CVE
51

Matemáticas V
Quinto semestre

PREPARATORIA

abierta

Preparatoria
Abierta

Matemáticas V

Quinto semestre

Matemáticas V

PREPARATORIA ABIERTA

El contenido académico de este texto es exclusiva responsabilidad del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y su índice pertenece al programa correspondiente al plan de estudios del nivel medio superior, para la materia de:

MATEMATICA
UNIDADES XVII-XX.

AUTORES: Humberto Cantú Salinas
Héctor Paz Estrada

REVISO: Jaime Navarro Cuevas

COMITE ACADEMICO: Gustavo Mendoza González,
Humberto Cantú Salinas,
Roberto García Martínez,
Moisés Galicia Arrambide,
Héctor Paz Estrada.

COLABORO: Andrés Ramírez y Villa

La educación es una responsabilidad compartida y en consecuencia invitamos atentamente a toda persona interesada en colaborar para resolver la problemática educativa, a que remita sus comentarios, críticas y sugerencias con respecto a esta obra a la Dirección General de Educación Extraescolar de la SEP, CALLE LAGO BANGUEOLO No. 24, COL. GRANADA DELEGACIÓN MIGUEL HIDALGO, C. P. 11520 MÉXICO, D. F.

Sus aportaciones serán apreciadas en todo lo que valen y permitirán perfeccionar y adecuar permanentemente estos materiales a las cambiantes condiciones de la época actual.

Indice

Prólogo

La Geometría Analítica es el estudio o tratamiento analítico de la Geometría, y por primera vez fue presentado por René Descartes en su obra ***Géométrie*** que se publicó en el año de 1637. En esta obra, Descartes establecía la relación explícita entre las curvas y las ecuaciones y podemos decir que, además de Descartes, todos los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII, de una forma o de otra contribuyeron al desarrollo de esta nueva teoría.

A la Geometría Analítica también se le ha llamado Geometría por Coordenadas o Geometría Cartesiana en honor de su fundador.

Cuando hacemos el estudio analítico de un problema de geometría, lo podemos distribuir en los tres pasos siguientes:

1) Traducción del problema a expresiones algebraicas.
2) Elaboración hasta llegar a una ecuación o a un sistema de ecuaciones y resolución puramente analíticos.
3) Interpretación geométrica de los resultados obtenidos.

En este libro haremos, en la primera unidad un estudio detallado de la línea recta y en las tres unidades restantes se estudiarán cuatro de las más importantes curvas que son: la Circunferencia, la Parábola, la Elipse y la Hipérbola y se incluirá en las unidades XVIII y XX la traslación y rotación de ejes.

Instrucciones para el alumno

El presente texto ha sido elaborado tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan a los alumnos de Sistemas Abiertos de Enseñanza.

El texto ha sido estructurado de tal forma que le facilite al máximo su estudio. Cuenta con varias unidades, cada una de las cuales contiene:

1) Objetivos generales: que le informan acerca de lo que se pretende lograr con el estudio de dicha unidad.
2) Una introducción: independientemente de la que aparece dedicada al texto.
3) Un glosario: que le indica el significado de los términos técnicos empleados en el desarrollo de la unidad.

Para el estudio del curso la unidad se ha dividido en partes llamadas módulos. Cada texto consta siempre de 16 módulos. De esta manera, estimamos que es posible aprobar las asignaturas del plan de estudios de un semestre, en las 18 semanas. El módulo de cada asignatura está programado para que lo estudie en un tiempo promedio de 4 a 4:30 horas por semana. Sin embargo, se le recomienda que dedique a cada módulo, el tiempo que usted considere necesario, de acuerdo con sus posibilidades.

El módulo cuenta con:

1) Objetivos específicos: que desglosan el objetivo general de la unidad.
2) Esquema-resumen: donde se le presenta el contenido de cada módulo, en forma sinóptica.
3) Contenido: se refiere al desarrollo del tema o de los temas.
4) Actividades complementarias: le servirán de refuerzo en el aprendizaje de una unidad o un módulo específico.
5) Reactivos de autoevaluación: al final de cada módulo se le dan una serie de preguntas de autocomprobación, para que pueda verificar por sí mismo, en qué grado ha logrado los objetivos (propuestos al principio del módulo). Las respuestas correctas las encontrará al final de cada unidad o, en otros casos, al final del libro.

