SECRETARIA DE EDUCACIÓN PUBLICA
SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

DIRECCIÓN DE BACHILLERATOS ESTATALES Y PREPARATORIA ABIERTA

DEPARTAMENTO DE PREPARATORIA ABIERTA

MATEMÁTICAS V

GUIA DE ESTUDIO

Compilado por: Mtra. Herlinda Bravo Moreno

MAYO 2010, PUEBLA

MATEMÁTICAS V

CONTENIDO TEMATICO		
UNIDAD	**MODULO**	**TEMA**
Unidad XVII LA LINEA RECTA	Módulo 1	Inclinación y pendiente de la recta
	Módulo 2	Valores de las funciones circulares
	Módulo 3	Gráfica de las funciones seno y coseno
	Módulo 4	Identidades Fundamentales
Unidad XIV FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES	Módulo 5	Coseno de la diferencia de dos números
	Módulo 6	Funciones circulares de la suma de números reales
	Módulo 7	Funciones circulares del doble y la mitad de un número
	Módulo 8	Transformación de productos a sumas
Unidad XV FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA	Módulo 9	Funciones exponenciales y logarítmicas
	Módulo 10	Función Logarítmica
	Módulo 11	Logaritmos comunes y de las funciones trigonométricas
	Módulo 12	Aplicaciones de la función exponencial
Unidad XVI RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS	Módulo 13	Valores y aplicaciones de las funciones circulares
	Módulo 14	Interpretación geométrica de las funciones circulares
	Módulo 15	Aplicación de las funciones circulares a la resolución de triángulos
	Módulo 16	Teorema de los cosenos

MATEMATICAS V

UNIDAD XVII
LA LINEA RECTA

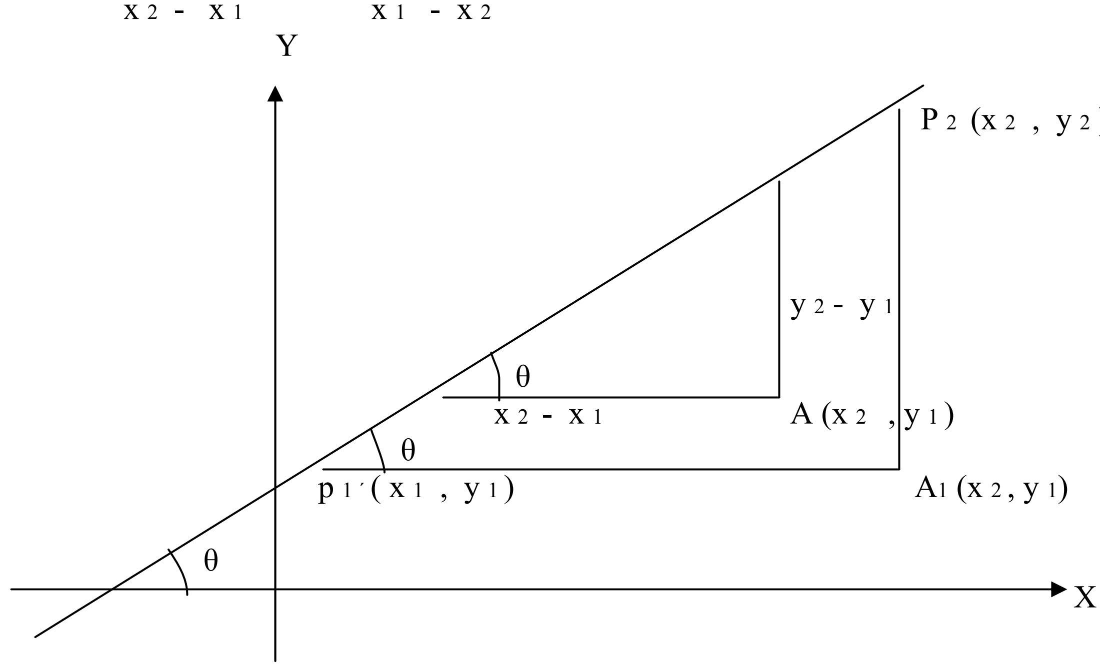
Modulo 1
Inclinación y pendiente de la recta

OBJETIVO
Determinar el ángulo de inclinación de una recta y encontrar las pendientes de los lados de una figura geométrica.

1.1 INCLINACIÒN Y PENDIENTE DE UNA RECTA
Es el ángulo que forma una recta dirigida medida desde el eje X en sentido contrario a como giran las manecillas de un reloj , se representa con la letra griega **θ** (teta) y su medida esta comprendida entre **$0° \leq \theta \leq 180°$. (** Figura 1)

Fórmula para calcular la pendiente de una recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



La pendiente de una recta es igual a la tangente trigonometriíta de su inclinación.

$$\mathbf{m = \tan\ \theta \text{para } 0° \leq \theta \leq 180°}, \qquad \mathbf{tng\ \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}\quad \mathbf{, m = \tan\ \theta}$$

Se dan dos casos particulares de la pendiente:

Si una recta es paralela al eje X , su inclinación es 0°, m = 0.

Si una recta es perpendicular al eje X , su inclinación es igual a 90° , m = 90° no está definida.

Ejemplo:
Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos P_1 (4 , 6) y P_2 (8 , 11).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 6}{8 - 4} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo:
Encontrar la inclinación θ de la recta que pasa por P_1 (- 4, - 5) y P_2 (- 16 . 7).

$$\tan\ \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 \_ x_1} = \frac{7 - (-5)}{-16 - (-4)} - = \frac{7 + 5}{-16 + 4} = \frac{12}{12} = .\ 1$$

tan 135° = - 1 , la inclinación de la recta es de 135°, no fue necesario usar tablas trigonometriítas

Ejemplo:
Encontrar la inclinación θ de la recta que pasa por P_1 (4 , 4) y P_2 (6 , 7).

Solución:

$$\text{Tan } \theta = \frac{5 - 4}{8 - 4} = \frac{1}{4} = .2500$$

En la tabla de funciones trigonometriítas se busca la columna de las tangentes y el valor aproximado es . 2493 ; el ángulo es de 14°.

Ejemplo

.Encontrar la pendiente e inclinación de la recta que pasa por $P_1(3, 1)$ y $P_2(-1, 4)$

$$m = \frac{4 - 1}{-1 - 3} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

, al ser negativa la pendiente la inclinación de la recta es mayor de 90°.

$$\tan \theta = -\frac{3}{4} \rightarrow \theta = \arctan(-3/4)$$

$$\theta = 180° - \arctan \frac{3}{4}$$

$$\theta = 180° - 36° \; 52'$$

$$\theta = 143° \; 8'$$

REACTIVOS DE EVALUACION

Encontrar el valor de la pendiente (m) y la inclinación (θ) de la recta que pasa por los pares de puntos que se dan:

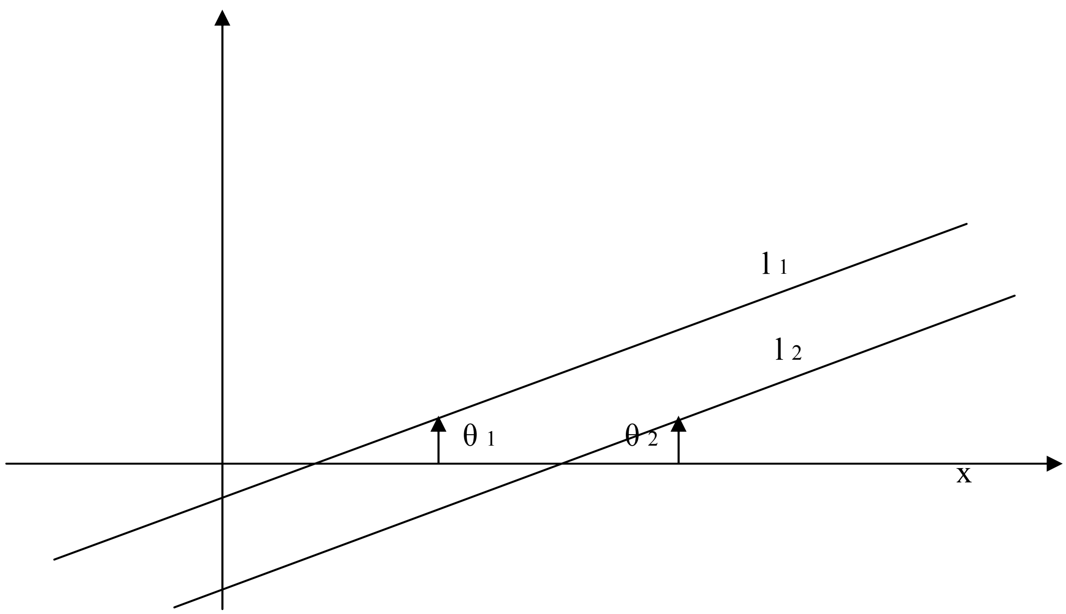
1.- (3,2) , (5,8)
2.- (- 4, 1) , (- 5, 1)
3.- (- 6, 8) , (0 , 7)
4.- (2,5) , (2, -5)

UNIDAD XVII
LA LINEA RECTA

Modulo 2
Rectas paralelas y perpendiculares

OBJETIVO
Demostrar el paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas por medio de pendientes en figuras geométricas planas.

2.1 RECTAS PARALELAS.



Demostrar

Si $m_1 = m_2 \rightarrow l_1 \parallel l_2$

$m_1 = m_2$ Hipótesis
$m_1 = \tan\theta_1$ Definición de pendiente
$m_2 = \tan\theta_2$ Definición de pendiente
$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ Sustitución
$\theta_1 = \theta_2$ Los ángulos son iguales si sus tangentes son iguales , cuando $0° \leq 180°$
$l_1 = l_2$ Las rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales .

Ejemplo:
Demostrar que la recta l_1, que `pasa por el punto $P_1(-4, -5)$ y es paralela a la recta l_2, que pasa por los puntos $P_3(0, -10)$ y $P_4(7, 3)$.

Solución:
La pendiente de la recta l_1 es:

$$m_1 = \frac{8 - (-5)}{3 - (-4)} = \frac{8 + 5}{3 + 4} = 13/7$$

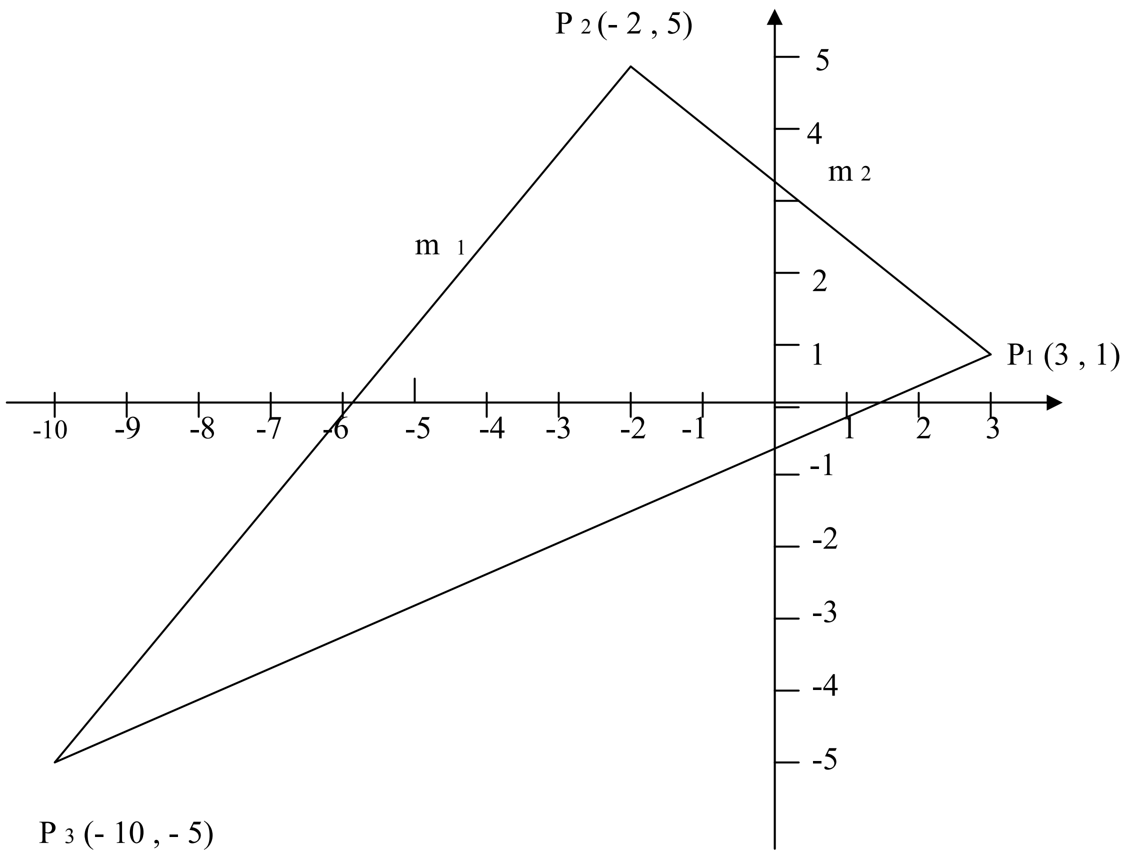
$$m_2 = \frac{3 - (-10)}{7 - 0} = \frac{3 + 10}{7} = 13/7$$

Como $m_1 = m_2 \rightarrow l_1 \parallel l_2$

2.2 RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares sì y sòlo sì, sus pendientes son reciprocas y de signo contrario.

