. $-\sqrt{12} < k < \sqrt{12}$

13. $k = \frac{9}{10}$

14

a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) No tiene solución.

d) $x = 1, \quad x = 2$

e) $x = -\frac{1}{2}, \quad x = 1$

f) $x = 7$

g) $x = 2$

h) $x = \frac{3}{2} \quad x = 1$

i) $x = 10$

j) $x = 2$

$x = 4$

$x = -3$

m) $x = a^2, \quad x = 5a^2$

n) $x = 10$

o) $x = 3b$

15.

a) $x = 1, x = -1, x = 3i, x = -3i$

b) $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}, x = 2, x = -2$

c) $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, x = 3, x = -3$

d) $x = \sqrt{\frac{5+i\sqrt{47}}{6}}, \quad x = -\sqrt{\frac{5+i\sqrt{47}}{6}},$

$x = \sqrt{\frac{5-i\sqrt{47}}{6}}, \quad x = -\sqrt{\frac{5-i\sqrt{47}}{6}}$

e) $x = 2, \quad x = -1, \quad x = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \quad x = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}$

f) $x = \frac{-1+\sqrt{11}}{4}, \quad \frac{-1-\sqrt{11}}{4}, \quad x = \frac{-1+\sqrt{31}}{4}, \quad x = \frac{-1-\sqrt{31}}{4}$

g) $x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$

h) $x = \frac{5}{3}, \quad x = -\frac{1}{3}$

i) $x = -4, \quad x = \frac{5}{2}$

j) $x = \frac{1}{2}, \quad x = -1, \quad x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}, \quad x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}$

k) $x = -4, \quad x = \frac{11}{6}$

l) $x = \frac{1}{4}, \quad x = -2$

m) $x = 1 \quad x = -1$

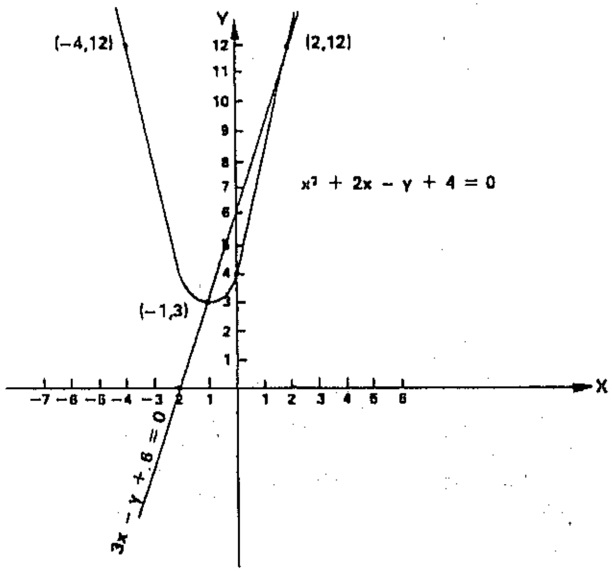
n) $x = \frac{7}{3}, \quad x = \frac{2}{3}$

o) $x = \frac{31}{36}$

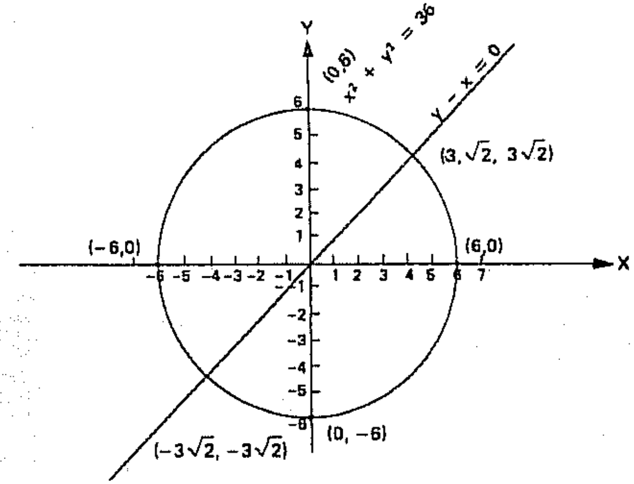
MODULO 12 – VALIDACION

1.

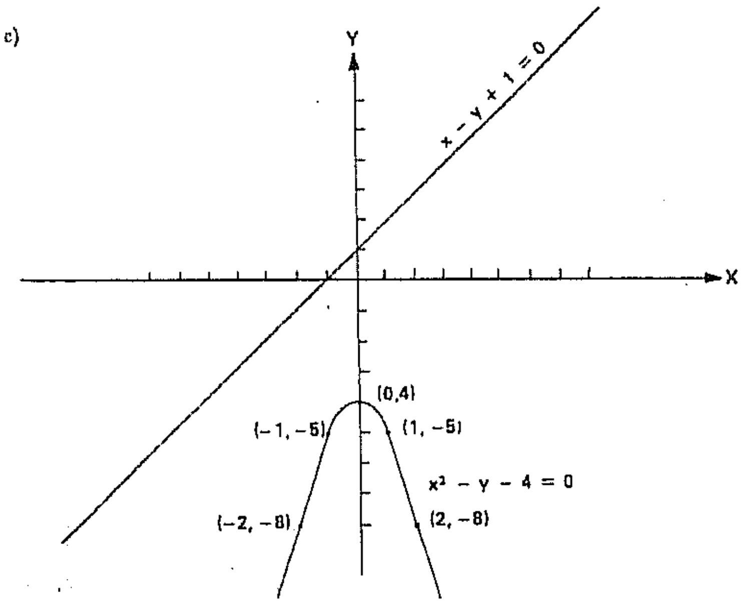
a)



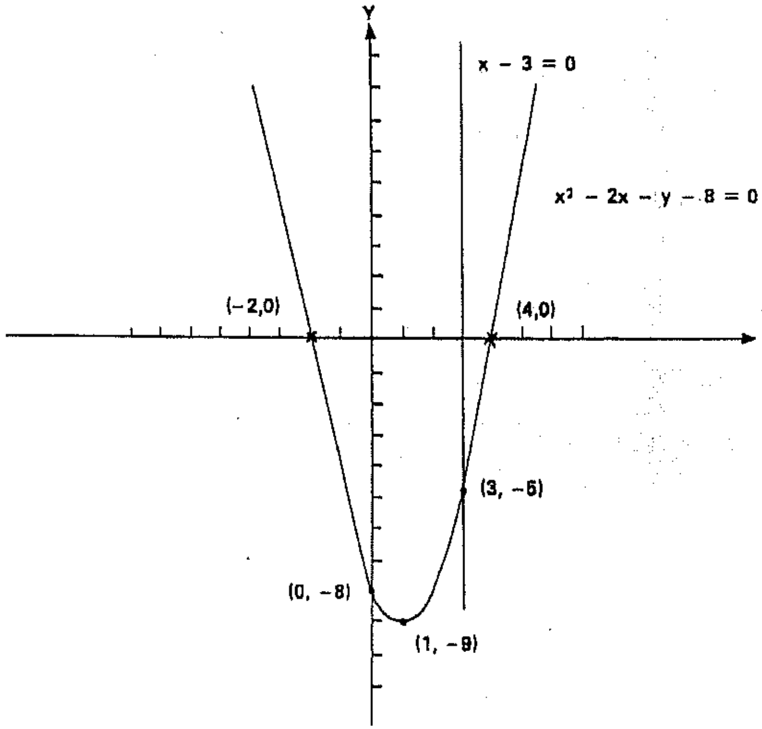
b)



c)



d)



Conjunto solución $= \{(3, -5)\}$

2.

e) Conjunto solución $= \left\{ \left(\frac{-2 + \sqrt{79}}{5}, \frac{1 + 2\sqrt{79}}{5} \right), \left(\frac{-2 - \sqrt{79}}{5}, \frac{1 - 2\sqrt{79}}{5} \right) \right\}$

f) Conjunto solución $= \{(4, -13), (1, 2)\}$

g) Conjunto solución $= \{(38, 8), (2, -1)\}$

h) Conjunto solución $= \{(3, 1), (-5, -2)\}$

3.

i) $A \cap B = \{(3, 4), (-1, 1)\}$

j) $A \cap B = \left\{ \left(\frac{a^2 - b^2}{a}, \frac{a^2}{b} \right), (0, b) \right\}$

4.

a) $\{(4, 3)\ (4, -3), (-4, 3)\ (-4, -3)\}$

b) $\{(3, 3), (3, -3), (-3, 3)\ (-3, -3)\}$

c) $\left\{ (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, 1)\ (-\frac{1}{2}, -1) \right\}$

d) $\{(5, 2), (5, -2), (-5, 2), (-5, -2)\}$

e) $\left\{ (2, \frac{2\sqrt{5}}{3}), (2, \frac{-2\sqrt{5}}{3}), (-2, \frac{2\sqrt{5}}{3}), (-2, \frac{-2\sqrt{5}}{3}) \right\}$

f) $\{(\sqrt{17}, \sqrt{19}), (\sqrt{17}, -\sqrt{19}), (-\sqrt{17}, \sqrt{19}), (-\sqrt{17}, -\sqrt{19})\}$

g) $\left\{ \left(\sqrt{\frac{ac}{a^2 + b^2}}, \sqrt{\frac{bc}{a^2 + b^2}} \right), \left(\sqrt{\frac{ac}{a^2 + b^2}}, -\sqrt{\frac{bc}{a^2 + b^2}} \right) \right.$
$\left. \left(-\sqrt{\frac{ac}{a^2 + b^2}}, \sqrt{\frac{bc}{a^2 + b^2}} \right), \left(-\sqrt{\frac{ac}{a^2 + b^2}}, -\sqrt{\frac{bc}{a^2 + b^2}} \right) \right\}$

h) $\{(i\sqrt{5}, i\sqrt{3}), (i\sqrt{5}, -i\sqrt{3}), (-i\sqrt{5}, i\sqrt{3}), (-i\sqrt{5}, i\sqrt{3})\}$

i) $\left\{ (1, \frac{\sqrt{6}}{2}), (1, -\frac{\sqrt{6}}{2}), (-1, +\frac{\sqrt{6}}{2}), (-1, -\frac{\sqrt{6}}{2}) \right\}$

j) $\{(i\sqrt{3}, \sqrt{7}), (i\sqrt{3}, -\sqrt{7}), (-i\sqrt{3}, \sqrt{7}), (-i\sqrt{3}, -\sqrt{7})\}$

k) $\{(-1, 2), (-1, -2), (3, 2i\sqrt{3}), (3, -2i\sqrt{3})\}$

l) $\{(5, 3), (5, -3), (-3, i\sqrt{7}), (-3, -i\sqrt{7})\}$

m) $\{(1, 2), (-3, 1)\}$

n) $\{(-2, 3), (3, -5)\}$

o) $\{ (\frac{2}{3}, 3), (-\frac{47}{12}, -12) \}$

5.

a) $\{(-1, -4), (1, 4), (2, -7), (-2, 7)\}$

b) $\left\{ (2, -3), (\frac{\sqrt{30}}{5}, \frac{2\sqrt{30}}{5})\ (-2, 3), (\frac{-\sqrt{30}}{5}, \frac{-2\sqrt{30}}{5}) \right\}$

c) $\{(4\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-3i\sqrt{5}, i\sqrt{5}), (3i\sqrt{5}, -i\sqrt{5})$

d) $\left\{ (4, -2), (-4, 2), \left(\frac{2\sqrt{21}}{3}, \frac{4\sqrt{21}}{3} \right), \left(\frac{-2\sqrt{21}}{3}, \frac{-4\sqrt{21}}{3} \right) \right\}$

e) $\{(4i, i), (-4i, -i), (3, 2), (-3, -2)\}$

f) $\left\{(-2, -3), (2, 3), \left(\frac{i\sqrt{55}}{11}, -\frac{2i\sqrt{55}}{11}\right), \left(\frac{-i\sqrt{55}}{11}, \frac{2i\sqrt{55}}{11}\right)\right\}$

g) $\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -3\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right)\right\}$

h) $\{(5, -3), (-5, 3), (2, -4), (-2, 4)\}$

UNIDAD XII

POLINOMIOS

Introducción

En esta última unidad presentamos el estudio de las funciones polinomiales, uno de los mas importantes del álgebra.

Se plantean sus operaciones fundamentales, representación gráfica, los teoremas del residuo y del factor apoyados en el algoritmo de la división, así como su consecuencia que es el teorema fundamental del álgebra.

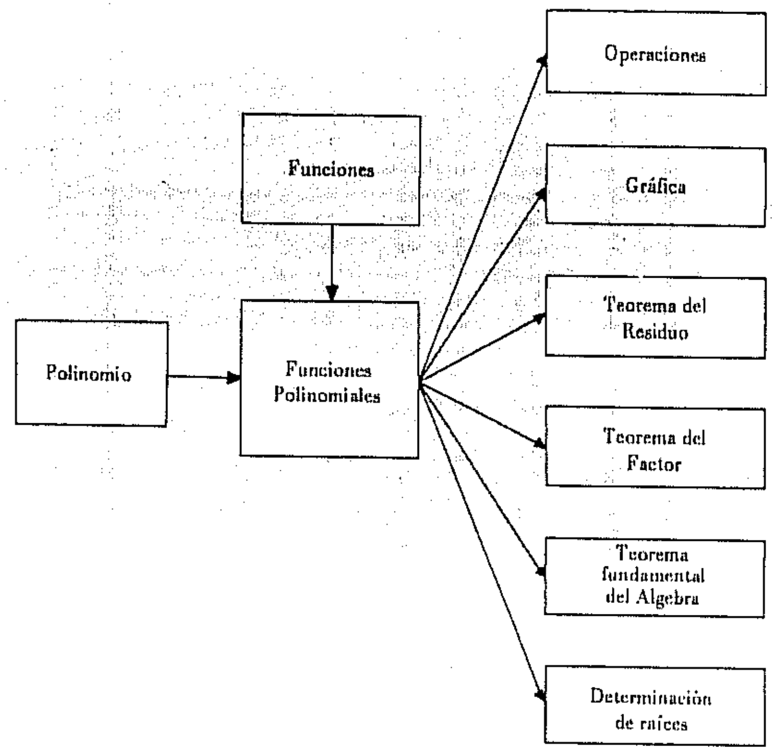
Se ilustra el manejo de la división sintética y su empleo en los métodos para la determinación de los diferentes tipos de raíces.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Resolverá operaciones básicas que involucren funciones polinomiales.
2. Graficará funciones polinomiales aplicando los diferentes teoremas existentes (teorema del residuo, del factor, fundamental del álgebra).
3. Determinará las raíces reales (racionales e irracionales) existentes en funciones polinomiales dadas.
4. Determinará cuantas raíces imaginarias contienen las funciones polinomiales dadas.

Diagrama temático estructural



Glosario

Función Polinomial: Toda función que puede representarse mediante la ecuación
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$
donde $n \in W$ y $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_0$
Son constantes reales o complejas.

Algoritmo: Cualquier procedimiento de cálculo.

División Sintética: Proceso que simplifica la división de un polinomio en x entre un binomio de la forma $x - c$.

Teorema del residuo: Cuando se divide un polinomio $f(x)$ entre $x\text{-}c$ hasta obtener un residuo independiente de x el residuo es igual a $f(c)$.

Teorema del factor: Un polinomio $f(x)$ tiene a $x\text{-}c$ como factor si y sólo si $f(c) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra: Toda ecuación polinomial $f(x) = 0$ de grado mayor que cero tiene al menos una raíz, real o compleja.

Regla de los signos de Descartes: Regla que nos permite en una ecuación polinomial determinar el máximo posible de raíces reales positivas o negativas.

Raíz real: Número real que al sustituir a x en una ecuación polinomial la satisface.

Raíz Racional: Toda raíz de la forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in I$, $b \neq 0$.

Raíz imaginaria: Toda raíz de la forma $a + bi$

Raíz Irracional: Toda raíz real no racional.

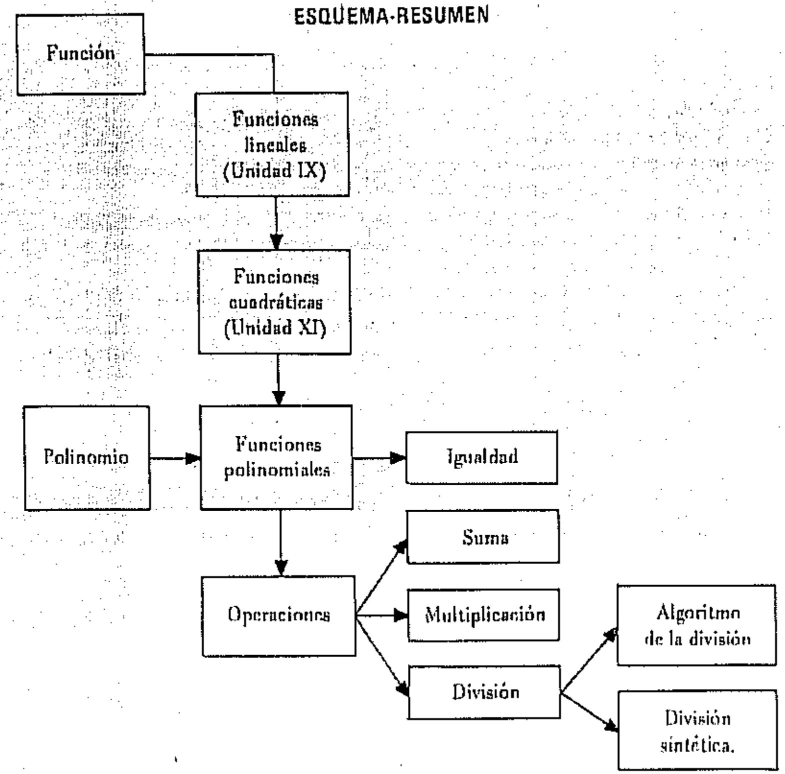
Módulo 13

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará en que consisten las funciones polinomiales.
2. Definirá cuando dos funciones plinomiales son iguales entre si $f(x) = g(x)$.
3. Sumará funciones polinomiales.
4. Resolverá multiplicaciones de dos funciones polinomiales.
5. Aplicará un algoritmo en la división de funciones polinomiales.
6. Resolverá divisiones sintéticas con funciones polinomiales.

ESQUEMA-RESUMEN



13.1 Funciones Polinomiales

En la Unidad IX estudiaste **funciones lineales**, y en la Unidad XI estudiaste **funciones cuadráticas** y aprendiste cómo resolver **ecuaciones lineales** y **cuadráticas**. Estudiaremos ahora, otro tipo de funciones que llamaremos **funciones polinomiales**, las que podemos escribir como:

$$(1)\quad f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_0$ son números reales o conplejos. A cada uno de los monomios a_kx_k se les llama término del polinomio.

Los coeficientes de las funciones polinomiales son elementos del conjunto de . .

Para el estudio de las **funciones polinomiales** sólo trabajaremos con coeficientes reales o complejos, aunque podemos tener coeficientes que sean elementos de cualquier otro sistema. Sin embargo, para lo que nos interesa estudiar acerca de este tipo de funciones, nos concretaremos sólo a coeficientes que sean elementos del conjunto de los números reales o complejos.

Si $a_n \neq 0$ decimos que la función polinomial (1) es de grado n y podemos decir que el grado de la función es el mayor exponente que aparezca en ella.

¿Qué valores puede tomar la variable x?

Aunque aquí la x representa una variable a la que pueden asignársele valores reales o complejos, hay partes de la matemática donde tiene otro significado por lo que a menudo es conveniente ver a x sólo como un símbolo sin un sentido específico unido a él; si hacemos esto, las funciones polinomiales pueden aplicarse a una gran variedad de sistemas y el significado de quedará determinado por el sistema particular que se esté estudiando.