Ejemplo:
Demostrar que los puntos $P_1(3,1)$, $P_2(-2,5)$ y $P_3(-10.-5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.



$$m_1 = \frac{5 - (-5)}{-2 - (-10)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\ , \quad m_2 = \frac{5 - 1}{-2 - 3} = -\frac{4}{5}$$

Como **m_2** es reciproca y de signo contrario de **m_1**, el lado **$P_2 P_3$** $\perp$ al lado $P_1 P_2$, por tanto , el triángulo es rectángulo.

REACTIVOS DE EVALUACIÓN

1.-Demostrar por medio de pendientes que los puntos P_1 (3,5), P_2 (1,- 1) y P_3 (- 4, - 16)) quedan en línea recta.
2.-Demostrar por medio de las pendientes que los puntos A(– 6,0), B (0,- 6), C (8,6) y D (2, 12) son los vértices de un paralelogramo.
3.- Demostrar por medio de pendientes que los puntos P_1 (4,3) , P_2 (6, - 2) y P_3 (- 11, -3), son los vértices de un rectángulo.
4.- Usar la fórmula de distancia entre dos puntos , demostrar que los puntos que se dan en el problema 6 son los vértices de un triángulo rectángulo.

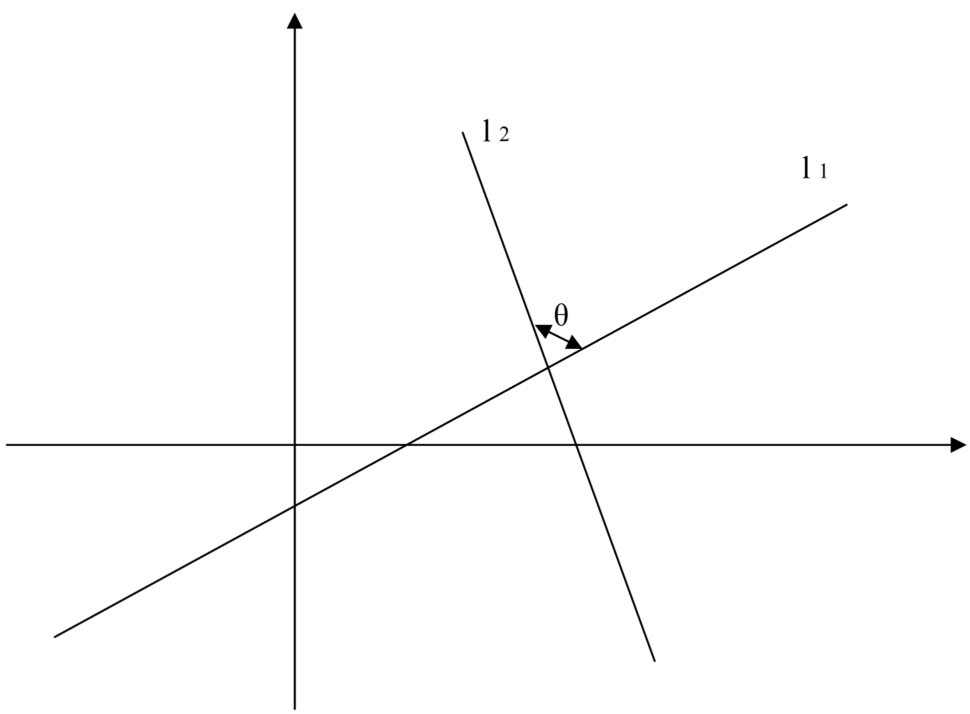
UNIDAD XVII
LA LINEA RECTA

Modulo 3
Angulo entre dos rectas

OBJETIVO
Calcular la pendiente de una recta que se interseca con otra recta, los ángulos internos y la división de un segmento en figuras geométricas.

3.1 ANGULO ENTRE DOS RECTAS.

Dos rectas no paralelas que se intersecan en un punto en donde se encuentra la tangente del ángulo formado. Sea l_1 una de las rectas y su inclinación θ_1 y l_2 la otra recta con inclinación θ_2



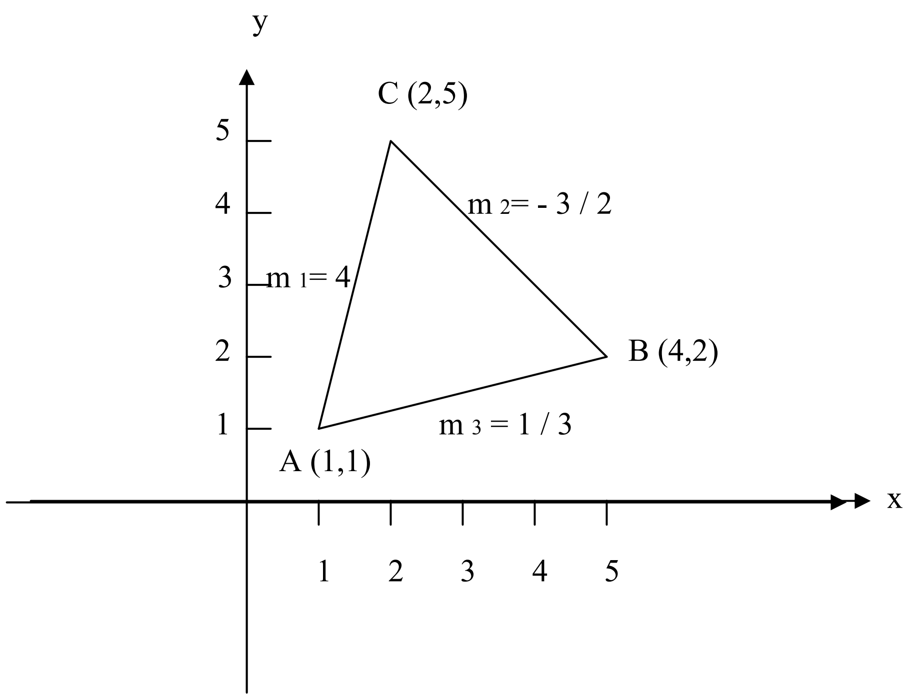
Fórmula de la tangente del ángulo comprendido entre dos rectas que se intersecan en función de sus pendientes.

$$\tan \theta = \frac{M2 - m1}{1 + m_1 m_2}$$

Si se conoce el valor de la tangente, θ la fórmula es:

$$\boxed{\Theta = \arctan \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$$

Ejemplo:
Encontrar los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son A (1,1), B (4,2) y C (2,5)



De la figura se tiene que las pendientes de los tres lados son:

$$m_1 = \frac{5 - 1}{2 - 1} = 4/1 \ , \ m_2 = \frac{2 - 1}{4 - 1} = 1/3 \ , \ m3 = \frac{5 - 2}{2 - 4} = -3/2$$

Se usa la fórmula para encontrar cada uno de los tres ángulos.

$$\tan A = \frac{4 - 1/3}{1 + 4 \;\; 1/3} = \frac{11/3}{16/3} = .6875 = \tan \; 34° \; 30'$$

$$\tan B = \frac{1/3 - (-3/2)}{1 + 1/3 - 3/2} = \frac{1/3 + 3/2}{1 - 3/6} = \frac{11/6}{3/6} = 11/3 = 3.666$$

$$= \text{arc tan } 3.666 = 74° \;\; 45'$$

La suma de los ángulos interiores de un triangulo suman 180°, el ángulo C se obtiene por diferencia.

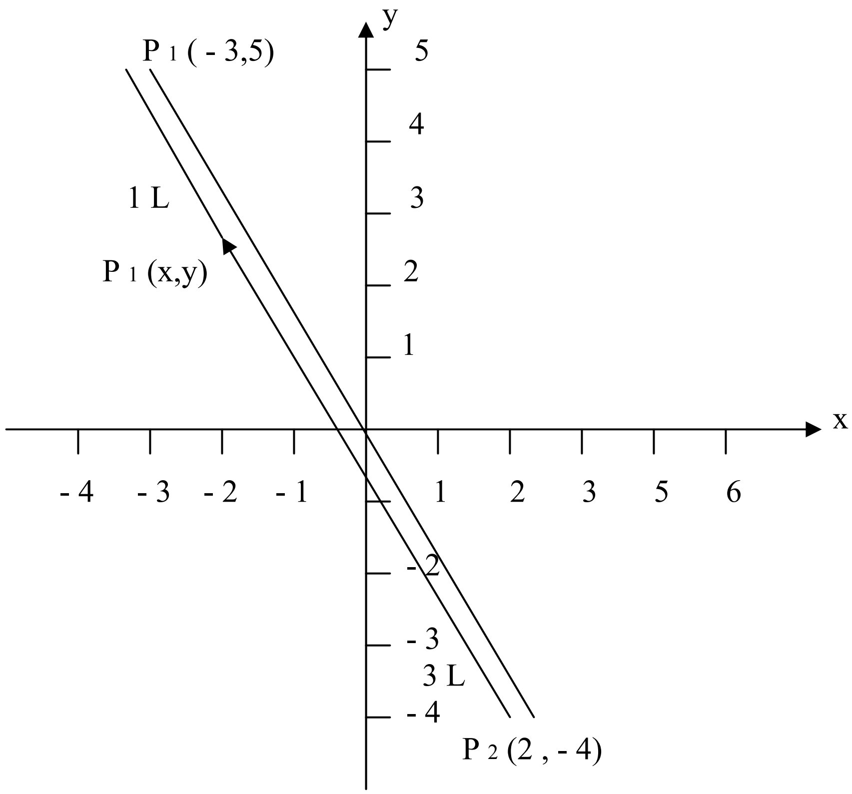
$$\begin{aligned} A + B + C &= 180° \\ C &= 180° - (A + B) \\ &= 180° - (34° 30' + 74° \; 45') \\ &= 180° - 109° \;\; 15' \\ &= 70° \;\; 45' \end{aligned}$$

3.2 DIVISION DE UN SEGMENTO DE RECTA EN UNA RAZON DADA.

Si el punto P queda dentro del segmento dentro del segmento $P_1 P_2$, la razón γ será positiva, y si el punto P queda fuera del segmento $P_1 P_2$ la razón γ será negativa.
Fórmulas que se utilizan para calcular los valores.

$$\gamma = \frac{P_1 P}{P \; P_2} \quad , \quad x = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma}$$

Ejemplo:
Encontrar las coordenadas del punto P (x,y) que esta colocado a a una distancia que es el triple a P_2 que a P_1, con los puntos P 1 (- 3,5) y P 2 (2 ,- 4).



Solución:

$$\gamma = \frac{P_1 P}{P P_2} = 1L / 3L = 1 / 3$$

$$x = \frac{-3 + 1/3\,(2)}{1 + 2/3} = \frac{-3 + 2/3}{4/3} = \frac{-7/3}{4/3} = \frac{21}{12} = -\,7/4$$

$$y = \frac{5 + 1/3\,(-4)}{1 + 1/3} = \frac{5 - 4/3}{4/3} = \frac{11/3}{4/3} = \frac{33}{12} = 11/4$$

Fórmulas para calcular el punto medio de un segmento:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo:

Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $P_1(-3, 5)$ y $P_2(5, -4)$.

Solución:

$$x = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad , \quad y = \frac{5 + (-4)}{2} = \frac{5 - 4}{2} = 1/2$$

Ejemplo:
Uno de los extremos de un segmento es $P\,1\,(-3, -4)$ y su punto medio es $P\,(2,3)$.
Encontrar las coordenadas del otro extremo.

Solución.

$$2 = \frac{-3 + x_2}{2} \quad , \quad 3 = \frac{-4 + y_2}{2}$$

$4 = -3 + x_2$ (Se multiplica por dos ambos miembros) $6 = -4 + y_2$

$4 + 3 = -3 + 3 + x_2$ (Se suma 3 a ambos lados) $6 + 4 = -4 + 4 + y_2$

$$\boxed{7 = x_2} \qquad \boxed{10 = y_2}$$

El otro extremo del segmento es $P_2\,(7,10)$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Encontrar los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son A (3, 1) , B (- 4, - 6) y C (- 4. 4).

2.- Los vértices de un paralelogramo son A (0,0), B (5,2), C 6,5) y D (1,3). Encontrar los ángulos internos.

3.- Los extremos de un segmento son P_1 (- 2, 3) y P_2 (5 , - 2). Encontrar las coordenadas del punto medio.

4.-Si el pinto medio de un segmento es P (6,3) y un extremo del segmento es P_1 (- 4, - 7). ¿ Cuales son las coordenadas del otro extremo?

5.- Un punto P (7, 2) esta entre P_1 (3, - 2) y P_2 (9,4). ¿ En què proporción (γ) divide al segmento $P_1 P_2$ ¿

UNIDAD XVII
LA LINEA RECTA

Modulo 4
Ecuación de la recta

OBJETIVO
Encontrar y determinar la ecuación de una recta , conocidos los puntos de intersección con los ejes coordenados.

4. 1. LINEA RECTA.
Lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente **m** resulta siempre constante.

4. 2- ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE.

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (5,2) con pendiente igual a 3.

Solución:

$$y - 2 = 3\,(x - 5)$$

$$y - 2 = 3x - 15$$

$- 3x + y + 13 = 0$ Es la ecuación de la recta.