Definiremos algunas operaciones con funciones polinomiales y para ello supondremos que en cualquier conjunto finito de funciones polinomiales, añadiendo coeficientes iguales a cero, podemos hacer que en todas ellas aparezcan las mismas potencias de x.

Por **ejemplo:** $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$ y $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$,

podemos reescribirlas como

$$f(x) = 4x^4 - 0x^3 - 3x^2 + 0x + 1$$

$$\text{y}\quad g(x) = 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 0$$

Sean $\quad f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots + a_0$

$\qquad\quad g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots + b_0$

en donde $a_i, b_i \in C$ y $n \in W$

Igualdad de funciones

Definición: Dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$ son iguales y escribimos $f(x) = g(x)$ si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x son iguales, es decir,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2\ \dots\dots\ a_n = b_n$$

Suma de polinomios. . .

Definición: La suma de $f(x)$ y $g(x)$ se define como

$$f(x)+g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} + b_{n-2})x^{n-2} + \dots + (a_0 + b_0)$$

Como se puede ver, los coeficientes de $f(x) + g(x)$ son la suma de los correspondientes coeficientes de $f(x)$ y $g(x)$. A partir de esto, podemos ver que la suma de funciones polinomiales es conmutativa, asociativa y que hay una función polinomial

$$0 = 0x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + \dots + 0$$

que es el elemento identidad para la suma, ya que si

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$$

$$\text{y}\qquad 0 = 0x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + \dots\dots + 0$$

$$f(x) + 0 = (a_n + 0)x^n + (a_{n-1} + 0)x^{n-1} + (a_{n-2} + 0)x^{n-2} + \dots + (a_0 + 0)$$

Definición de suma de funciones polinomiales

$$f(x) + 0 = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$$

Elementos identidad para la suma.

También tenemos un inverso para la suma que llamaremos

Inverso para la suma

$$-f(x) = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + (-a_{n-2})x^{n-2} + \dots + (-a_0)$$

así:

$$f(x) + (-f(x)) = (a_n - a_n)x^n + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} - a_{n-2})x^{n-2} + \dots (a_0 - a_0)$$

$$= 0x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + ... + 0$$
$$= 0$$

Producto de dos funciones Polinomiales

La multiplicación de dos funciones polinomiales se lleva a cabo de la manera usual aplicando las propiedades de los números reales. Si $f(x)$ tiene grado n y $g(x)$ grado m, podemos escribir:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_0$$

Entonces,

(1) $f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + ... + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$

Para efectuar este producto, es necesario que recuerdes las leyes de los exponentes cuando se multiplican potencias de la misma base.

Como $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$ tenemos que $a_n b_m \neq 0$ y por lo tanto el grado de $f(x) \cdot g(x)$ es $n + m$, lo que podemos escribir como la siguiente definición.

Grado de la multiplicación de dos funciones

> Implica que: El grado del producto de dos funciones polinomiales que no sean 0, es igual a la suma de los grados de las dos funciones polinomiales. (I)

Ejemplo:

Si $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ y $g(x) = 2x^4 + x - 1$ entonces el término de mayor grado en $f(x) \cdot g(x)$ es $6x^7$, por lo tanto el grado del producto es 7.

Aunque no demostraremos ninguna de las propiedades de campo para la multiplicación, podemos decir que es conmutativa y asociativa y que también se cumple la ley distributiva, que hay un elemento identidad para la multiplicación que es la función polinomial 1 de grado 0.

Sólo hay una propiedad de campo que no se cumple, y es la que se refiere a los inversos multiplicativos ya que sólo las funciones polinomiales de grado 0 tienen un inverso multiplicativo, lo que demostraremos de la siguiente manera:

sea $f(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$, como $a_0 \in R$ entonces tiene un inverso

multiplicativo a_0^{-1} por lo que la función polinomial $g(x) = a_0^{-1}$ tiene la propiedad $f(x) \cdot g(x) = a_0 \cdot a_0^{-1} = 1$. Por tanto $g(x)$ es el inverso multiplicativo de $f(x)$.

Demostración del inverso multiplicativo

Podemos agregar una última propiedad que dice:
si $f(x) \cdot g(x) = 0$, entonces $f(x) = 0$ ó $g(x) = 0$.

13.11 Algoritmo* de la División de Funciones Polinomiales

Sean a y b, dos números enteros $b > 0$, xisten dos números únicas r y q tales que $a = b \cdot q + r$ en donde $0 \leq r < b$. En la división de a por b, a se llama dividendo, b divisor, q cociente y r residuo.

Ejemplo:

Encuentra el cociente y el residuo cuando 186 se divide por 15.

$$\begin{array}{r|l} 186 & 15 \\ \underline{15} & 12 \\ 36 & \\ \underline{30} & \\ 6 & \end{array}$$

Entonces el cociente es 12 y el residuo 6, podemos escribir esto como $186 = 15 \cdot 12 + 6$
que es equivalente a la expresión $a = b \cdot q + r$

Usemos ahora el algoritmo de la división para funciones polinomiales.

Ejemplo:

Encuentra el cociente y el residuo cuando $x^4 + 3x^2 - 16$ se divide por $x^2 + 2x + 1$

Escribimos primero el dividendo como
$x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 16$ y
efectuamos la división de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 16 & x^2 + 2x + 1 \\ \underline{x^4 + 2x^3 + x^2} & x^2 - 2x + 6 \\ -2x^3 + 2x^2 + 0x & \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 - 2x} & \\ 6x^2 + 2x - 16 & \\ \underline{6x^2 + 12x + 6} & \\ -10x - 22 & \end{array}$$

*Algoritmo es el nombre dado a cualquier procedimiento de cálculo. El nombre procede del matemático árabe del siglo IX llamado al-Huwarizmi quien escribió un libro explicando el uso de los numerales indo-arábigos.

obtenemos $q(x) = x^2 - 2x + 6$ y $r(x) = -10x - 22$

Al hacer la división procedimos como lo hiciste en el módulo 14 de la unidad IV y como en los enteros podemos escribir la división como

$$x^4 + 3x^2 - 16 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 6) + (-10x - 22)$$

o sea $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

En general si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones plinomiales y $g(x) \neq 0$, existen funciones polinomiales únicas $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$

donde $r(x) = 0$ si $g(x)$ es factor de $f(x)$ o el grado $r(x)$ es menor al grado de $g(x)$ si $g(x)$ no es factor de $f(x)$.

Ejemplo:

Encuentra el cociente y el residuo cuando $x^4 - 5x^3 + 4x - 2$ se divide por $x - 3$.

Escribimos el dividendo como $x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 4x -$ y efectuamos la división.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & +0x^2 & +4x & -2 & x-3 \\ \cline{6-6}
\underline{x^4} & \underline{-3x^3} & & & & x^3 - 2x^2 - 6x - 14 \\
 & -2x^3 & +0x^2 & & & \\
 & \underline{-2x^3} & \underline{+6x^2} & & & \\
 & & -6x^2 & +4x & & \\
 & & \underline{-6x^2} & \underline{+18x} & & \\
 & & & -14x & -2 & \\
 & & & \underline{-14x} & \underline{+42} & \\
 & & & & -46 &
\end{array}$$

Luego, el cociente es $x^3 - 2x^2 - 6x - 14$ y el residuo es -46.

La división de una función polinomial por otra función polinomial la podemos resumir en los pasos siguientes:

1. Se arreglan los términos del dividendo y del divisor en potencias descendentes en la variable x, si no aparece alguna potencia de x se sobreentiende que el coeficiente del término en dicha potencia es 0.
2. Se obtiene el primer término del cociente dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

3. Se multiplica el divisor por este término del cociente y este producto se resta del dividendo.
4. El residuo de esta resta junto con los términos no usados del divisor, se usan como un nuevo dividendo y se repiten los pasos del 2 al 4 obteniendo cada vez un nuevo término del cociente.
5. Cuando el residuo sea 0 o tenga grado inferior que el divisor, termina el proceso.

División Sintética

Algunas veces es necesario dividir un polinomio en x por binomios de la forma $x - c$, $c \in R$. Cuando tenemos este caso, el trabajo de la división se simplifica mucho si usamos el proceso llamado **división sintética** el cual ilustraremos mediante el siguiente ejemplo:

Si el polinomio $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ se divide por $x - 2$ de la manera usual, obtenemos,

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -5x^3 & +3x^2 & +2x & -1 & x-2 \\ \cline{6-6}
\underline{2x^4} & \underline{-4x^3} & & & & 2x^3 - x^2 + x + 4 \\
 & -x^3 & +3x^2 & & & \\
 & \underline{-x^3} & \underline{+2x^2} & & & \\
 & & x^2 & +2x & & \\
 & & \underline{x^2} & \underline{-2x} & & \\
 & & & 4x & -1 & \\
 & & & \underline{4x} & \underline{-8} & \\
 & & & & 7 &
\end{array}$$

Si hacemos esto mismo escribiendo solamente los coeficientes de cada término, tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & +3 & +2 & -1 & 1-2 \\ \cline{6-6}
\underline{2} & \underline{-4} & & & & 2-1+1+4 \\
 & -1 & +3 & & & \\
 & \underline{-1} & \underline{+2} & & & \\
 & & 1 & +2 & & \\
 & & \underline{1} & \underline{-2} & & \\
 & & & 4 & -1 & \\
 & & & \underline{4} & \underline{-8} & \\
 & & & & 7 &
\end{array}$$

De la forma anterior vemos que las expresiones repetidas que corresponden a los términos $2x^4$, $-x^3$, x^2 y $4x$ se pueden suprimir sin dar lugar a dudas, y también es innecesario bajar los términos $3x^2$, $2x$ y -1 del dividendo como está indicado. Si eliminamos estas repeticiones la forma anterior queda

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & +3 & +2 & -1 & 1-2 \\
\cline{6-6}
-4 & & & & & 2-1+1+4 \\
\cline{1-1}
-1 & & & & & \\
 & +2 & & & & \\
\cline{2-2}
 & 1 & & & & \\
 & & -2 & & & \\
\cline{3-3}
 & & 4 & & & \\
 & & & -8 & & \\
\cline{4-4}
 & & & 7 & &
\end{array}
$$

Como se han eliminado los términos donde interviene el coeficiente de la x del divisor, eliminamos el 1 y movemos todos los números hacia arriba quedando lo siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & +3 & +2 & -1 & -2 \\
\cline{6-6}
 & -4 & +2 & -2 & -8 & 2-1+1+4 \\
\cline{2-5}
 & -1 & +1 & +4 & +7 &
\end{array}
$$

Si ahora bajamos el primer coeficiente del dividendo al primer lugar de la última fila, los primeros coeficientes de esa fila serán $2, -1, 1$ y 4 que no son otros que los coeficientes del cociente y el número final 7 es el residuo. Eliminando los coeficientes del cociente, el arreglo queda

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & +3 & +2 & -1 & \\
 & -4 & +2 & -2 & -8 & -2 \\
\hline
2 & -1 & +1 & +4 & +7 &
\end{array}
$$

Del esquema anterior vemos que cada elemento de la segunda fila, se obtiene multiplicando el elemento precedente de la tercera fila por -2 y después restamos este producto del correspondiente elemento de la primera fila. Para evitar tener que hacer estas restas, podemos cambiarle de signo a -2 y entonces cuando usamos el proceso anterior, los signos de los elementos de la segunda fila aparecen cambiados y, por lo tanto, para encontrar los elementos de la tercera fila sumamos el número que está arriba de cada uno de ellos

con el correspondiente de la primera fila. Haciendo este cambio tenemos

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & +3 & +2 & -1 & \\
 & 4 & -2 & +2 & +8 & 2 \\
\hline
2 & -1 & +1 & +4 & +7 &
\end{array}
$$

Luego, los primeros números de la tercera fila son los coeficientes del cociente y el último número es el residuo. Así podemos escribir:

cociente $= 2x^3 - x^2 + x + 4$ y residuo $= 7$

De lo anterior también podemos ver que el grado del cociente siempre es menor en una unidad que el grado del dividendo, y que en este tipo de división el residuo siempre es independiente de x, es decir una constante.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
   y $g(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$
   Encuentra:
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $-f(x)$

2. Encuentra el cociente y el residuo cuando $2x^4 - 3x^2 + 6x + 2$ se divide por $x^2 + 2x - 1$. Expresa el resultado como

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

3. En los siguientes problemas usa división sintética para encontrar el cociente y el residuo si el primer polinomio se divide por el segundo.
   a) $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; $x + 2$
   b) $3x^4 + 2x^2 - 1$; $x - 1$
   c) $x^5 - x^2 + 2$; $x + 1$
   d) $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$; $x - 3$
   e) $-x^4 + 5x^3 - 3x + 1$; $x + 2$

f) $2x^2 + 3x - 2$; $x - \frac{1}{2}$

g) $6x^4 - 3x + 2$; $x + \frac{3}{2}$

h) $5x^5 - 1$; $x + 3$

i) $x^3 + ax^2 + x + 3a$; $x + a$

j) $2x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 4a^3$; $x - a$

4. En los siguientes problemas encuentra un valor de k de tal manera que al dividir la primera expresión por la segunda, el residuo tenga el valor que se indica.

a) $2x^3 - 3x^2 + 4k$, $x - 2$; residuo $= 12$

b) $x^3 + 2x^2 + kx + 3$; $x + 1$; residuo $= -6$

c) $x^3 + kx^2 + 2kx + 30$; $x + 3$; residuo $= 3$

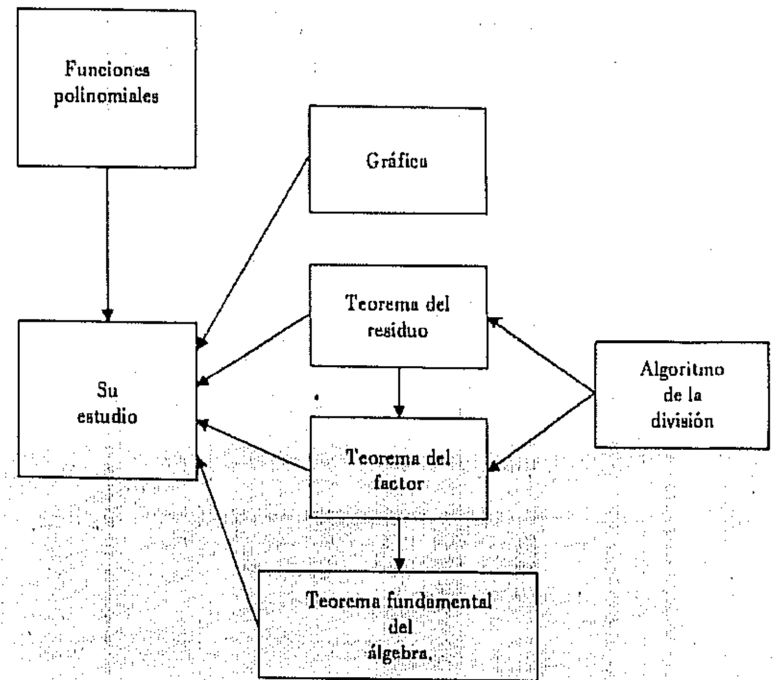
Módulo 14

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Confirmará el teorema del residuo en diferentes funciones polinomiales.
2. Confirmará el teorema del factor en diferentes funciones polinomiales.
3. Graficará funciones polinomiales utilizando división sintética.

ESQUEMA-RESUMEN



14.1 Gráficas de Funciones Polinomiales

¿Cómo establecen los ceros de una función?

Un método sencillo nos permite conocer las coordenadas de algunos puntos de la gráfica de una función polinomial; el diagramar un número suficiente de estos puntos y unirlos mediante una línea suave nos proporciona una idea bastante clara de dicha gráfica; en algunos casos podemos determinar con relativa facilidad los ceros de la función y en otros, estas raíces pueden determinarse con la aproximación que se desee. Para describir el método, es necesario que primero establezcamos algunas propiedades o características de estas funciones o bien del polinomio al que represente $f(x)$.

14.11 Teorema del Residuo

> Si un polinomio $f(x)$ se divide por un binomio de la forma $x - c$ entonces el residuo es $f(c)$.

De acuerdo con el algoritmo de la división para polinomios

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r$$

y cuando hacemos $x = c$ tenemos

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r$$

efectuando

$$f(c) = 0 \cdot q(c) + r$$
$$f(c) = r$$

Ejemplo: Confirma el teorema del residuo para

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 25x - 50 \quad y \quad c = 5$$

Solución: primero determinamos $f(5)$ por sustitución así

$$f(5) = (5)^3 + 2 \cdot (5)^2 - 25 \cdot 5 - 50$$
$$f(5) = 125 + 50 - 125 - 50$$
$$f(5) = 0$$

Para confirmar el teorema dividimos ahora $f(x)$ entre $x - 5$, el residuo debe ser 0.

$$\begin{array}{r|l} 1 + 2 - 25 - 50 & \\ + 5 + 35 + 50 & 5 \\ \hline 1 + 7 + 10 + 0 & \end{array}$$

que es lo que deseábamos confirmar.

14.12 Teorema del Factor

> Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

De nuevo nos auxiliamos del algoritmo de la división

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r$$

pero como $r = f(c)$, entonces

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + f(c)$$

En esta igualdad es fácil notar que si $x - c$ es un factor de $f(x)$, es necesario que $f(c) = 0$, o sea

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x)$$

y que recíprocamente si $f(c) = r = 0$ entonces $x - c$ es un factor del polinomio $f(x)$.

Ejemplo: Prueba que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

Solución a) Usando la sustitución tenemos:

$$f(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 3(2) + 2$$
$$f(2) = 8 - 16 + 6 + 2$$
$$f(2) = 0$$

Luego, si el residuo es 0, entonces $x - 2$ es factor de $f(x)$.

Solución b) Utilizando división sintética tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 4 + 3 + 2 & \\ + 2 - 4 - 2 & 2 \\ \hline 1 - 2 - 1 + 0 & \end{array}$$

Como $r = 0$ concluimos que $x - 2$ es factor de $f(x)$.

14.13 Teorema Fundamental del Algebra

Raíz real o compleja

> Toda ecuación polinomial $f(x) = 0$ de grado mayor que cero, tiene al menos una raíz real o compleja.

Este teorema aunque fundamental por su importancia no nos es posible demostrártelo en forma elemental, por lo que nos concretamos a enunciarlo. Sin embargo, lo usaremos para demostrar una propiedad acerca del número de raíces de una ecuación polinomial.

Raíces de una ecuación polinomial

> Toda ecuación polinomial de la forma
>
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$
>
> tiene exactamente n raíces.

Demostración: partiendo del teorema fundamental aceptamos que $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, llamémosla c_1, entonces el teorema del factor nos permite afirmar que $x - c_1$, es factor de $f(x)$ por lo que

$$f(x) = (x - c_1) \cdot q_1(x)$$

Siendo $q_1(x)$ el cociente de la división $f(x)$ entre $x - c$, un polinomio en x, existe un valor de x para el cual $q_1(x) = 0$, sea ese valor $x = c_2$ por tanto $q_1(x) = (x - c_2) \cdot q_2(x)$

Siendo $q_2(x)$ el cociente de la división de $q_1(x)$ entre $x - c_2$ entonces

$$f(x) = (x - c_1)\ (x - c_2) \cdot q_2(x)$$

Este proceso podemos continuarlo hasta que

$$f(x) = (x - c_1)\ (x - c_2) \dots (x - c_n) \cdot q_n(x)$$

Propiedad del número de raíces.

y ya que en esta expresión existen n factores $(x - c_i)$, $q_n(x)$ debe ser la constante a_n por lo que:

$$f(x) = a_n\ (x - c_1)\ (x - c_2)\ (x - c_3) \dots (x - c_n)$$

en donde cada c_i es un cero de $f(x)$.