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por P_1 (2,4) y P_2 (-3 , - 6).
Se encuentra la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 4}{-3 - 2} = -10 / -5 = 2$$

$$y - 4 = 2\,(x - 2)$$
$$y - 4 = 2x - 4$$
$$-2x + y = 0$$

4 . 3 ECUACION DOS PUNTOS

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{ò} \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(-4, 7)$ y $P_2(3, -8)$.

Solución:

$$\frac{y - 7}{x - (-4)} = \frac{-8 - 7}{3 - (-4)}$$

$$\frac{y - 7}{x + 4} = \frac{-15}{3 + 4}$$

$$\frac{y - 7}{x + 4} = \frac{-15}{7}$$

$7(y - 7) = -15(x + 4)$ (Factores cruzados)

$7y - 49 = -15x - 60$

$15x + 7y + 11 = 0$

4. 4 ECUACION SIMETRICA

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la recta que intercepta al eje X en (5,0) y (0, - 6).
Se tiene $a = 5$ y $b = -6$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-6} = 1$$

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$$

$$6x - 5y = 30$$

$$6x - 5y - 30 = 0$$

4 . 5 ECUACION PENDIENTE -- ORDENADA AL ORIGEN

$$y = mx + b$$

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la recta que interseca al eje Y en (0,4) con pendiente -- 3.

$$y = -3x + 4$$

$$3x + y - 4 = 0$$

4. 6 ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

$$Ax + By + C = 0$$

Ejemplo:
Una recta pasa por $P_1 (1,3)$ y $P_2 (-2, -5)$. Encontrar la ecuación de la recta y escribir las formas de cada ecuación.

$$\frac{x - 3}{x - 1} = \frac{-5 - 3}{-2 - 1}$$

$$\frac{x - 3}{x - 1} = \frac{8}{3}$$ (Ecuación dos puntos)

$$y - 3 = \frac{8}{3}(x - 1)$$ (Ecuación punto pendiente)

$$3(y - 3) = 8(x - 1)$$

$$3y - 9 = 8x - 8$$

$$-8x + 3y - 1 = 0$$ (Ecuación forma general)

$$-8x + 3y = 1$$

$$\frac{-x}{3} + \frac{y}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{x/3}{24} + \frac{y/8}{24} = 1$$ (Ecuación forma simètrica)

$$y = 8/3\,x + 1/3$$ (Ecuación pendiente ordenada al origen)

Ejemplo:
Encontrar la pendiente y las intersecciones con los ejes de la recta cuya ecuación es $4x - 3y = 24$.

Solución:

$y = 4/3\,x - 24/3$, $m = 4/3$

Se divide entre 24 para obtener la forma simétrica de la ecuación.

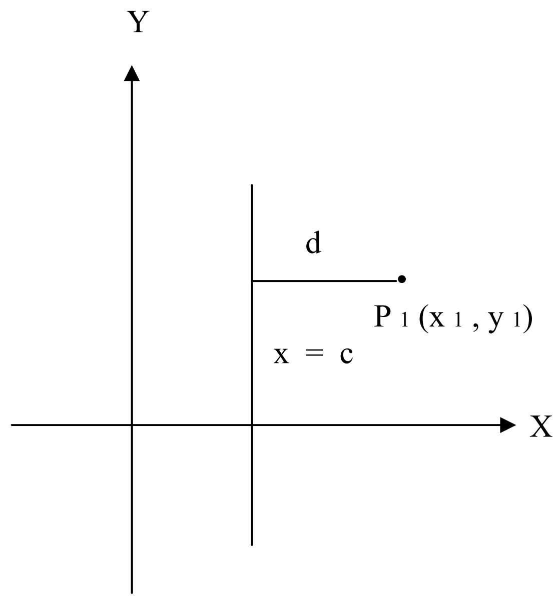
$$\frac{4x}{24} = \frac{3y}{24} = \frac{24}{24}$$

$x/6 + 4/-8 = 1$, $a = 6$, $b = -8$

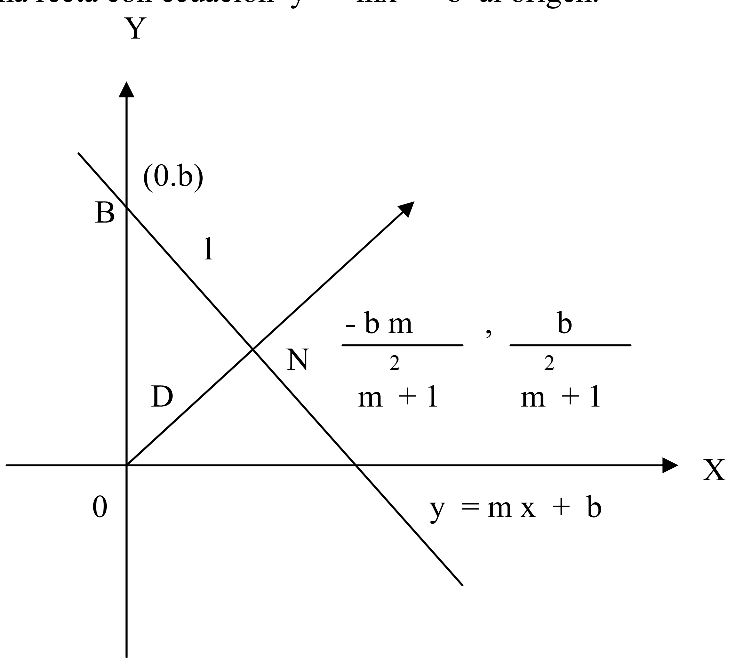
4.7 DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PUNTO.

Distancia medida sobre la perpendicular a la recta dada y que pase por el punto dado.

Primer caso:
Distancia de una recta paralela al eje Y al punto $P_1(x_1, x_1)$; si la ecuación de la recta es $x \equiv c$ y las coordenadas del punto son (x_1, y_1) la distancia de la recta es $|x_1 -- c|$



Segundo caso:
Distancia de una recta con ecuación $y = mx + b$ al origen.



N es el punto de intersección. ON es perpendicular a la recta l y pasa por el punto (0,0), su ecuación es:

$$y = -\frac{1}{m}x$$

Para encontrar la distancia entre N y O se usa la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$NO = \sqrt{\left(\frac{-bm}{m^2+1} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{m^2+1} - 0\right)^2}$$

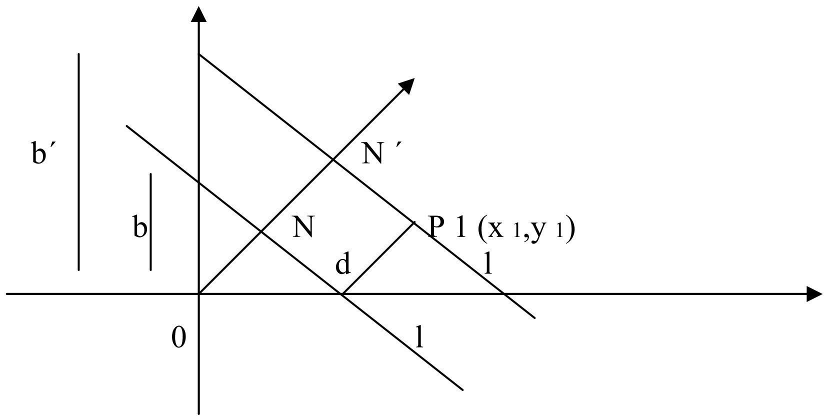
$$= \sqrt{\frac{b^2 m^2}{(m^2+1)^2} + \frac{b^2}{(m^2+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 m^2 + b^2}{(m^2+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}}$$

$$= \frac{\pm b}{\sqrt{m^2+1}}$$

Tercer caso:
Distancia de una recta cuya ecuación es $y = mx + b$ a un punto $P_1(x_1, y_1)$.



La distancia **d** , desde **l** hasta $\mathbf{P_1}$ es igual a N N´ y esta distancia es positiva si P 1 queda arriba de l, y negativa si P 1 queda abajo de l . Como 0, N y N´ son puntos sobre una recta dirigida, en todos los casos se tiene:

$$d = NN' \equiv \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Fórmula de la distancia de una recta a un punto.

Ejemplo:
Encontrar la distancia de la recta $y = -4x - 27$ al punto $P_1(-6, 3)$.
De los datos se tiene : $x_1 = -6$, $y_1 = 3$, $m = -4$ y $b = -27$.
S e sustituyen los valores en la fórmula.

$$d = \frac{3 - (-4)(-6) - (-27)}{\sqrt{(-4)^2 + 1}} = \frac{3 - 24 + 27}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{17}}$$

El punto queda arriba de la recta por ser **d** positiva.

Cuando la ecuación de la recta es de la forma $Ax + By + C = 0$, la distancia de la recta al punto $P_1(x_1, y_1)$ está dada por:

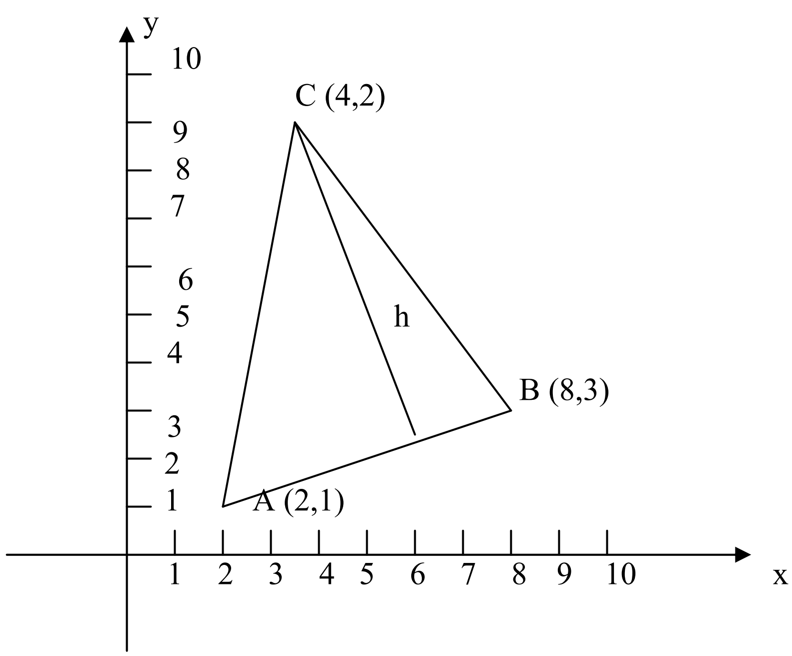
$$d \equiv \frac{\left| Ax_1 + By_1 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El numerador es un valor absoluto, la distancia es positiva.

Ejemplo:
Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son A (2,1), B (8, 3) y (4, 9).
y

Área ≡ 1 / 2 $(\overline{AB})$ h

Se puede tomar cualquier lado como base y se traza una recta perpendicular desde ese lado, al vértice opuesto que representa la altura (h), en este caso se toma como base **AB**



La altura se calcula con la ecuación del lado AB.

$$\frac{y - 1}{x - 2} = \frac{3 - 1}{8 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$3y - 3 = x - 2$$

$$-x + 3y - 1 = 0$$

Distancia de una recta a un punto

$$h = \frac{\left| -4 + 3(9) - 1 \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{1 - 4 + 27 - 1}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{\left| 22 \right|}{\sqrt{10}}$$

Distancia entre dos puntos para encontrar AB

$$\overline{AB} = \sqrt{(8 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Area} = 1/2\ (2\sqrt{10})\left(\frac{22}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= 22$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACIÒN.

1.- Encontrar las ecuaciones de las rectas determinadas de acuerdo a sus condiciones.
a) Pasa por (3,0) y (6, -- 4)
b) Pasa por (1,3) y tiene pendiente 1 / 2
c) Pasa por (0,0) y tiene pendiente 1 / 3
d) Pasa por (0,5) y tiene inclinación de 45° e)
e) Su intersección con el eje X es 6 y su inclinación es de 60°
f) Pasa por (3, 7) y es paralela a la recta con ecuación 2x -- 3y + 4 = 0.
g) Encontrar las ecuaciones de los lados del triángulo cuyos vértices son A(- 3,2), (5,6) y C (1, - 4)

2.-Encontrar la distancia de la recta indicada y especificar si el punto esta arriba o debajo de la recta.
a) P (2,- 4) ; 2x + 3y -- 6 = 0
b) P (0,0); 3x + 2y -- 12 = 0
c) Determinar el área del triangulo cuyos vértices son A (- 4, - 4), (6 , - 6), C (0,3)

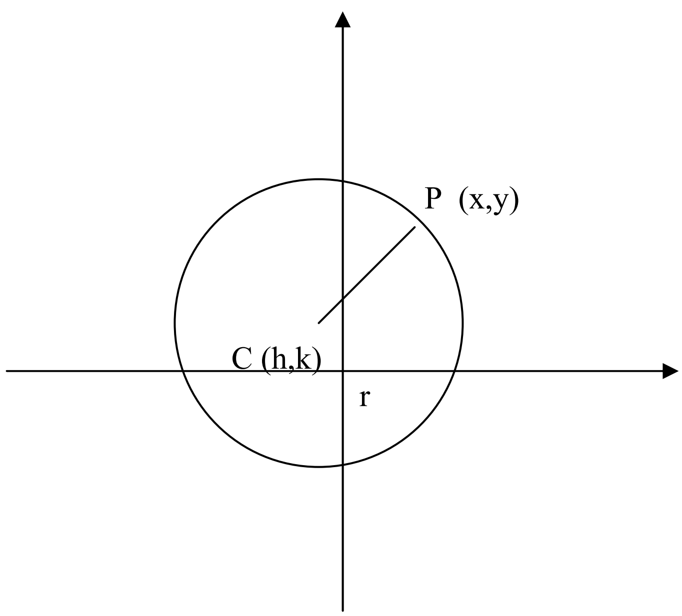
UNIDAD XVIII
SECCIONES CONICAS, CIRCUNFERENCIA,
PARABOLA, TRASLACION DE EJES

Modulo 5
Ecuación de la circunferencia

OBJETIVO
Encontrar las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia dada su ecuación

5.1 DEFINICION DE CIRCUNFERENCA
Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que equidistan en un punto fijo llamado centro.

5.2 ECUACIÒN CARTESIANA DE LA CIRCUNFERENCIA.



$$(x - h)^2 + (x - h)^2 = r^2$$

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en (- 3,4) y radio igual a 5.

Solución:
$h = -3,\ k = 4$ y $r = 5$

$$[\,x - (-3)\,]^2 + [\,y - 4\,]^2 = 5^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Si el centro esta en el origen $h = 0$ y $k = 0$ la ecuación se reduce a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

5.3 ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Ejemplo:
Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$3x^2 + 3y + 10x^2 - 12y + 5 = 0$$

Solución:
Se divide la ecuación entre 3.

$$x + y + 10/3\,x - 4y + 5/3 = 0$$

Se suma en ambos miembros de la ecuación $-5/3$ y se completan cuadrados

$$x + 10/3\,x + 25/9 + y - 4y + 4 = -5/3 + 25/9 + 4$$

$$(x + 5/3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{-15 + 25 + 36}{9}$$

$$(x + 5/3)^2 + (y - 2)^2 = 46/9$$

$$h = -5/3,\ k = 2 \ \text{y} \ r = 46/9 = 1/3\sqrt{46}$$

El centro es $(-5/3,\ 2)$ y el radio $= 1/3\sqrt{46}$

5.4 CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES CONDICIONES

		Constantes independientes
(1)	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	**h , k** y **r**
(2)	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	**D , E** y **F**

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5,1) , (4,6) y (2,- 2). Encontrar su centro y su radio. Se usa la fórmula (2). Para (5,1)

$$5^2 + 1^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$5D + E + F = -26$$

Para (5,1)

$$4^2 + 6^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$

$$4D + 6E + F = -52$$

Para (2, -- 2)

$$2^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$

$$2D - 2E + F = -8$$

Se obtiene el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de los resultados de cada ecuación.

$$5D + E + F = -26$$
$$4D + E + F = -52$$
$$2D + E + F = -8$$

Al resolver el sistema por el método que se dio en el modulo 4 de la Unidad LX, se tienen los siguientes resultados:

$$D = -2/3 , \quad E = -16/3 \quad y \quad F = -52/3$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación (2)

$$x^2 + y^2 + (-2/3)x + (-16/3)y + (-52/3) = 0$$

Se multiplica por tres ambos miembros de la ecuación para obtener la ecuación que pasa por 3 puntos se tiene:

$3x^2 + 3y^2 - 2x - 16y - 52 = 0$

Para encontrar el centro y el radio se divide la ecuación entre 3.

$x^2 + y^2 - 2/3\,x - 16/3\,y - 52/3 = 0$ Se completan cuadrados.

$x^2 - 2/3x + 1/9 + y^2 - 16/3y + 64/9 = 52/3 + 1/9 + 64/9$

$\left(x - 1/3\right)^2 + \left(y - 8/3\right)^2 = 156 + 1 + 64/9 = 221/9$

$h = 1/3$, $k = 8/3$ y $r = \sqrt{221}/3$,

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Encontrar la ecuación de la circunferencia en la forma cartesiana y reducirla a la forma general.
a) Centro en $(0, -5)$, radio 8

2.- Encontrar el centro y el radio de las siguientes circunferencias.
a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 64$
b) $x^2 + y^2 - 20x + 40y + 379 = 0$

3..- Encontrar las ecuaciones de las circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:
a) Tiene si centro en $(-4, -2)$ y pasa por $(1,3)$.
b) Tiene su centro en $(3,4)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $4x - 2y + 10 = 0$.

4.- Describir el lugar geométrico que representa cada una de las ecuaciones .
a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 90 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 30 = 0$

5.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por A $(2,3)$ y B $(-1, 6)$ y su centre está sobre la recta $6x + 15y + 3 = 0$.

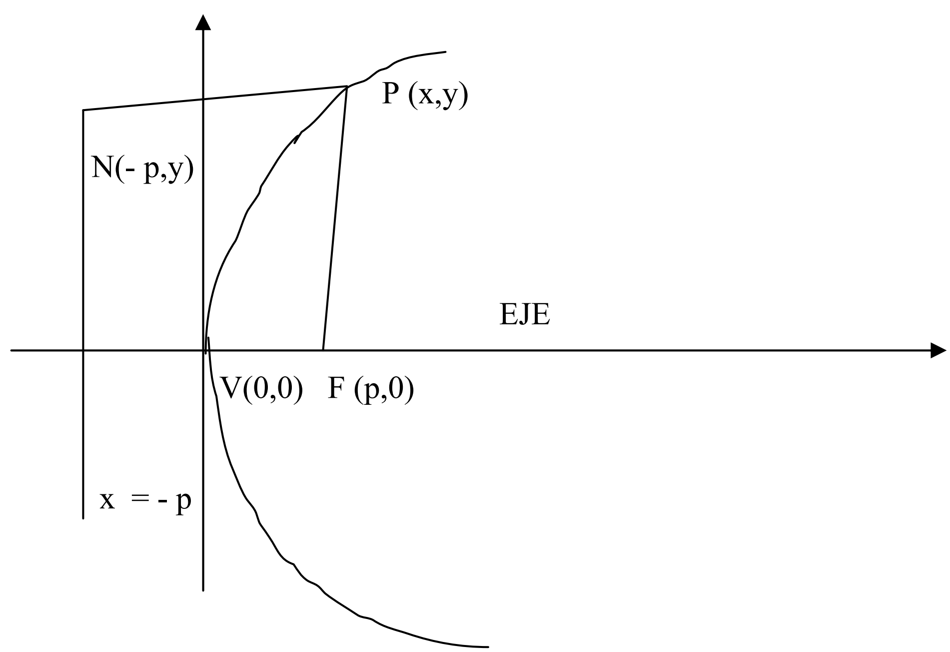
UNIDAD XVIII
SECCIONES CONICAS, CIRCUNFERENCIA, PARABOLA, TRASLACION DE EJES

Modulo 6
Parábola

OBJETIVO
Obtener las coordenadas del foco, ecuación cartesiana y las características de la parábola.

6.1 DEFINICION DE LA PARÁBOLA.
Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta, que no pase por el punto.

6.2 ECUACION CARTESIANA DE LA PARÁBOLA, DIRECTRIZ, LADO RECTO.
Parábola en la que sus ramas se extienden hacia la derecha , con vértice en el origen y su eje en el eje X.



La distancia de la directriz al foco es **2p,** las coordenadas del foco son **(p.0)** y la ecuación de la directriz es **x = -- p** . Se toma un punto cualquiera P (x,y) del ligar geométrico, se traza una recta PN perpendicular a la directriz y siendo perpendicular a la directriz , es paralela al eje X por lo que las coordenadas de N son (-- p,y).

Definición de la parábola.

$PN = PF$

Se usa la fórmula de distancia entre dos puntos para encontrar PN y PF .

$$PN = \sqrt{[x - (-p)]^2 + [y - y]^2} = \sqrt{(x + p)^2}$$

$$PF = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Se representan los resultados de cada segmento.

$$\sqrt{(x + p)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2$ Al elevar al cuadrado se elimina la raíz.

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

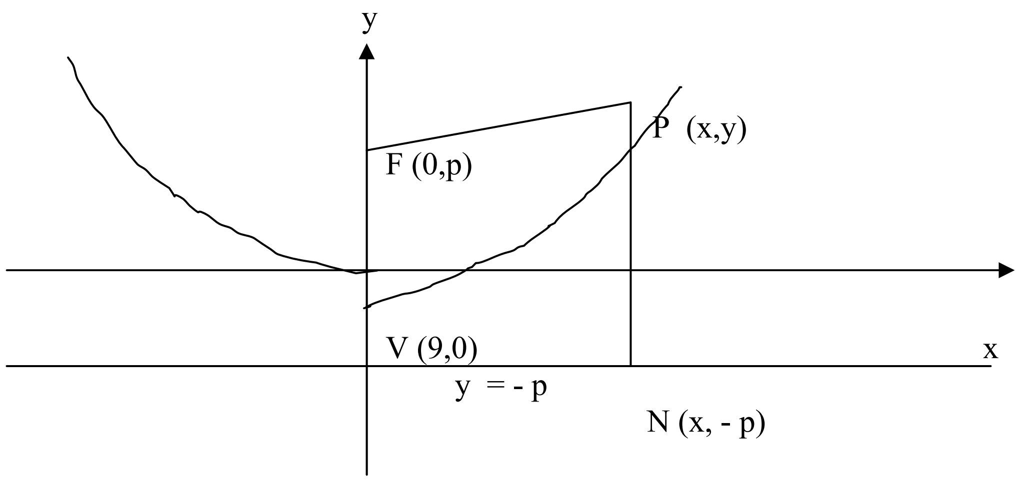
$$x^2 - x^2 + 2px + 2px + p^2 - p^2 = y^2$$

$$\boxed{4px = y^2}$$

Si las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda la ecuación es:

$$\boxed{-4px = y^2}$$

La ecuación de una parábola con las ramas hacia arriba.



P N = P F

$$\sqrt{(x - x)^2 + [\,y - (-p)]^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2}$$

$$\sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + (y - p)^2$$

$$y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Si las ramas de la parábola se extienden hacia abajo, la ecuación es:

$$\boxed{x^2 = -4py}$$

La cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola, se le llama **lado recto.**

A la distancia que hay entre el foco de una parábola y cualquier punto de la misma, se le llama **radio focal**.

Ejemplo:
Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para la parábola.

$y^2 = -- 16x$

Al comparar la ecuación con $y^2 = -- 4px$
$4p = 16 \rightarrow p = 4$

Al ser negativo el signo , las ramas de la parábola uua hacia la izquierda, las coordenadas del foco son (-- 4,0) y la ecuación de la directriz es $x = 4$.

Ejemplo:
Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para la parábola $x^2 = 6y$

Al comparar la ecuación con $x^2 = 4py$
$4p = 6 \rightarrow p = 6/4 = 3/2$

Las coordenadas del foco son (0, 3 / 2) y la ecuación de la directriz es $y = -- 3/2$.

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) : foco en el eje X y pasa por el punto (3,2) . Encontrar el foco y la ecuación de la directriz

Solución:
La ecuación es de la forma $y = 4px$, $x = 3$ y $y = 2$

$2 = 4p(3)$
$4 = 12p$
$4/12 = p \rightarrow p = 1/3$
Si $p = 1/3 \rightarrow 4p = 4/3$, la ecuación es $y^2 = 4/3x$, el foco está en (1 / 3,0)y la ecuación de la directriz es $x = -- 1/3$.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.-Deducir la ecuación de una parábola con vértice en el origen, eje en el eje Y y ramas hacia abajo.

2.- Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para cada una de las parábolas.

$x^2 + 12y = 0$

$4y = 24x^2$

$y^2 = -16x$

3.- Escribir la ecuación d la parábola que satisface las condiciones.

Vértice en (0,0), pasa por (-- 4 , -- 3). Eje vertical.

Vértice en (0,0), foco en el eje X y pasa por (4,6).

Vértice en (0,0) y pasa por (5,2)..

4.- Uno de los extremos de una cuerda que pasa por el foco de una parábola es el punto (4 , --4). La parábola tiene como eje el eje X y el vértice en el origen . Encontrar las coordenadas del otro extremo de la cuerda.

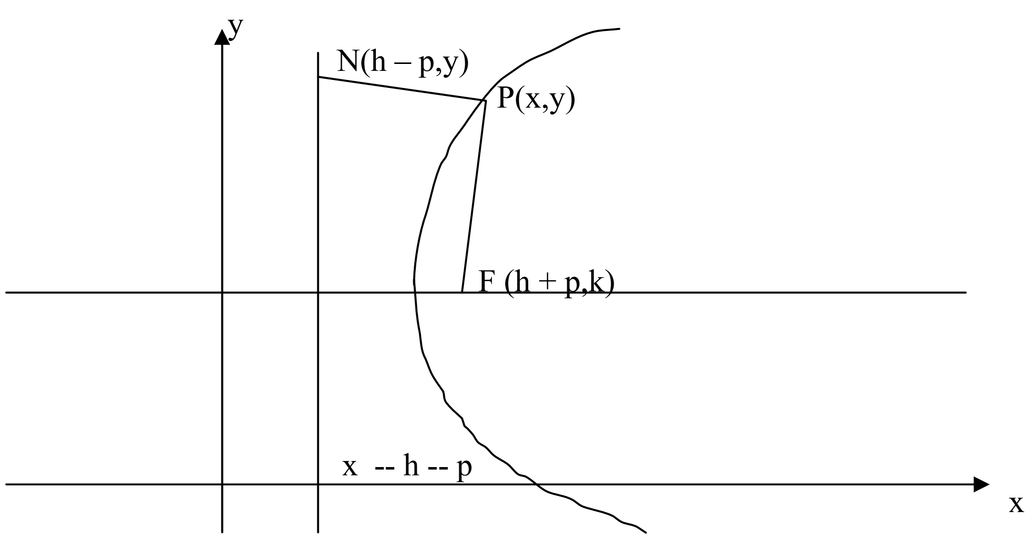
5.- Demostrar que la circunferencia cuyo diámetro es el radio focal de la parábola $y = 4px$, es tangente al eje Y.