Como en esta expresión $f(x) = 0$ si y sólo si x toma el valor de una Ci concluimos que $f(x)$ tiene n ceros y sólo n ceros.

De las propiedades que estudiaste en el párrafo anterior, podemos concluir que en una función polinomial $y = f(x)$ al asignar a x una valor, el correspondiente valor de y lo podemos conocer valiéndonos de la división sintética, ya que el residuo en esta operación es $r = y$, o sea que cuando $x = c$ tenemos la siguiente situación:

$$y = f(c)$$

pero como	$f(c) = r$	teorema del residuo
entonces	$y = r$	propiedad transitiva de igualdades

Ejemplo:

Sea $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$ una función polinomial, tengamos por meta $f(2)$, es decir la ordenada del punto en el que $x = 2$. Usando la división sintética tenemos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +1 & -3 & +5 & \\ & +4 & +10 & +14 & 2 \\ \hline 2 & +5 & +7 & +19 & \end{array}$$

$f(2) = 19$, el punto tiene por coordenadas $(2,19)$

Este hecho es el que nos permite tabular de forma simple y llegar de este modo a la gráfica de la función; sin embargo, el proceso se simplifica aún más cuando logramos determinar un intervalo en el cual están incluidas las raíces reales.

Para ello nos valemos del siguiente hecho cuya demostración se omite.

¿Cómo obtenemos el número de raíces por medio de división sintética?

Cuando dividimos mediante división sintética

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots a_0 \text{ entre } x - c$$

con $a_n > 0$

1. Si $c > 0$ y todos los números de la tercera fila son positivos, entonces c es mayor o igual que cualquiera de las raíces de $f(x) = 0$.
2. Si $c < 0$ y los signos de la tercera fila son alternados, es decir uno positivo y el siguiente negativo y así sucesivamente, entonces c es menor o igual que cualquiera de las raíces de $f(x) = 0$.

Ejemplo:

a) Busca un número c que sea mayor o igual que todas las raíces de $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$.

b) Encuentra un número c que sea menor o igual que cualquiera de las raíces de $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$.

Solución a) Sea $c = 3$; entonces

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +5 & -2 & -24 & \\ & +3 & +24 & +66 & 3 \\ \hline 1 & +8 & +22 & +42 & \end{array}$$

$a = 1 > 0$, $3 > 0$ y todos los números de la tercera fila son positivos. Luego 3 es mayor o igual que cualquiera de las raíces de $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$.

Solución b) Sea $c = -6$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +5 & -2 & -24 & \\ & -6 & +6 & -24 & -6 \\ \hline 1 & -1 & +4 & -48 & \end{array}$$

Luego, -6 es menor o igual que cualquier raíz de

$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$.

Ejemplo: Graficar $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

En el ejemplo anterior se vio que las raíces de la ecuación que resulta al hacer $f(x) = 0$ en dicha igualdad están contenidas en $-6 \leq x \leq 3$ esto significa que si $x > 3$ ó $x < -6$ la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ no toca el eje X.

Mediante división sintética, construimos la siguiente tabla de valores.

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−108	−48	−14	0	0	−8	−18	−24	−20	0	42

y graficamos*

* Observa que en este ejemplo se han usado escalas diferentes para los dos ejes.

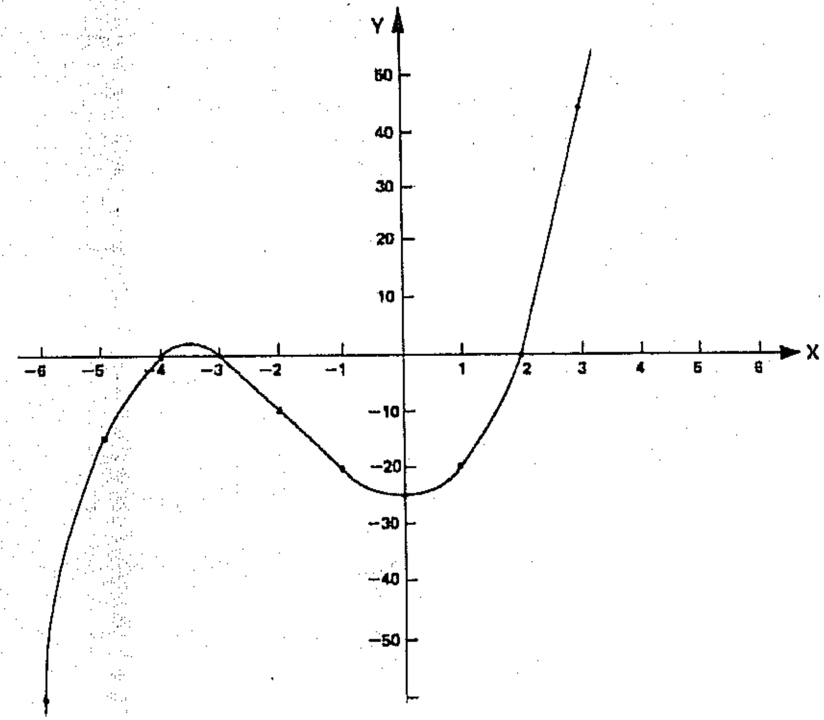


Figura 1

Ejemplo:

Grafica la función polinomial definida por

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 10x + 8$$

De nuevo construimos la tabla de valores usando división sintética.

x	−3	−2	−1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4
y	50	−8	−6	8	10	0	$-\frac{47}{16}$	2	64

En este caso sólo una de las raíces es un número entero si $x = 2$, $y = 0$, sin embargo, esta tabla de valores nos permite localizar el resto de las raíces; observa que al pasar x de -1 a 0, $f(x)$ cambió de signo, y para que se produzca este cambio en y es necesario que la gráfica cruce el eje X, un número impar de veces entonces una raíz está entre -3 y -2, otra entre -1 y 0, una tercera entre $\frac{5}{2}$ y 3 siendo la cuarta $x = 2$.

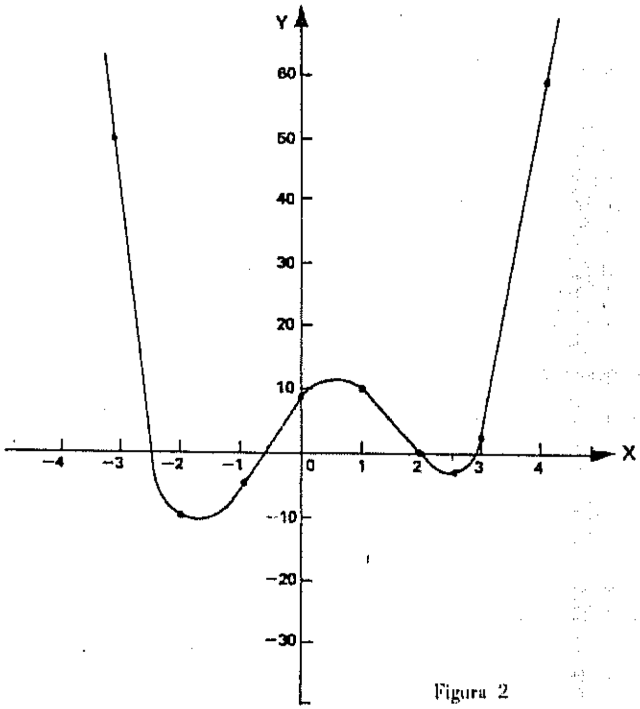


Figura 2

Ejemplo: Graficar $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 20$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	68	8	8	20	20	8	8	68

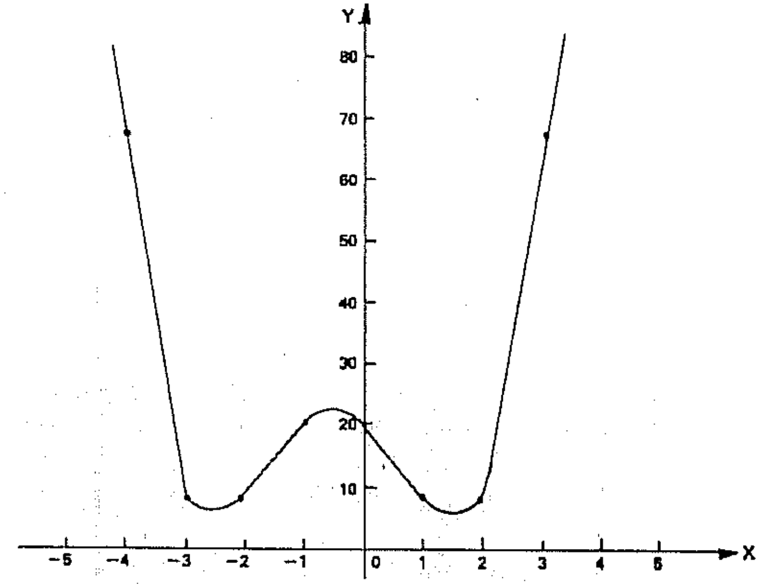


Figura 3

Se presenta de nuevo el caso en que la figura no toca el eje X; esto significa que las raíces de $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 20 = 0$ son números complejos. La determinación de raíces complejas así como la de las reales no enteras, te será presentado en un párrafo posterior a éste.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Grafica las siguientes funciones con el dominio que se especifica:

   a) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25x - 8;\ -6 \leq x \leq 7$

   b) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25x - 8;\ -2 \leq x \leq 7$

   c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 8;\ -8 \leq x \leq 2$

   d) $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2;\ -5 \leq x \leq 4$

   e) $f(x) = x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 28x - 48;\ -7 \leq x \leq 2$

   f) $f(x) = x^3 - 13x^2 + 48x - 46;\ 0 \leq x \leq 8$

   g) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32x - 17;\ -6 \leq x \leq 4$

   h) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x - 17;\ -6 \leq x \leq 4$

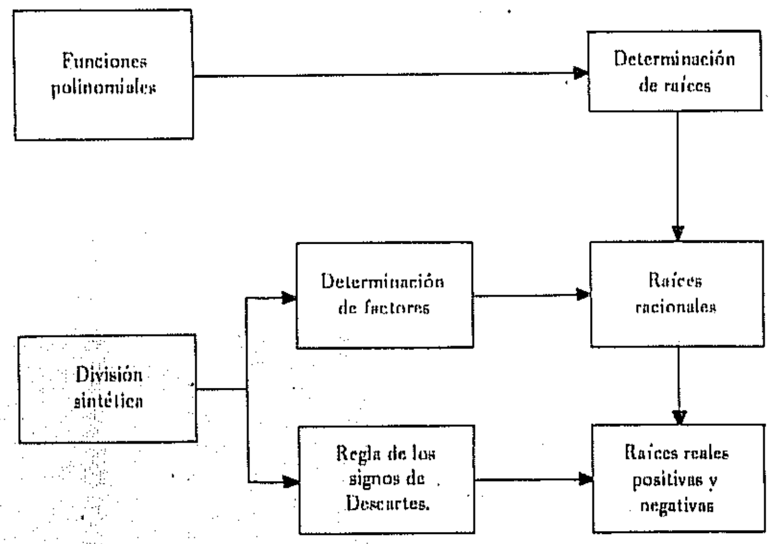
Módulo 15

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará los factores de a_0 y de a_n en una función polinomial dada: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$
2. Utilizará la división sintética para determinar las raíces racionales de funciones polinomiales dadas.
3. Aplicará la regla de los signos de Descartes para simplificar la determinación de raíces racionales en funciones polinomiales dadas.

ESQUEMA ,RESUMEN



15.1 Raíces Racionales

La determinación de los ceros de una función polinomial se fundamenta en el siguiente hecho:

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ a_0 \neq 0$ una función polinomial con coeficientes enteros; para toda raíz racional $\left(\frac{c}{d}\right)$ de $f(x)$, c es un factor de a_0 y d es un factor de a_n (c y d son primos entre sí* y $c > 0$).

Ejemplo:

Encuentra todas las raíces racionales de

$3x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 8 = 0$

Como primera etapa del proceso determinamos los factores de $a_0 = +8$ y $a_n = 3$ los factores de $+8$ son $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, pero como $c > 0$ entonces eliminamos los negativos y quedan 1, 2, 4, 8. Los factores de 3 son $\pm 1, \pm 3$.

Entonces cualquier raíz racional es uno de los números siguientes que son las raíces racionales posibles:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}.$$

De estas dieciseis posibilidades, no más de cuatro pueden ser raíces; para determinar cuáles lo son nos valemos de la división sintética sea $x = +2$, entonces

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & +2 & -18 & +0 & +8 & \\ & 6 & +16 & -4 & -8 & 2 \\ \hline 3 & +8 & -2 & -4 & +0 & \end{array}$$

Por lo que $+2$ es una raíz y $x - 2$ un factor de $f(x)$ como consecuencia

$3x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 8 = (x - 2)\ (3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$

y el resto de las raíces se busca en el polinomio

$3x^3 + 8x^2 - 2x - 4.$

Siendo $3x^3 + 8x^2 - 2x - 4 = 0$ la ecuación en donde debemos buscar las otras raíces: hagamos ahora $x = -\frac{2}{3}$ ó lo que es igual dividamos entre $x + \frac{2}{3}$

* Dos números son primos entre sí si no tienen factores primos comunes.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & +8 & -2 & -4 & -\frac{2}{3} \\ & -2 & -4 & +4 & \\ \hline 3 & +6 & -6 & +0 & \end{array}$$

entonces $x = -\frac{2}{3}$ es otra raíz y $x + \frac{2}{3}$ otro factor, por lo que

$$f(x) = (x - 2)\ \left(x + \frac{2}{3}\right)\ (3x^2 + 6x - 6)$$

Las dos raíces que faltan resultan de la ecuación

$3x^2 + 6x - 6 = 0$

ó $\quad x^2 + 2x - 2 = 0$

La que por ser cuadrática podemos resolver usando la fórmula general, entonces

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

con lo cual conlcuimos que sólo dos raíces son racionales y las otras dos son irracionales, entonces,

$$f(x) = (x - 2)\ \left(x + \frac{2}{3}\right)\ (x + 1 - \sqrt{3})\ (x + 1 + \sqrt{3})$$

Regla para determinar el número máximo de raíces

Como las posibilidades para una raíz racional pueden ser muchas, el probar cada una de ellas hasta reducir la función polinomial a una cuadrática es naturalmente un proceso tedioso. Con objeto de simplificarlo te vamos a enunciar una regla o criterio cuya aplicación te permite determinar el número máximo de raíces reales positivas o de raíces reales negativas; esta regla precisa que el polinomio $f(x)$ esté ordenado en forma creciente o decreciente y nosotros debemos conocer qué se entiende por un cambio de signos. Se dice que existe un cambio de signos si los signos de dos términos consecutivos son diferentes.

Ejemplo: en el polinomio $\quad 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6$

Existen dos cambios de signo porque los términos 2o. y 3o. tienen signos diferentes, y otros dos términos consecutivos 4o. y 5o. también difieren en signo. Asimismo en el polinomio

$$x^4 - x^3 + 6x^2 + 4x - 8$$

hay tres cambios de signo.

Ahora te enunciamos y ejemplificamos el criterio que es conocido como Regla de los signos de Descartes.

15.11 Regla de los Signos de Descartes

El número máximo de raíces reales positivas de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ no es mayor que el número de cambios de signo en $f(x)$.

El número de raíces reales negativas de la misma ecuación no es mayor que el número de cambios de signo en $f(-x)$.

Ejemplo:

En $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ hay tres cambios de signo por lo que la ecuación $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$ tiene un máximo de tres raíces reales positivas. Ahora en

$$f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^3 - 7(-x)^2 + 5(-x) - 1$$

ó $$f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 5x - 1$$

hay un cambio de signo, por lo tanto tiene cuando mucho una raíz real negativa.

Ejemplo:

Encuentra las raíces racionales de la ecuación

$$3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6 = 0$$

Solución: Cualquier raíz racional de esta ecuación está formada por un factor positivo de 6 dividido por un factor de 3.

Entonces: factores positivos de 6: 1, 2, 3, 6

factores de 3: $\pm 1, \pm 3$

Raíces racionales posibles: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$

en el polinomio $3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6 = 0$ hay dos cambios de signo, entonces tenemos un máximo de dos raíces reales positivas.

si x es sustituida por $(-x)$ tenemos

$$3(-x)^4 - (-x)^3 - 21(-x)^2 - 11(-x) + 6 = 0$$

ó $$3x^4 + x^3 - 21x^2 + 11x + 6 = 0$$

Resultan dos cambios de signo por lo que existen cuando mucho dos raíces reales negativas. Existen las mismas posibilidades para las raíces positivas que para las raíces negativas.

Si trabajamos con la función $f(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6$ y le asignamos a x los valores 0 y 1 tenemos que

$f(0) = 6$

y $f(1) = -24$ porque

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -1 & -21 & -11 & +6 & \\ & 3 & +2 & -19 & -30 & 1 \\ \hline 3 & +2 & -19 & -30 & -24 & \end{array}$$

Puedes notar que al pasar x de 0 á 1, $f(x)$ cambió de signo lo cual significa que al menos en una ocasión cruzó el eje X; si en el (los) puntos (s) de intersección la x es racional su valor es $\frac{1}{3}$ ó $\frac{2}{3}$; probemos con $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -1 & -21 & -11 & +6 & \\ & +1 & +0 & -7 & -6 & \frac{1}{3} \\ \hline 3 & +0 & -21 & -18 & +0 & \end{array}$$

$\frac{1}{3}$ es raíz de la ecuación $f(x) = 0$, el resto de las raíces se busca en la ecuación definida por el cociente de la división sintética a la cual llamamos ecuación degradada; ésta es

$$3x^3 + 0x^2 - 21x - 18 = 0$$

ó $$x^3 + 0x^2 - 7x - 6 = 0$$

probemos ahora con $x = 2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & -7 & -6 & \\ & +2 & +4 & -6 & 2 \\ \hline 1 & +2 & -3 & -12 & \end{array}$$

2 no es raíz de la ecuación; probemos con $x = 3$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 + 0 & - 7 & - 6 & & \\ & + 3 & + 9 & + 6 & 3 \\ \hline 1 + 3 & + 2 & + 0 & & \end{array}$$

3 es raíz de la ecuación y la ecuación degrada es ahora una cuadrática. $x^2 + 3x + 2 = 0$ por lo que

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x = -2 \quad ó \quad x = -1$$

entonces las raíces racionales de $3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6 = 0$

es el conjunto $\left\{-2, -1, \frac{1}{3}, 3\right\}$ y el polinomio factorizado es

$$3(x + 2)\ (x + 1)\ (x - \tfrac{1}{3})\ (x - 3) = 0$$

Ejemplo:

Encuentra el conjunto solución de la ecuación

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$$

Solución:

Factores positivos de 8: 1, 2, 4, 8
Factores de 1: ± 1

raíces racionales posibles $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

En la ecuación hay cuatro cambios de signo por lo que, existen posibilidades de hasta cuatro raíces positivas, por lo que nos concretamos a probar con estas posibilidades, sea $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & - 7 & + 18 & - 20 & + 8 & \\ & + 1 & - 6 & + 12 & - 8 & 1 \\ \hline 1 & - 6 & + 12 & - 8 & + 0 & \end{array}$$

1 es raíz de la ecuación, $(x - 1)$ factor del polinomio y $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ la ecuación degradada en la que buscamos el resto de las raíces, ahora sí $x = 2$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & - 6 & + 12 & - 8 & \\ & + 2 & - 8 & + 8 & 2 \\ \hline 1 & - 4 & + 4 & + 0 & \end{array}$$

2 es raíz, $(x - 2)$ factor y $x^2 - 4x + 4 = 0$ la ecuación degradada.