UNIDAD XVIII
SECCIONES CONICAS, CIRCUNFERENCIA, PARABOLA, TRASLACION DE EJES

Modulo 7
Ecuación de la parábola

OBJETIVO
Obtener el vértice, lado recto, foco y la ecuación de una parábola y resolver problemas de aplicación.

7.1 OTRAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA.
El vértice esta es un punto cualquiera (h,k) que no es el origen y el eje de la parábola es paralelo al eje X ò al eje Y.. La distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz sigue siendo **p**.



N P = P F

$= \sqrt{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2}$

$= [x - (x + p)]^2 + (y - k)^2$ Elevados al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

$(x - h + p)^2 = (x - h - p)^2 + (y - k)^2$ Se eliminan paréntesis

$x^2 + h^2 + p^2 - 2hx + 2px - 2hp = x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2hp + y^2 - 2ky + k^2$ Producto de los cuadrados.

$4px - 4hp = y^2 - 2ky + k^2$ Simplificado

$\boxed{4p(x - h) = (y - k)^2}$ Propiedad distributiva por la izquierda.

La ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es la ecuación de una parábola horizontal con vértice en (h,k), foco en $(h + p, k)$ y directriz $x = h - p$.

Si las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda su ecuación es :
$(y - k)^2 = - 4p(x - h)$

Ecuación de una parábola con vértice en (h,k) y ramas hacia arriba.

$\boxed{(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)}$

La ecuación toma la forma.

$x = ay + by + C$

Si **a** es positiva la parábola se extiende hacia la derecha o hacia arriba y si **a** es negativa, la parábola se extiende hacia la izquierda o hacia abajo.

Ejemplo:
Hallar vértice ,lado recto, foco, ecuación de la directriz y trazar la parábola cuya ecuación es .

$$y^2 + 6y + 8x - 7 = 0$$

$y^2 + 6y = - 8x + 7$ Se completa un cuadrado perfecto del lado izquierdo de la igualdad resulta:

$$y^2 + 6y + 9 = - 8x + 7 + 9$$

$$(y + 3)^2 = - 8x + 16$$

$$(y + 3)^2 = - 8 (x - 2)$$

El coeficiente de **x** es negativo, las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda. Lado recto = 4p = 4 (2) = 8 , vértice está en (2 ,- 3) , foco en (0, - 3) y la ecuación de la directriz es x = 4.

Ejemplo:
Encontrar la ecuación de una parábola horizontal que pasa por (- 2 , 4) ,(- 3, 2) y (2, - 4)
Encontrar el vértice , lado recto, foco, extremos del lado recto y ecuación de la directriz

Solución:
La ecuación de una parábola con eje paralelo al eje X es $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$ ò $x = a(y)^2 + by + c$. Se sustituyen en esta última ecuación las coordenadas de los tres puntos por donde pasa la parábola.

$-2 = a(4)^2 + b(4) + c$ para el punto (- 2 , 4)

$-3 = a(2)^2 + b(2) + c$ para el punto (- 3 , 2)

$2 = a(-4)^2 + b(-4) + c$ para el punto (2 , - 4)

$$16a + 4b + c = -2$$
$$4a + 2b + c = -3$$
$$16a - 4b + c = 2$$

Solución:
Se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de suma y resta.
Se elimina **c** en las ecuaciones (1) y (2) , se multiplica por (-- 1) la ecuación (2) y la suma obtenida es la ecuación (4).

$$
\begin{array}{l}
16\,a + 4\,b + c = -2 \\
-4\,a - 2\,b - c = 3 \\
\hline
12\,a + 2\,b = 1 \qquad (4)
\end{array}
$$

Se elimina **c** en las ecuaciones (2) y (3), se multiplica por (-- 1) la ecuación (2) y la suma obtenida es la ecuación (5).

$$
\begin{array}{l}
-4\,a - 2\,b - c = 3 \\
16\,a - 4\,b + c = 2 \\
\hline
12\,a - 6\,b = 5 \qquad (5)
\end{array}
$$

Se elimina **b** en las ecuaciones (4) y (5), se multiplica por (3) la ecuación (4) y se despeja el valor de **a** .

$$
\begin{array}{l}
36\,a + 6\,b = 3 \\
12\,a - 6\,b = 5 \\
\hline
48\,a = 8 \\
a = 8 / 48 = 1 / 6
\end{array}
$$

En la ecuación (5) se sustituye el valor de **a** y se despeja el valor de **b** .

$$
\begin{array}{l}
12\,a + 2\,b = 1 \\
12\,(1/6) + 2\,b = 1 \\
12/6 + 2\,b = 1 \\
2\,b = 1 - 2 \\
b = -1/2
\end{array}
$$

Se sustituyen los valores de **a** y **b** en cualquiera de las ecuaciones originales, para encontrar el valor de **c** .

$$
\begin{array}{l}
16\,a + 4\,b + c = -2 \\
16\,(1/6) + 4\,(-1/2) + c = -2 \\
16/6 - 4/2 + c = -2 \\
2.66 - 2 + c = -2 \\
c = -2 - .66 = -2.66
\end{array}
$$

La ecuación de la parábola es:

$x = 1/6\, y^2 - - 1/2\, y - - 2.66$

Al trasformar la ecuación a la forma $(y - k)^2 = \pm\ 4\,p\,(x - h)$, resulta:

$$\left(y - - 3/2\right)^2 = 6\left(x + 73/24\right)$$

El vértice està en $\left(73/24, 3/2\right)$, Lado recto = 6, foco en $\left(- - 37/24, 3/2\right)$ y la ecuación de la directriz es $x = - - 109/24$.

$4p = 6$, $2p = 3$, los extremos del lado recto son $\left(- - 73/24, - - 3/2\right)$ y $\left(73/24, 9/2\right)$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Para cada una de las siguientes parábolas , encontrar las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y longitud del lado recto.

a) $y^2 - - 6\,y - - 8\,x + 17 = 0$

b) $4\,x^2 + 4x + 24\,y + 25 = 0$

2.- Encontrar la ecuación de la parábola horizontal que pasa por los puntos :
(- 1,1), (-3,28), (2,3)

3.- Encontrar la ecuación de la parábola que satisface las siguientes condiciones :

a) Directriz $y = 8$, Foco en (3, -2)
b) Directriz $x = 4$, Foco en (8,2)

4.- La trayectoria de un proyectil lanzado por un mortero es la parábola $y = 4\,x - - x^2$;
la unidad es un kilómetro y el punto de lanzamiento es el origen.
a)¿ Cuál es el punto más alto que alcanza el proyectil.?
c) ¿ Cuál es el alcance máximo del proyectil?.

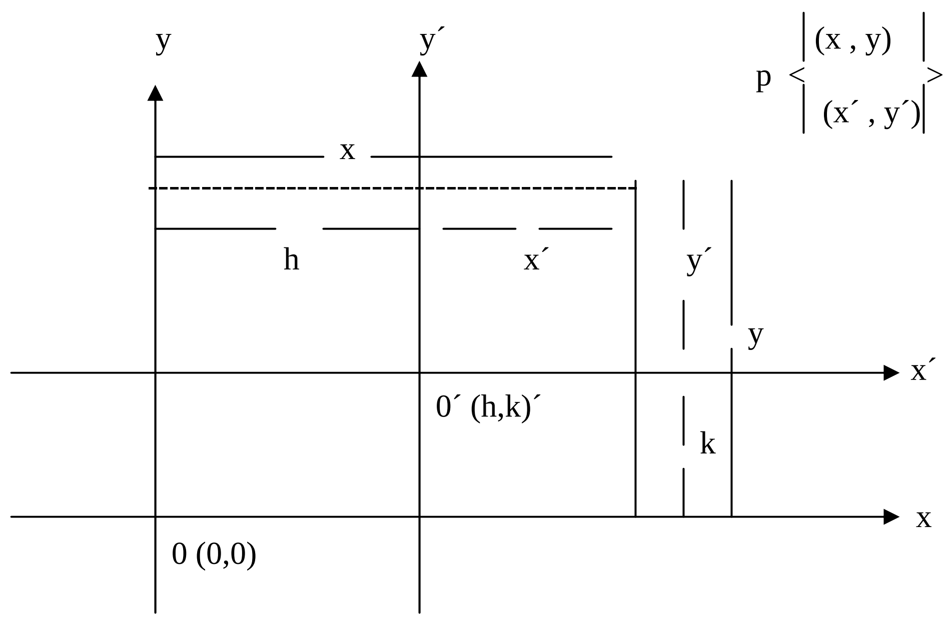
UNIDAD XVIII
SECCIONES CONICAS, CIRCUNFERENCIA,
PARABOLA, TRASLACION DE EJES

Modulo 8
Ecuación de la parábola

OBJETIVO
Eliminar los términos de primer grado, mediante una traslación de ejes.

8.1 TRASLACIÒN DE EJES
Es el desplazamiento de uno o ambos ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, el origen queda en una nueva posición y permanece cada eje paralelo a los ejes originales.

Figura en donde se observa la traslación de ejes.



Se puede observar la relación entre las coordenadas (x,y) y las coordenadas (x´ , y´) . Para la traslación de los ejes a 0´ (h,k) ; esta relación esta dada por:

$\boxed{x' = x - h,\ y' = y - k}$ ò $\boxed{x = x' + h,\ y = y' + k}$

Ejemplo:
L a ecuaciòn de una curva referida a un sistema de coordenadas **xy** es **x^2 -- 10z -- 4y + 9 = 0 ,** encontrar la ecuación de esta misma curva referida a un nuevo sistema de ejes x´ y´ con el origen en (5 , -- 4). Graficar la curva y trazar los ejes X , Y , y X´ , Y´.

Solución:
0´ es (5, -- 4) de donde se obtiene que h = 5 y k = -- 4 , las coordenadas del punto P (x,y) satisfacen la ecuación y sus nuevas coordenadas al usar la ecuación 2.

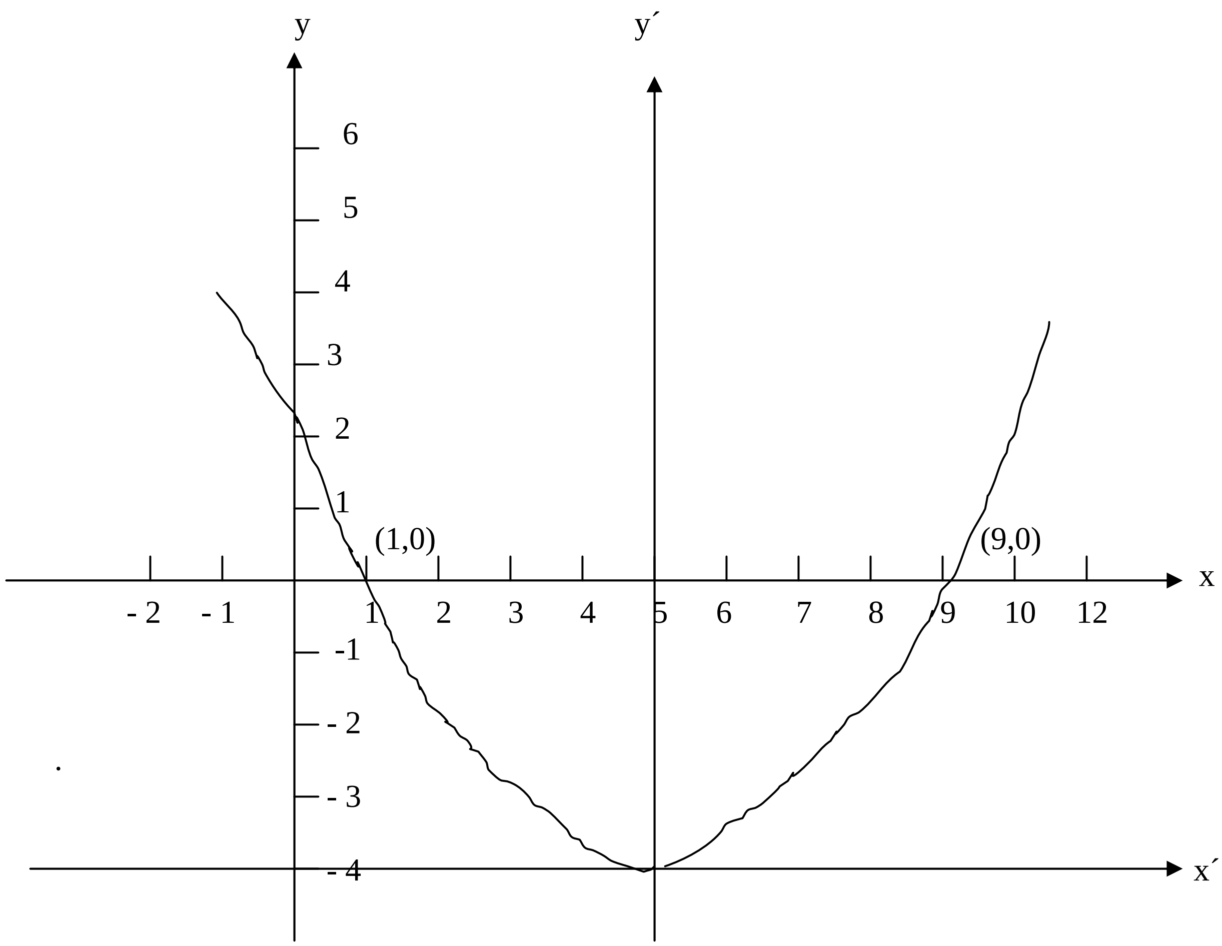
x = x´ + 5 y y = y´ -- 4 , coordenadas originales en términos de nuevas coordenadas, se sustituyen las expresiones en la ecuación:

$(x´ + 5)^2$ -- 10 (x´ + 5) -- 4 (y´ -- 4) + 9 = 0

x´ + 10x´ + 25 --10x´ -- 50 -- 4 y´ + 16 +9 = 0

$x´^2$ -- 4y´ e

Ecuación de la misma curva referida al nuevo sistema de coordenadas x´ y´ con el origen en (5, - 4). La gráfica de la curva y ambos sistemas de coordenadas.



Ejemplo:
Determinar la traslación que elimina los términos en **x** y **y** en la ecuación $\mathbf{4x^2 + 16x + 9y^2 + 18y - 119 = 0}$. Encontrar la ecuación resultante de esta traslación y graficar la ecuación mostrar ambos ejes.

Se aplica el método por completar cuadrados

$$4(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) = 119 + 16 + 9$$

$$4(x + 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 144$$

$$\frac{\mathbf{4(x + 2)^2}}{144} + \frac{\mathbf{9(y + 1)^2}}{144} = \frac{\mathbf{144}}{144}$$

$$\frac{\mathbf{(x + 2)^2}}{36} + \frac{\mathbf{(y + 1)^2}}{36} = \mathbf{1}$$

De donde se obtiene:

$x' = x + 2$, $y' = y + 1$ y $0' = (-2, -1)$
La ecuación referida al nuevo sistema de coordenadas es: $\dfrac{x'^2}{36} + \dfrac{y'^2}{16}$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Transformar las ecuaciones , trasladar los ejes de coordenadas al nuevo origen que se indica.

a) $4x^2 - 16x^2 + 5y - 4 = 0$, (2,0)

b) $12x^2 - 12x - 16y^2 - 48y - 29 = 0$, $(1/2, -3/2)$

2.- Transformar las ecuaciones a otra que no tenga términos en **x** y **y** por medio de una traslación de ejes de coordenadas. Obtener las coordenadas del nuevo origen.

a) $x^2 - 2x - 12y + 25 = 0$

b) $4x^2 - 12x + 4y^2 + 12y + 2 = 0$

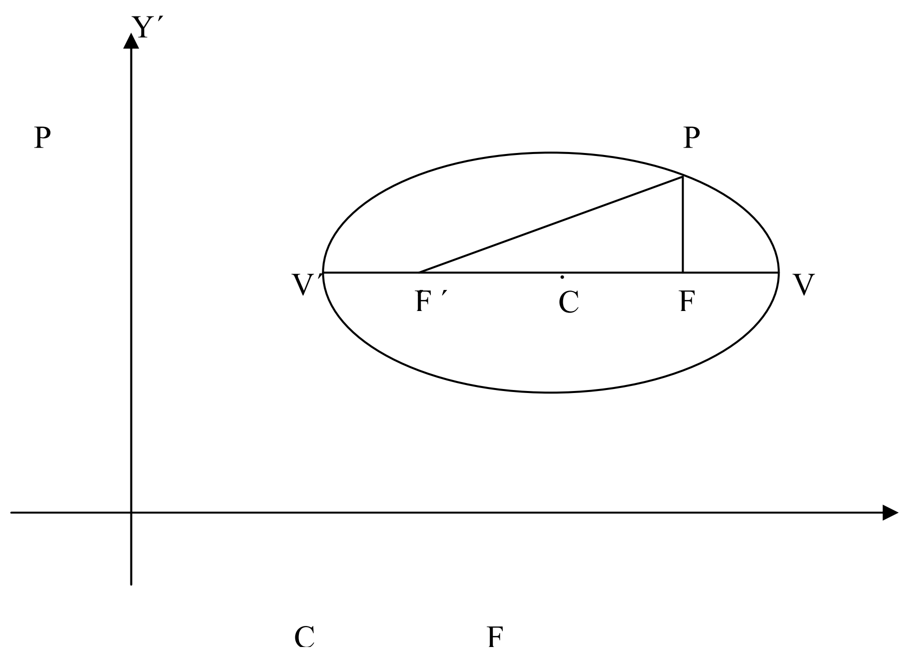
UNIDAD XIX
SECCIONES CONICAS, ELIPSE

Modulo 9
Elipse

OBJETIVO
Construcción y características de la elipse.

9.1 DEFINICION DE LA ELIPSE.
Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante.

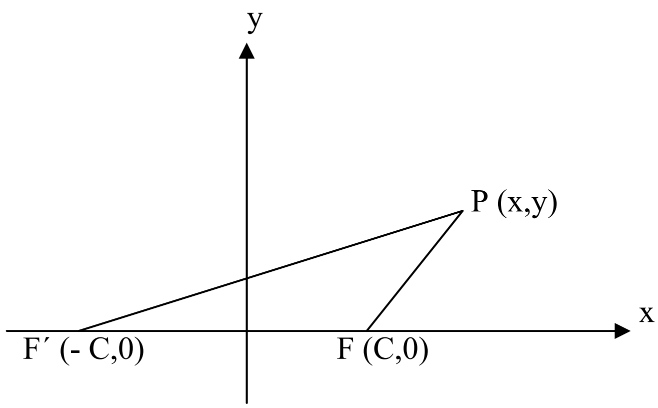
Para todo triangulo la suma de dos de sus lados es siempre mayor que el tercer lado.
El punto medio del segmento que une los focos es el centro de la elipse , la longitud del eje mayor V´V = 2 a.



V´F´ = FV , F´C = CF

9.2 ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN 0 Y FOCOS EN EL EJE X.

P(X,Y) representa a los puntos de la curva si pertenece a la elipse , entonces se cumple la igualdad: F´P + FP = 2a.



$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Se elevan al cuadrado los dos miembros de la igualdad.

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4^a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

Se cancelan sumandos iguales y se deja en un sólo miembro de la igualdad el factor con la raíz.

$$4a\sqrt{{}^2(x + c)^2 + y^2} = 4a + 4cx$$

Se divide entre 4 y se eleva al cuadrado.

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + e^2x^2$$

$$a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

Por la ley de cancelación para la suma y se dejan los términos variables en un lado de la igualdad y los constantes en el otro.

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4(a^2 - e^2)$$

a (distancia del centro al vértice) es mayor que **c** (distancia del centro al foco) , su representación es $b^2 = a^2 - c^2$

Se hace la sustitución:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Se divide la ecuación entre a^2b^2 , para obtener la forma normal de la ecuación de la elipse.

$$\boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \ , \ a > b}$$

9.3 INTERSECCIONES

Al hacer $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación normal de la elipse, se encuentran las intersecciones

$0^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x^2/a^2 + 0^2/b^2 = 1$

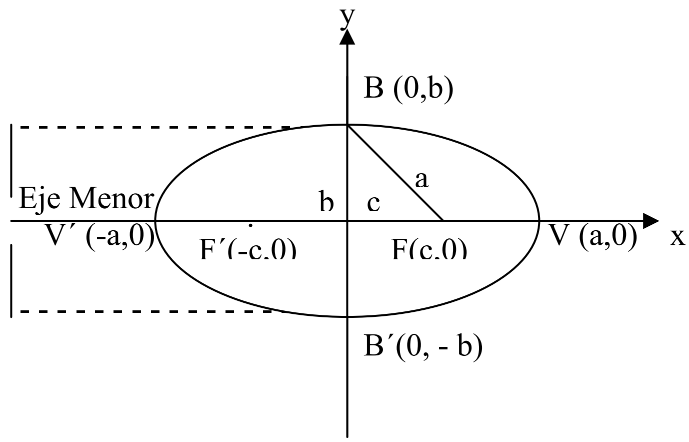
$y^2/b^2 = 1$ $x^2/a^2 = 1$

$y^2 = b^2$ $x^2 = a^2$

$y = b, b = - b$ $x = a, x = - a$

B (0,b) y B´ (0, - b) V´ (- a,0) y V (a,0)

Eje menor de la elipse



b y **c** son catetos de un triangulo rectángulo, cuya hipotenusa es **a**

Ejemplo:
Determinar la longitud del eje mayor y del eje menor, las coordenadas de los focos y de los vértices y la gráfica la elipse definida por la siguiente ecuación:

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

Se dividen ambos miembros de la ecuación

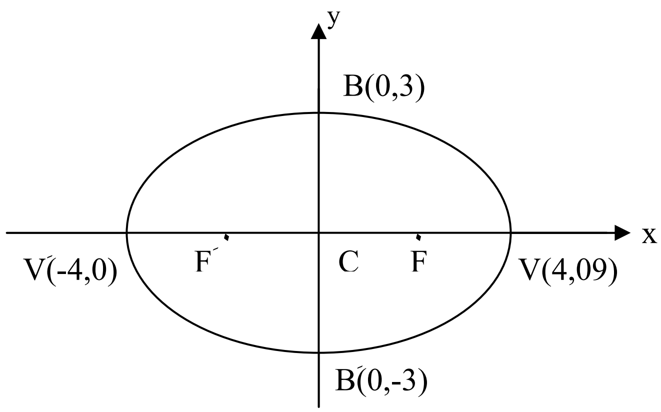
$$x^2 / 16 + y^2 / 9 = 1$$

$$a^2 = 16 > b^2 = 9 , \quad a = 4 \text{ y } b = 3$$

La elipse intersecta los ejes coordenados en:

V´ (- 4 ,0), V (4,0), B´(0,-3) y B(0,3), Eje mayor 2a = 8, Eje menor 2b = 6

$c^2 = a^2 - b^2$, $c^2 = 16 - 9$, $c = \sqrt{7}$, las coordenadas de los focos son $F(-\sqrt{7},0)$,$F(\sqrt{7},0)$



REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determinar en cada caso las longitudes del eje mayor y eje menor, las coordenadas de los focos, vértices y su gráfica.

1.- $16x^2 + 25y^2 = 400$

2.- $4x^2 + 9y^2 = 36$

3.- $4x^2 + 25y^2 = 1$ nota $16x = \dfrac{x}{1/4}$ y $\dfrac{y}{1/9}$

Determinar la ecuación de la elipse con centro en O (0,0)

4.- V(5,0) F(3,0)

5.- V (4,0) b = 2

UNIDAD XIX
SECCIONES CONICAS, ELIPSE

Modulo 10
Elipse

OBJETIVO
Determinar la distancia entre los focos y encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen.

10.1 EXCENTRICIDAD
La excentricidad de una elipse siempre es menor que 1 y se usan las fórmulas:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad ò \quad e = \sqrt{1 - (b/a)^2}\ , \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Ejemplo:
Si los semiejes de una elipse miden 6 y 10 unidades de longitud, determinar la distancia entre los focos y la excentricidad.

Solución:
$a = 10\ ,\ b = 6\ ;\ e = \sqrt{1 - (6/10)^2} = \sqrt{1 - (2/5)^2} = \sqrt{25/25 - 9/25}$

$$= \sqrt{16/25} = 4/5 \rightarrow c/a = 4/5\ ,\ c \neq 4$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \rightarrow 2c = 16$$

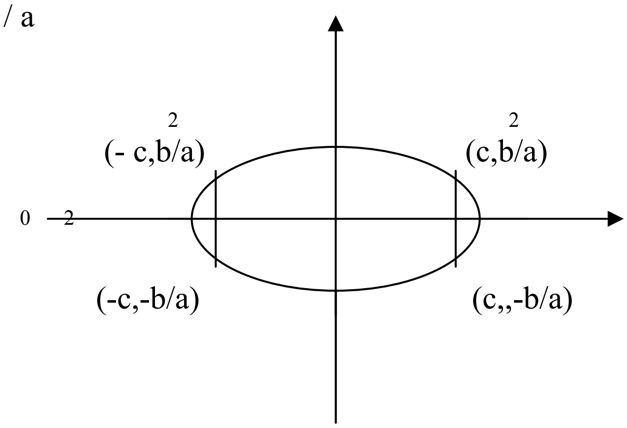
10.2 LADO RECTO
Es el segmento de recta perpendicular al eje (x) mayor en uno de los focos, , el lado recto es paralelo al eje (y), la elipse tiene dos lados rectos y su ecuación es un sistema de ecuaciones

$x = c$ ò $x = -c$

(1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

(2) $x = \pm c$ al sustituir (2) en (1) se obtiene

$y = \pm b^2/a$



L.R = $2b^2/a$

Ejemplo:
Determinar la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones:
Su lado recto mide 9/2 unidades, un vértice es el punto V (4,0) y su centro es el origen.