Pero $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)\ (x - 2)$ con lo que concluimos que la ecuación tiene cuatro raíces racionales que son 1, 2, 2, 2. A 2 se le denomina raíz repetida ya que aparece como raíz en tres ocasiones. Ya que en una ecuación pueden existir raíces repetidas se recomienda que al obtener una raíz se pruebe este valor en la ecuación degrada para determinar si es repetida o no.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Encuentra el conjunto solución de las ecuaciones dadas:

a) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$
b) $4x^3 - 7x - 3 = 0$
c) $x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$
d) $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
e) $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$
f) $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$
g) $3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6 = 0$
h) $8x^4 + 6x^3 - 51x^2 + 11x + 6 = 0$
i) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
j) $4x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 2x - 5 = 0$
k) $6x^5 + 19x^4 + 26x^3 + 26x^2 + 19x + 6 = 0$
l) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$

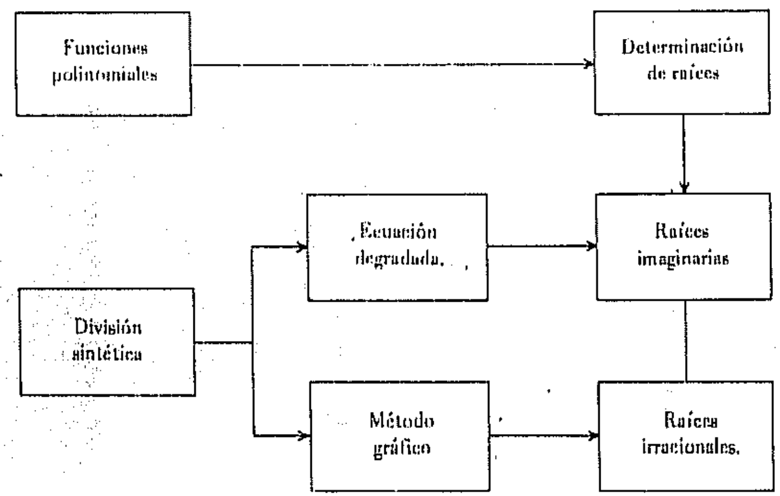
Módulo 16

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Obtendrá todas las raíces reales de una función polinomial dada, utilizando la división sintética.
2. Después de utilizar la división sintética y cuando la ecuación quede de grado 2 utilizará la fórmula general para obtener las raíces imaginarias.
3. Obtendrá las raíces irracionales de funciones polinomiales dadas utilizando el método gráfico.

ESQUEMA-RESUMEN



16.1 Raíces Imaginarias

El método para determinar las **raíces imaginarias** de una ecuación polinomial, está fuera del alcance del fin que se persigue en este texto.

¿Qué significa tener una conjugada?

Aunque no se demuestra cuándo una ecuación polinomial tiene **raíces imaginarias** éstas siempre aparecen por pares, siendo en cada par una conjugada de la otra. Cuando sólo son dos las raíces imaginarias que tiene una ecuación, lo que hacemos es obtener primero todas las raíces reales por el método de la división sintética, y cuando la ecuación degradada quede de grado 2, se resuelve mediante la fórmula general, obteniéndose las dos últimas raíces que son las que suponemos imaginarias.

Ejemplo:

Encontrar todas las raíces de la ecuación $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$

Usamos división sintética para encontrar las raíces reales

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & +9 & -5 & \\ & +1 & -4 & +5 & 1 \\ \hline 1 & -4 & +5 & +0 & \end{array}$$

Como el residuo es 0, 1 es raíz de la ecuación y la ecuación degradada es

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Resolvemos esta ecuación usando la fórmula general:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$x = 2 \pm i$$

Luego, la ecuación original tiene dos raíces imaginarias que son

$$2 + i \quad ó \quad 2 - i$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación

$$x^5 - 8x^4 + 21x^3 - 12x^2 - 22x + 20 = 0$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -8 & +21 & -12 & -22 & +20 & \\ & +1 & -7 & +14 & +2 & -20 & 1 \\ \hline 1 & -7 & +14 & +2 & -20 & & \\ & -1 & +8 & -22 & +20 & & -1 \\ \hline 1 & -8 & +22 & -20 & & & \\ & +2 & -12 & +20 & & & 2 \\ \hline 1 & -6 & +10 & +0 & & & \end{array}$$

Luego, la ecuación degradada de segundo grado que queda es:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

Para encontrar las dos raíces restantes usamos la ecuación degradada $x^2 - 6x + 10 = 0$ y resolvemos por la fórmula general.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 2i}{2}$$

$$x = 3 \pm i$$

Luego, las raíces de la ecuación original son:

$$1, -1, 2, 3 + i \quad ó \quad 3 - i$$

Como se puede ver de los dos ejemplos anteriores, las raíces imaginarias aparecieron por pares y son conjugadas.

Ejemplo:

Demuéstrese que la ecuación $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ tiene cuatro raíces imaginarias.

En este ejemplo sólo se demostrará que la ecuación tiene 4 raíces imaginarias pero no determinaremos cuáles son, para ello procedemos de la manera siguiente:

Hagamos $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

El número de variaciones de signo en $f(x)$ es 0, por lo tanto de acuerdo con la regla de los signos de Descartes, el número de raíces positivas es 0.

Encontremos $f(-x)$.

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1$$
$$f(-x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

El número de variaciones de signo en $f(-x)$ es 0, por lo que el número de raíces negativas es 0.

Cómo una consecuencia del Teorema fundamental del Algebra, esta ecuación debe tener 4 raíces ya que es de 4o. grado, sin embargo, no tiene raíces reales positivas ni negativas o cero por lo que concluimos que sus cuatro raíces deben ser imaginarias.

16.2 Raíces Irracionales

Utilizando el método gráfico encontramos las raíces. . .

Cuando una ecuación polinomial tiene raíces irracionales, podemos encontrar éstas con el grado de exactitud que se desee usando el método gráfico; este método está basado en que si dos valores de la variable están muy próximos uno de otro, la gráfica entre ellos se puede considerar una recta.

Ejemplo:

Encontrar con aproximación de tres cifras decimales, una raíz irracional de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$

Usando división sintética localizamos entre qué enteros consecutivos hay una raíz.

$$\begin{array}{l|l} 1 - 2 + 0 - 2 & \\ \quad + 1 - 1 - 1 & 1 \\ \hline 1 - 1 - 1 - 3 & \end{array} \qquad f(1) = -3$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - 2 + 0 - 2 & \\ \quad + 2 + 0 + 0 & 2 \\ \hline 1 + 0 + 0 - 2 & \end{array} \qquad f(2) = -2$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - 2 + 0 - 2 & \\ \quad + 3 + 3 + 9 & 3 \\ \hline 1 + 1 + 3 + 7 & \end{array} \qquad f(3) = 7$$

Como $f(2) = -2$ y $f(3) = 7$ hay cuando menos una raíz

entre 2 y 3. Construimos la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ usando los puntos que acabamos de obtener por división sintética y que son: $(2, -2)$, $(3, 7)$ (figura 1 en papel milimétrico).

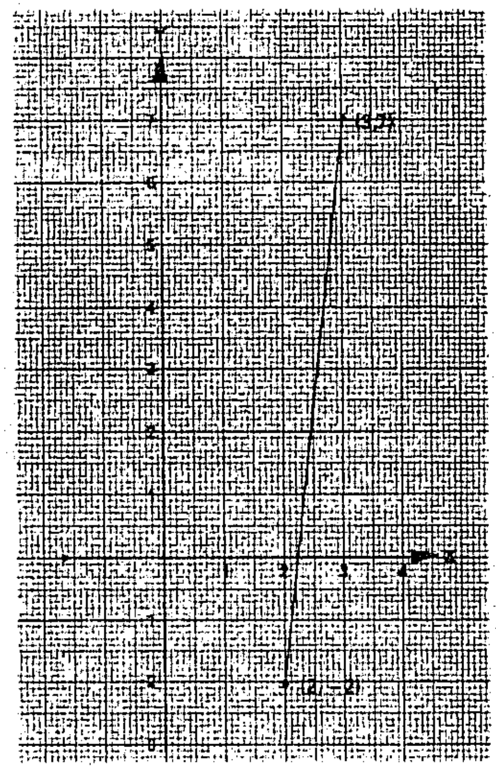


Figura 1

Los dos puntos se unieron mediante una línea recta, y en la gráfica observamos que la recta cruza el eje X entre 2.2, 2.3 ó 2.4; calculamos dos nuevos puntos por donde pasa la gráfica, usando los valores 2.2, 2.3 ó 2.4 en la división sintética tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 1 - 2 \quad + 0 \quad - 2 & \\ \quad 2.2 \quad 0.44 + 0.968 & 2.2 \\ \hline 1 + 0.2 + 0.44 - 1.032 & \end{array} \qquad f(2.2) = -1.032$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - 2 \quad + 0 \quad - 2 & \\ \quad 2.3 \quad 0.69 + 1.587 & 2.3 \\ \hline 1 + 0.3 + 0.69 - 0.413 & \end{array} \qquad f(2.3) = -0.413$$

1	− 2	+ 0	− 2	2.4
	2.4	+ 0.96	+ 2.304	
1	+ 0.4	+ 0.96	+ 0.304	

$f(2.4) = 0.304$

Luego, la gráfica cruza el eje X entre 2.3 ó 2.4; con el objeto de que la aproximación sea mayor, usaremos una escala 10 veces mayor en el eje X que en el eje Y.

Para construir la gráfica usamos los puntos (2.3, −0.413), (2.4, 0.304).