Solución:
L.R. = 9/2 y a = 4 → el sistema de ecuaciones es:

(1) $2b^2/a = 9/2$

(2) $a = 4$

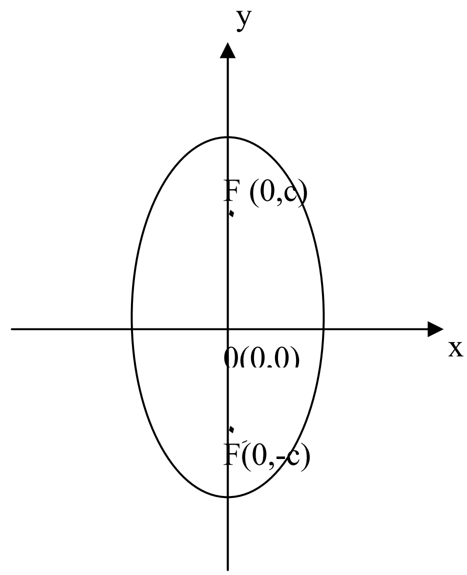
$2b^2/4 = 9/2$

$b^2/2 = 9/2$

$b^2 = 9$

La ecuación pedida es : $x^2/16 + y^2/9 = 1$

10.3 ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN 0 Y FOCOS EN EL EJE Y .
Los focos son los puntos F́(0,-c) y (0,c)



$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2^a$$

$$x^2 / b^2 + y^2 / a^2 = 1 \qquad a > b$$

Ejemplo:
Determinar la longitud del eje mayor y del eje menor, las coordenadas de los focos y la gráfica de la elipse definida por la siguiente ecuación:

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

Al dividir la ecuación entre 100 se tiene:
$x^2 / 4 + y^2 /25 = 1$, $a = 5$, $b = 2 \rightarrow a > b$

La elipse intersecta en los ejes coordenados en V (0,5) , V´ (0,-5) , B (2,0), B´ (-2,0), eje mayor es $2a = 10$, eje menor $2b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2$, $c^2 = 25 - 4 = 21$, $c = \sqrt{21}$, F $(0,\sqrt{21})$ y F́(0, -21)

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.-El eje mayor de una elipse mide 26 unidades si la excentricidad es **e** = 5 /13 ¿ Cuàl es la longitud del eje menor?

2.- Los semiejes de una elipse miden 3 unidades y 5 unidades de longitud . Encontrar la distancia de los focos y la excentricidad.

3.- Encontrar la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones , focos en (3,0) y (-3,0) longitud del lado recto es L.R. = 9.

4.- L.R. = 4, b = 4, C (0,0) a = ¿

5.- L.R. = 2, V = (9,0), C (0,0) b = ¿

6.- V (4,0), B (0,3), C (0,0) L.R. = ¿

7.- Determinar en cada caso , longitud del lado recto, coordenadas de los focos , los vértices , la excentricidad y la gráfica.

$4x^2 + y^2 = 16$

$25x^2 + 9y^2 = 225$

$36x^2 + 4y^2 = 144$

$16x^2 + 9y^2 = 1$

8.- Determinar en cada caso la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas que con las siguientes condiciones :

El eje mayor coincide con uno de los ejes coordenados y la gráfica pasa por los puntos A (4,3) y B(6,2).
Los ejes de la elipse coinciden con los ejes coordenados

L.R. = $2 / \sqrt{5}$, e = $2 / \sqrt{5}$

UNIDAD XIX
SECCIONES CONICAS, ELIPSE

Modulo 11
Elipse

OBJETIVO
Encontrar y analizar la ecuación general de una elipse.

11.1 OTRAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE.

$$(x - h)^2 / a^2 + (y - k)^2 / b^2 = 1$$

Ejemplo:
Determinar la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones , vértice:

V´(-10,6) V (10,6), L.R, = 10 ò $2b^2 / a = 10$

Solución:
El centro de la elipse es C (0,6) y a = 10, el eje mayor es horizontal, se conoce h,k y a^2, para conocer b^2 al sustituir a en $2b^2 / a = 10$, $b^2 = 50$, la ecuación de la elipse es:

$$x^2 / 100 + (y - 6)^2 / 50 = 1$$

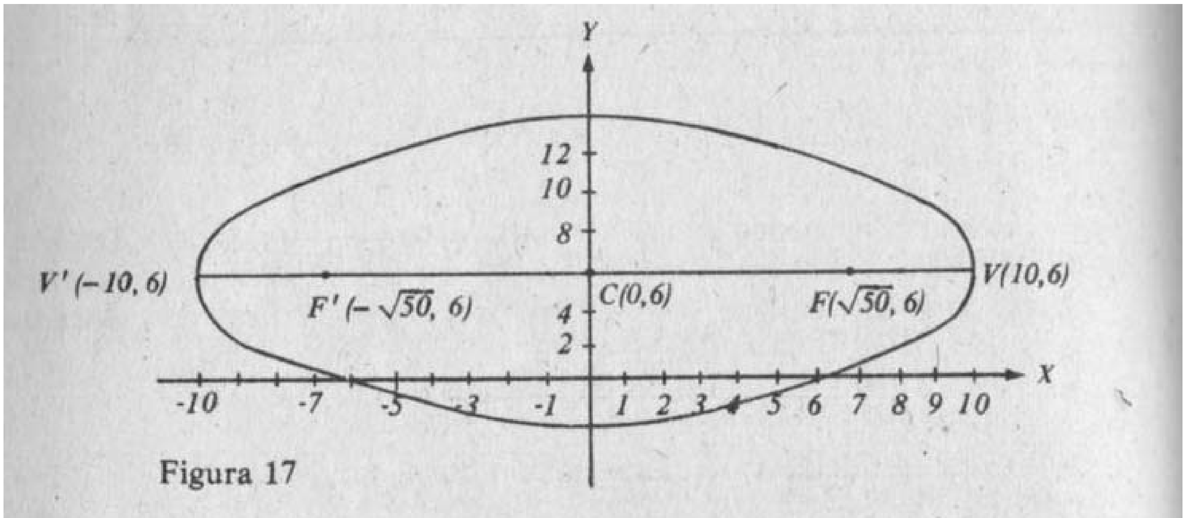


Figura 17

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determinar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones especificas en cada caso y graficar.

1.- Eje mayor de 20 unidades, eje menor 12 unidades, centro en (-3,2) eje menor paralelo al eje X.

2.- V´(-8,5), V (12,5), L.R. = 5

3.- F´(2,-2), F (2,6), eje mayor mide 8 unidades.

4.- V´(-3,-5) V (-3,3) e = 3/4

UNIDAD XIX
SECCIONES CONICAS, ELIPSE

Modulo 12
Ecuación general de la elipse

OBJETIVO
Determinar y obtener la ecuación de la elipse con las condiciones especificas.

12.1 ECUACION GENERAL DE LA ELIPSE.

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$$\boxed{\frac{(x + D/2A)^2}{N/A} + \frac{(y + E/2C)^2}{N/C} = 1}\ , \quad \boxed{N = D^2/4A + E^2/4C - F}$$

Ejemplo:
Determinar si la siguiente ecuación representa una elipse , un punto o el conjunto vació.

$$9x^2 + 25y^2 + 36x - 50y - 164 = 0$$

Solución:
Ecuación representada en formas equivalentes.

$$9x^2 + 36x + 25y^2 - 50y = 164$$
$$9(x^2 + 4x) + 25(y^2 - 2y) = 164$$
$$9(x^2 + 4x + 4) + 25(y^2 - 2y + 1) = 164 + 36 + 25$$
$$9(x + 2)^2 + 25(y - 1)^2 = 225$$
$$(x + 2)^2/225/9 + (y - 1)^2/225/25 = 1$$

$$(x + 2)/25 + (y - 1)/9 = 1$$

Es una elipse con centro C (-2,1), a = 5, b = 3; $c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{25 - 9} = 4$

L.R. $= 2b^2/a = 2(3)^2/5 = 18/5$, $e = c / a = 4/5$

Ejemplo:
Determinar si la ecuación representa a una elipse , a un punto o al conjunto vaciò.

$$9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 65 = 0$$

Solución:
A = 9, C = 25, D = - 36, E = - 50, F = 65

$$N = D^2/4A + E^2/4C - F = (-36)^2/4(9) + (-50)^2/4(25) - 65$$

$$= (36)\,(\cancel{36})/\cancel{36} + \cancel{(50})\,(50)/2\,(\cancel{2)}\,\cancel{(25})\, - 65$$

$= 36 + 25 - 65 = -4$, $N < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene representación en el plano real.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACIÒN

Determinar en cada caso si la ecuación dada representa una elipse, un punto o el conjunto vació, en caso de ser elipse encontrar centro, focos, ,vértices, excentricidad, lado recto y graficar.

1.- $x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0$

2.- $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y - 252 = 0$

3.- $5x^2 + y^2 - 10x - 2y + 71 = 0$

4.- $7x^2 + 6y^2 + 14x - 24y + 32 = 0$

5.- $8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$

UNIDAD XX
SECCIONES CONICAS, HIPERBOLA,
ROTACIÓN DE EJES

Modulo 13
Hipérbola

OBJETIVO
Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, focos en X y en Y.

13.- DEFINICIÓN DE LA HIPÉRBOLA.
Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos es una constante que se representa por **2a.**

13.2.- ECUACUON DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN 0 Y FOCOS EN X.

$$\boxed{x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1}$$

13.3 DOMINIO DE LA RELACION $\{ (x,y) \mid x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1 \}$

$\{x \in R \mid x \geq a$ ò $x \geq - a\}$

La gráfica intersecta al eje x en los puntos V´ (-a,0) y (a,0) son vértices de la hipérbola y el segmento de recta que los une **eje transverso** (V´V = 2a), el segmento de recta de longitud **2b** es el eje transverso llamado **eje** conjugado.

13.4 ASINTOTAS.

Línea a la cual se aproxima la gráfica de la curva sin llegar a tocarla aunque el valor de **x** sea muy grande. El eje X es una asìntota de la gráfica de la curva. La hipérbola tiene dos asìntotas que pasan por el centro de la misma y por los vértices opuestos del rectángulo.

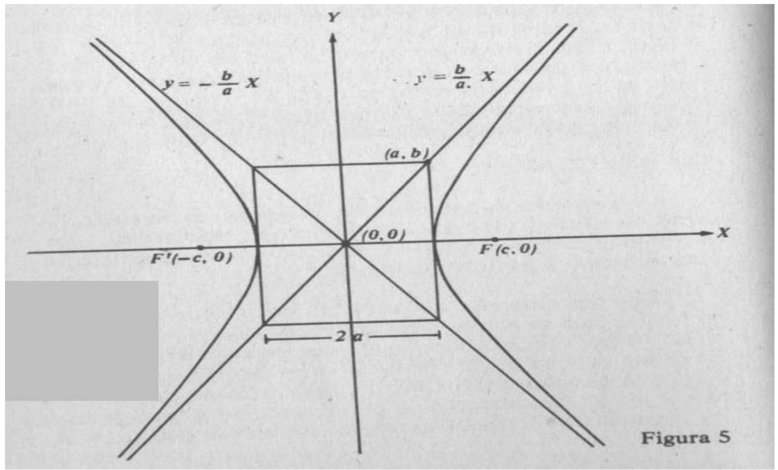


Figura 5

13.5 EXCENTRICIDAD

$e = c/a$, si $c > a$, $\rightarrow e > 1$.

Ejemplo:

Determinar a,b,c,L.R., e de la hipérbola cuya ecuación es:

$x^2/64 - y^2/100 = 1$

Solución:

La ecuación corresponde a la forma $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $a = 8$, $b = 10$, $c^2 = 46 + 100$,

$c = \sqrt{164}$, $c = 2\sqrt{41}$, los focos de la hipérbola con los puntos F´(-2√41,0) y F (2√41,0), los vértices están en V´ (-8,0), V (8,0),L.R. = 2(100) / 8 = 25, $e = 2\sqrt{41} / 8 = \sqrt{41}/4$, las ecuaciones de las asìntotas son: y b/a x, y = - b/a x al sustituir $y = \pm 5/4\, x$.

13.6.- ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN "0" Y FOCOS EN EL EJE Y

$\boxed{b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2}$ ò $\boxed{y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1}$

$y = \pm a / b \sqrt{x^2 + a^2}$ el eje transverso coincide con el eje "y"

$x = \pm b / a \sqrt{y^2 - a^2}$ el eje conjugado coincide con el eje "x"

Las ecuaciones de las asìntotas son $y = a/b\, x$ y $y = - a/b\, x$

Ejemplo:
Determinar los elementos (centro,focos, excentricidad, L.R. , vértices y ecuaciones de las asìntotas y graficar detalladamente la hipérbola cuya ecuación es:

$$x^2 / 5 \;--\; y^2 / 4 = -1$$

Solución:
Para que el miembro de la derecha sea positivo , se multiplica toda la ecuación por (-1).

$$-- x^2 / 5 + y^2 / 4 = 1 \quad ò \quad y^2 / 4 -- x^2 / 5 = 1$$

Es una hipérbola con el eje transverso al eje Y , C (0,0), a = 2 ,b= $\sqrt{5}$, $c^2 = 4+5 = 9 \rightarrow c = 3$, e = 3/2, L.R. = 5, Las ecuaciones de las asìntotas $y = a / b\ x = 2 / \sqrt{5}$ ò $- 2 / \sqrt{5}$

13.7.- HIPÉRBOLAS CONJUGADAS O RECTAQNGULARES..

Las longitudes de los ejes transverso y conjugado son iguales 2a = 2b, a = b

La ecuación de la hipérbola es: $x^2 / a^2 - y^2 / a^2 = 1$ Eje transverso coincide con el eje X.

$y^2 / a^2 - x^2 / a^2 = 1$ Eje transverso coincide con el eje Y.

Ejemplo:
Mostrar que en una hipérbola rectangular las asintotas se intersectan en ángulo recto y la excentricidad es $\sqrt{2}$.