Usaremos solamente la región de plano donde se localizan estos puntos. (ver figura 2).

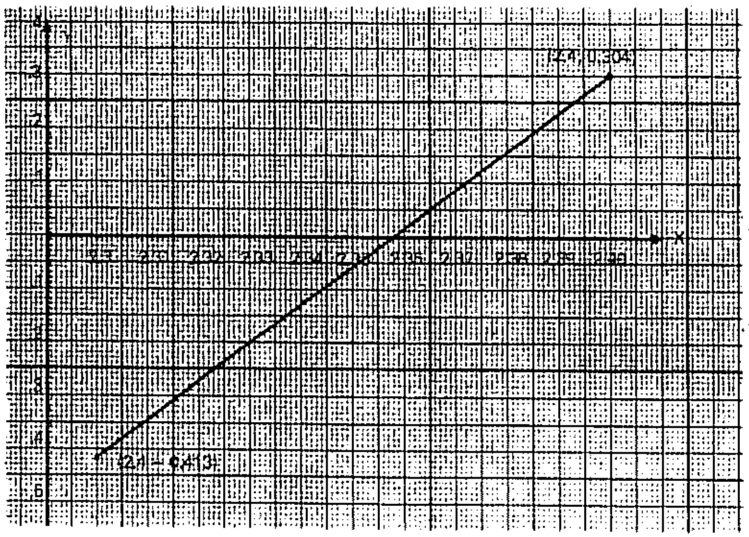


Figura 2

En la gráfica observamos que la recta cruza el eje X entre 2.35 ó 2.36. Usamos estos valores en la división sintética.

1	− 2	+ 0	− 2	2.35
	2.35	0.8225	+ 1.932875	
1	+ 0.35	+ 0.8225	− 0.067125	

$f(2.35) = -0.067125$

1	− 2	+ 0	− 2	2.36
	2.36	+ 0.8496	+ 2.005056	
1	+ 0.36	+ 0.8496	+ 0.005056	

$f(2.36) = 0.005056$

Construimos la gráfica usando los puntos (2.35, −0.067125), (2.36, 0.005056).

En este caso también usamos escalas diferentes en cada eje. (ver figura 3).

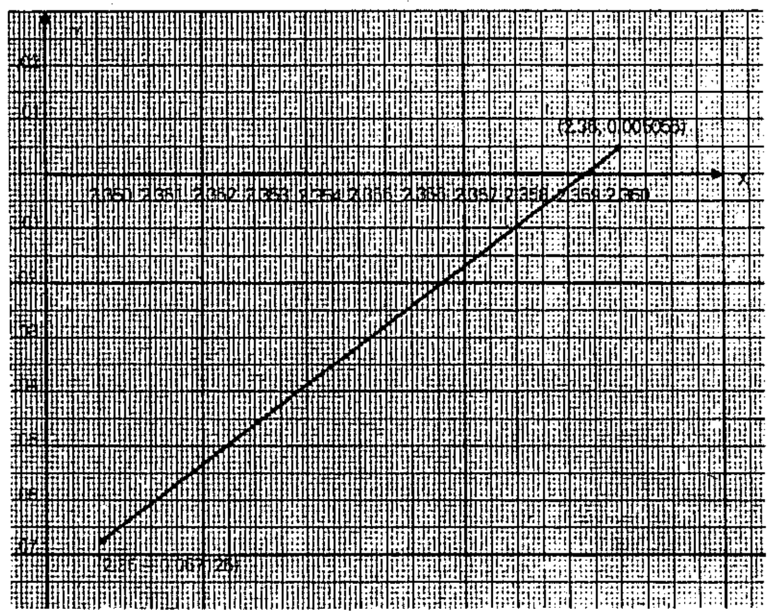


Figura 3

En la gráfica observamos que la recta cruza el eje X entre 2.359 y 2.360, por lo que podemos considerar el valor de la raíz como una aproximación aceptable a tres cifras decimales, sin embargo, esta misma gráfica nos puede servir para aproximar el valor de la raíz una cifra decimal más, ya que se observa claramente que la recta cruza el eje X en x aproximadamente 2.3593, y si probamos este valor por medio de la división sintética encontramos que el residuo es igual a -0.0000299 o sea

$$f(2.3593) = -0.0000299$$

Luego, podemos concluir que una de las raíces de la ecuación con aproximación a tres cifras decimales es: 2.359.

Si la raíz se necesita aproximar con más cifras decimales, se sigue repitiendo el proceso de la división sintética y se grafica tantas veces como sea necesario.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Las siguientes ecuaciones tienen 2 raíces imaginarias y las restantes son reales. Encuentra todas sus raíces.

   a) $4x^3 + 2x^2 + 22x - 12 = 0$
   b) $3x^3 - 3 = 0$
   c) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$
   d) $x^3 + \frac{7}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} = 0$
   e) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
   f) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$
   g) $4x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 2x - 5 = 0$
   h) $2x^5 - 2x^4 - 2x + 2$

2. Demuestra que la ecuación $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ tiene cuatro raíces imaginarias.
3. Demuestra que la ecuación $3x^7 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene seis raíces imaginarias.
4. Demuestra que la ecuación $3x^6 + 2x^3 + 3 = 0$ tiene seis raíces imaginarias.
5. Encuentra con tres cifras decimales la raíz que está entre 2 y 3 en la ecuación $x^3 - x - 9 = 0$. Con la raíz obtenida calcula $f(r)$.
6. Encuentra con tres cifras decimales la raíz que está entre -2 y -3 en la ecuación $x^3 + 2x + 20 = 0$. Con la raíz obtenida calcula $f(r)$.
7. Encuentra con cuatro cifras decimales la raíz que está entre 1 y 2 en la ecuación $x^3 + 3x^2 - 2x - 5 = 0$. Con la raíz obtenida calcula $f(r)$.

8. Encuentra con 4 cifras decimales la raíz que está entre 1 y 2 en la ecuación $x^3 + 4x^2 - 7 = 0$. Con la raíz obtenida calcula $f(r)$.

Bibliografía para consulta. Unidad XII

ALGEBRA
Florence M. Lovaglia
Merrit A. Elmore
Donald Conway
Harla, S. A. de C. V.
1972

INTRODUCCION A LA MATEMATICA MODERNA
Elbridge P. Vance
Fondo Educativo Interamericano, S. A.
1968.

Paneles de verificación

Conjunto de Problemas XII-13.

1. a) $6x^3 + x^2 + 4x + 2$
   b) $-x^3 - 7x^2$
   c) $6x^6 - x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 4x + 1$
   d) $-2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$

2. cociente $= 2x^2 - 4x + 7$
   residuo $= -12x + 9$
   $2x^4 - 3x^2 + 6x + 2) = (x^2 + 2x - 1)\ (2x^2 - 4x + 7) + (-12x + 9)$

3. a) cociente $= 4x^2 - 11x + 24$
   residuo $= -49$

   b) cociente $= 3x^3 + 3x^2 + 5x + 5$
   residuo $= 4$

   c) cociente $= x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$
   residuo $= 0$

   d) cociente $= 3x^2 + 7x + 27$
   residuo $= 78$

   e) cociente $= -x^3 + 7x^2 - 14x + 25$
   residuo $= -49$

   f) cociente $= 2x + 4$
   residuo $= 0$

   g) cociente $= 6x^3 - 9x^2 + \frac{27}{2}x - \frac{93}{4}$
   residuo $= \frac{295}{8}$

   h) cociente $= 5x^4 - 15x^3 + 45x^2 - 135x + 405$
   residuo $= -1216$

   i) cociente $= x^2 + 1$
   residuo $= 2a$

j) cociente = $2x^2 + 3a^2$
residuo = $-a^3$

4. a) $k = 2$
b) $k = 10$
c) $k = 0$

Conjunto de Problemas XII-14

Nota: Como su solución es gráfica, se deja para que el alumno la compruebe.

Conjunto de Problemas XII-15

1. a) $\{-5, -2, 1\}$
b) $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$
c) $\{-1, 6\}$
d) $\{-i, i, \frac{1}{2}\}$
e) $\{-2, -1, \frac{2}{3}, 1\}$
f) $\{-3, -2, \frac{1}{2}, 1\}$
g) $\{-2, -1, \frac{1}{3}, 3\}$
h) $\{-3, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\}$
i) $\{-i, i, -1, 2\}$
j) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - 2i, 1 + 2i\}$
k) $\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, -i, i\}$
l) $\{1, -1, -i, i\}$

Conjunto de Problemas XII-16

1. a) $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}\,i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}\,i\}$
b) $\{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\}$
c) $\{\frac{1}{2}, i, -i\}$

d) $\{-\frac{1}{3}, -1 + i, -1 - i\}$
e) $\{-1, 2, i, -i\}$
f) $\{1, -1, 1 + i, 1 - i\}$
g) $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 + 2i, 1 - 2i\}$
h) $\{-1, 1, i, -i\}$

2. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ cambios de signo 0
$f(-x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ cambios de signo 0

por tanto, no tiene raíces reales y siendo de 4o. grado sus 4 raíces serán imaginarias.

3. $f(x) = 3x^7 + x^3 + x + 1$ cambios de signo 0
$f(-x) = -3x^7 - x^3 - x + 1$ cambios de signo 1, por tanto, tiene una raíz real negativa y siendo la ecuación de 7o. grado las 6 restantes serán imaginarias.

4. $f(x) = 3x^6 + 2x^2 + 3$ cambios de signo 0
$f(-x) = 3x^6 + 2x^2 + 3$ cambio de signo 0
por tanto, no tiene raíces reales y siendo la ecuación de 6o. grado las 6 raíces serán imaginarias.

5. $r = 2.240$ $f(2.240) = -0.000576$
6. $r = -2.469$ $f(-2.469) = 0.011079$
7. $r = 1.3300$ $f(1.3300) = 0.000663$
8. $r = 1.1642$ $f(1.1642) = -0.0006415$