Solución:
El eje transverso coincide con el eje X, las ecuaciones de las asintotas son:
y = b / a x, y= - b / a x , a = b , **b** se sustituye por **a** y = a / a x , y = - a / a x ., y = x.

Las pendientes de las asintotas son $m_1 = 1$ y $m_2 = - 1$ y el producto $m_1 m_2 = -1$ condición que satisfacen las pendientes de rectas perpendiculares entre sì; las rectas se intersectan en àngulo recto.

La excentricidad es : $e = \sqrt{2a^2} / a = \sqrt{2}$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determinar en cada caso las constantes **a,b,c,** las coordenadas de los vértices y de los focos, la longitud del lado recto, la excentricidad , ecuaciones de las asintotas y graficar.

1.- $x^2 / 4 - y^2 / 25 = 1$

2.- $x^2 / 16 - y^2 / 9 = 1$

Encontrar la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones (tienen centro en el origen).

3,- a = 10, b = 5 Focos en eje **x**

4.- Foco en F (2,0), eje conjugado mide 2 unidades

5.- Un vértice V (3,0) y un foco en F (4,0)

Las hipérbolas que se presentan con centro en el origen y focos en el eje Y , determinar vértice, focos, longitud de los ejes y del lado recto, excentricidad, ecuaciones de las asìntotas y graficar

6.- $y^2 / 25 - x^2 / 9 = 1$

7.- $25x^2 - 4x^2 = 1$

8.- $16x^2 - 9y^2 = -1$

En las siguientes hipérbolas con centro en el origen determinar si sus focos están el eje **x ò** en el **y** y graficar.

9.- $16y^2 - 25x^2 = 400$

10.- $x^2 - y^2 + 4 = 0$

Determinar en cada caso la ecuación de la hipérbola con centro en el origen que satisface las siguientes condiciones .

11.- a = 10, b 0 5, focos en el eje Y.

12.- Un vértice V'(0,-3) y un foco en F (0,-4)

UNIDAD XX
SECCIONES CONICAS, HIPERBOLA,
ROTACIÓN DE EJES

Modulo 14
Hipérbola

OBJETIVO
Determinar los elementos de una hipérbola con centro en (h,k).

14.1.- OTRAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA.

$$(x - h)^2 / a^2 - (y - k)^2 / b^2 = 1$$

Las pendientes de las asìntotas son: $m = b / a$, $m = - b / a$ y sus ecuaciones

$\boxed{y - k = b/a\,(x-h)}$ y $\boxed{y - k = - b / a\,(x - h)}$

Ejemplo:
Determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, ecuaciones de las asìntotas, longitud del lado recto excentricidad, y graficar la hipérbola cuya ecuaciòn es:

$$(x - 5)^2 / 9 - [y - (- 3)]^2 / 16 = 1$$

Solución:
El eje transverso es horizontal, $h = 5$, $k = -3$, el centro es el punto C (5,-3), $c^2 = 9 + 16$, $c = 5$, $a = 3$ y $b = 4$, excentricidad $\mathbf{e} = 5 / 3$, L.R. $= 32 / 3$ y las ecuaciones de las asìntotas son:

$$y + 3 = 4/3\,(x-5) \quad \text{y} \quad y + 3 = - 4/3\,(x-5)$$

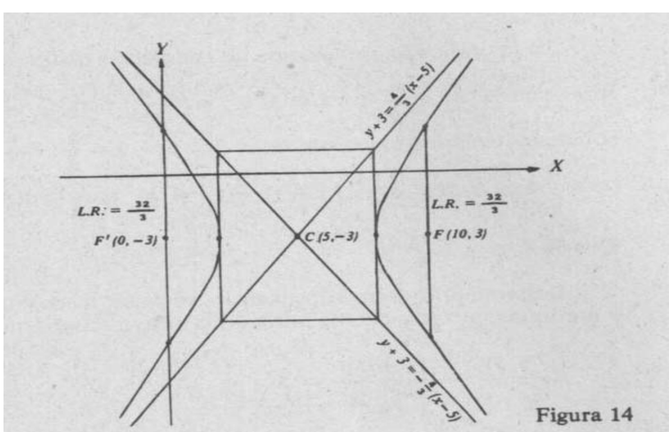


Figura 14

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION.

Determinar las ecuaciones de las asìntotas de la hipérbola y satisfacer las condiciones en cada caso en cada caso.

1.- Vèrices en (3,± 6) y focos en (3,± 10).

2.- Vértices en (-3,-2), a = 4, c = $\sqrt{5}$ ejes paralelos a los ejes coordenados.

3.- Ejes paralelos a los ejes coordenados centro en (-5,2) , e = 3 / 2 y L.R. = 5 / 2

UNIDAD XX
SECCIONES CONICAS, HIPERBOLA,
ROTACIÓN DE EJES

Modulo 15
Hipérbola

OBJETIVO
Determinar la ecuación general de la hipérbola y su representación grafica.

15.- ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A . C < 0$ se puede expresar en sus

formas equivalentes $A (x + D / 2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = N, \quad N \neq 0$

$$A(x + D / 2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = 0 . \quad N = 0$$

Factorizaciòn de una diferencia de cuadrados

$[b(x-h) - a (y-k)] \; [b(x-h) + a ((y-k)] = 0$

$A = b^2$, $C = - a^2$, $D = - 2b^2 h$, $F = 2a^2 k$, Al sustituir y factorizar resulta

$$(y-k)^2 / a - (x - h)^2 / b = 1$$

Ejemplo:
Determinar si la ecuación representa una hipèrbola o un par de rectas que se intersectan.

$$16x^2 - y^2 -32x + 4 - 36 = 0$$

Solución:

$$16(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) = 36$$

$$16(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 1) = 36 + 16 - 4$$

$16(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 48$, $N = 48$, $N = 48 \rightarrow N \neq 0$ la ecuación representa una hipérbola

$$16(x - 1)^2 /48 - (y - 2)^2 /48 = 1$$

$$(x - 1)^2 / 3 - (y - 2)^2 / 48 = 1$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determinar si las siguientes ecuaciones representan una hipérbola o un par de rectas que se intersectan.

1.- $4y^2 - x^2 + 24y + 4x - 48 = 0$

2.- $4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 35 = 0$

3.- $16x^2 - 9y^2 - 18y --24x - 9 = 0$

4.- $x^2 - y^2 .- 12x + 16y - 64 = 0$

UNIDAD XX
SECCIONES CONICAS, HIPERBOLA,
ROTACIÓN DE EJES

Modulo 16
Hipérbola

OBJETIVO
Referir a un sistema de dos dimensiones y simplificar la ecuación de una curva.

16.- ROTACIÓN DE EJES.
Se transforma la ecuación de la forma Ax + Bxy + Cy + Dx + Ey + F = 0 en otra que carece del término Bxy, se considera un nuevo par de ejes **X´ Y´** con el mismo origen, existe una relación entre las coordenadas (x,y).

Ecuaciones que se utilizan para determinar las nuevas coordenadas (x´,y´) de un pinto P (x,y) cuando los ejes coordenados XY giran un àngulo y.

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = x \cos y + y \operatorname{sen} y \\ y = -x \operatorname{sen} y + y \cos y \end{array}}$$

Ejemplo:
Si un sistema de coordenadas rectangular se rota 45° , ¿cuàl es la ecuación de la curva $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$?

Solución:
$x = x' \cos y - y' \operatorname{sen} y$; $y = x' \operatorname{sen} y + y' \cos y$

$y = 45°$, $\cos y = 1/\sqrt{2}$,$\operatorname{sen} y = 1/\sqrt{2}$, se sustituye y se aplica en la ecuaciòn: $x = x'/\sqrt{2} - y'/\sqrt{2}$, $y= x'//\sqrt{2} + y'/\sqrt{2}$

$$3(x'/\sqrt{2} - y'/\sqrt{2})^2 - 2(x'/\sqrt{2} - y'/\sqrt{2})(x'/\sqrt{2} + y'/\sqrt{2}) + 3(x'/\sqrt{2} + y'/\sqrt{2})^2 = 2$$

$$3(x'^2/2 - x'y' + y'^2/2) - 2(x'^2/2 - y'^2/2) + 3(x'^2/2 + x'y' + y'^2/2) = 2$$

$$3/2x'^2 - 3x'y' + 3/2y'^2 - x'^2 + y'^2 + 3/2x'^2 + 3x'y' + 3/2y'^2 = 2$$

Se reducen términos semejantes.

$(3/2 – 1 + 3/2)x'^2 + (-3 + 3)x'y' + (3/2 +1 + 3/2)y'^2 = 2$

$2x'^2 + 4y'^2 = 2$ ò $x'^2 + 2y'^2 = 1 = x'^2 + y'^2/1/2 = 1$, $a = 1$, $b = ½$, $a = 1$, $b= 1/\sqrt{2}$

Para eliminar el tèrmino Bxy de la ecuación $Ax + Bxy + Cy + Dx + Ey + F = 0$ se dan dos posibilidades:

Si $A \neq C$, entonces	$tg\ 2y = B / A - C$
Si $A = C$, entonces	$y = 45°$

$A'x' + B'x'y' + C'y' + D'x' + E'y' + F = 0$, es la nueva ecuación referida al sistema coordenado (x',y'), $B' = 0$.

$sen2y/cos2y = B/A-C$ ò $tg2y = B/A-C$

$A' + C' = A \cos^2 y + Bsen\ y + C\ sen^2 y + A\ sen^2 y - B\ sen\ y \cos y + C \cos^2 y$

$A' + C' = A(\cos^2 y + sen^2 y) + C(sen^2 y + \cos^2 y)$

$A' + C' = A + C$ (No cambia cuando se lleva a cabo una rotación), es **invariante.**

Análisis de la descripción $B^2 = 4AC$

Si $B^2 - 4AC < 0$; la curva es una elipse, circunferencia. (si $B = 0$) es un punto ò no existe la curva.

Si $B^2 – 4AC = 0$; la ecuación representa una parábola, dos rectas paralelas, una recta ò no tiene gráfica.

Si $B^2 - 4AC > 0$, representa una hipérbola ò dos rectas que se cortan.

Ejemplo:

Identificar la curva definida por la ecuación $8x - 4xy + 5y - 36 = 0$

Solución:

$B^2 - 4AC = 16 – 4.40$, $B - 4AC < 0$, $B \neq 0$

$A = 8$, $B = - 4$, $C = 5$, $D = 0$, $E = 0$, $F = - 36$; $A \neq C$.

$\operatorname{tg} 2y = -4/3$. $2y = 126°52'$, $y = = 65°26'$ el àngulo se encuentra en el segundo cuadrante

$x = x' \cos y - y' \operatorname{sen} y$.$y = x' \operatorname{sen} y + y' \cos y$

$\operatorname{tg} 2y \equiv \operatorname{sen} 2y/\cos 2y$, $\operatorname{sen} 2y/\cos 2y = -4/3$

$\operatorname{sen}^2 2y/\cos^2 2y = 16/9$

$9 \operatorname{sen}^2 2y = 16\cos^2 2y$

$9(1 - \cos^2 2y) = 18 \cos^2 2y$

$9 - 9 \cos^2 2y = 16 \cos^2 2y 25 \cos 2y = 9$

$25 \cos^2 2y = 9/25$, $\cos 2y = -3/5$

$x = x'/\sqrt{5} - 2y'/\sqrt{5}$, $y = 2y'/\sqrt{} + y'/\sqrt{5}$

Se sustituyen los valores en la ecuación:

$8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$

$8(x'/\sqrt{5} - 2y'/\sqrt{5})^2 - 4(x'/\sqrt{5} - 2y'/\sqrt{})(2y'/\sqrt{5} + y'/\sqrt{5}) + 5(2y'/\sqrt{5} + y'/\sqrt{5})^2 = 36$

$8(x'^2/5 - 4/5x'y' + 4y'^2/5) - 4(2x'^2/5 + x'y'/5 - 4x'y'/5 + 2y'^2/5) + 5(4x'^2/5 + 4x'y'/5 + y'^2/5) = 36$

$8/5x'^2 - 32/5x'y' + 32y'^2/5 - 8x'^2/5 + 12x'y'/5 - 8y'^2/5 + 20x'5 + 20x'y'/5 + 5y'/5 = 36$

Se reducen términos semejantes:

$20x'^2/5 + 45y'^2/5 = 36$, $x'^2/9 + y'^2/4 = 1$

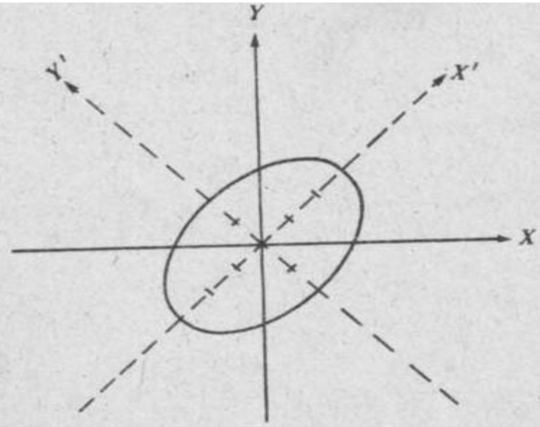


Figura 22

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determinar e identificar la curva definida por cada una de las siguientes ecuaciones, eliminar el término **xy.**

1.- $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

2.- $x^2 + 4xy + y^2 + 32 = 0$