En la parte final del libro, podrá encontrar, cuando se estime necesario, apéndices que le ayudarán a la ampliación y profundización de algún tema.

Además, se le da en las unidades o al final del texto, una bibliografía con la que puede complementar sus estudios o ampliar su horizonte cultural, de acuerdo con sus inquietudes.

ADVERTENCIA:

Le recomendamos la lectura cuidadosa y la comprensión de los objetivos específicos al empezar cada módulo, para que tenga presente lo que se espera de usted, con el trabajo que realice con cada uno de ellos.

UNIDAD XVII

LA LINEA RECTA

Introducción

En esta unidad iniciará el aprendizaje de la Geometría Analítica Plana, haciendo un estudio detallado de la línea recta para posteriormente en otras unidades, estudiar curvas tales como la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

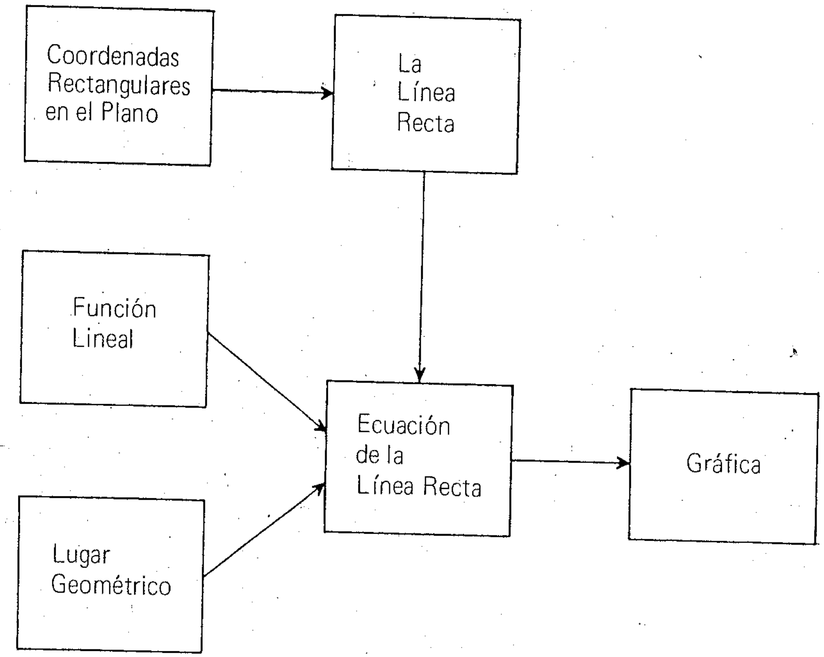
Para iniciar el estudio de la línea recta, es necesario que vuelva a repasar todo lo referente a las Coordenadas Cartesianas o Rectangulares.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Explicará el concepto de inclinación y pendiente de una recta.
2. Explicará los criterios de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
3. Definirá la línea recta.
4. Deducirá las diferentes formas de la ecuación de la recta.
5. Identificará la ecuación de una línea recta en cualquiera de sus formas equivalentes.

Diagrama temático estructural



Glosario

Inclinación de una recta: Angulo que forma una recta medido desde el eje X en sentido contrario a como giran las manecillas de un reloj.

Pendiente de una recta: Tangente trigonométrica de su inclinación.

Rectas paralelas: Rectas que tienen igual pendiente.

Rectas perpendiculares: Rectas con pendientes recíprocas y de signo contrario.

Angulo entre dos rectas: El ángulo formado entre dos rectas que se intersectan en un punto.

Punto medio de un segmento: Es el punto que equidista de los dos extremos del segmento.

Lugar geométrico: Conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen ciertas condiciones.

Ecuación de un lugar geométrico: Cualquier ecuación que es satisfecha por todos los puntos del lugar geométrico y solamente por ellos.

Gráfica de un lugar geométrico: Es la representación geométrica del conjunto de puntos que forman el lugar geométrico.

Línea recta: Es el lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente *m* resulta siempre constante.

Ecuación punto pendiente: Toda ecuación de la línea recta de la forma

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ecuación dos puntos: Toda ecuación de la línea recta de la forma

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación simétrica: Toda ecuación de la línea recta de la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación pendiente-ordenada al orgen: Toda ecuación de la línea recta de la forma

$$y = m\,x + b$$

Ecuación general de la recta: Tod ecuación de la línea recta de la forma

$$A\,x + B\,y + C = o$$

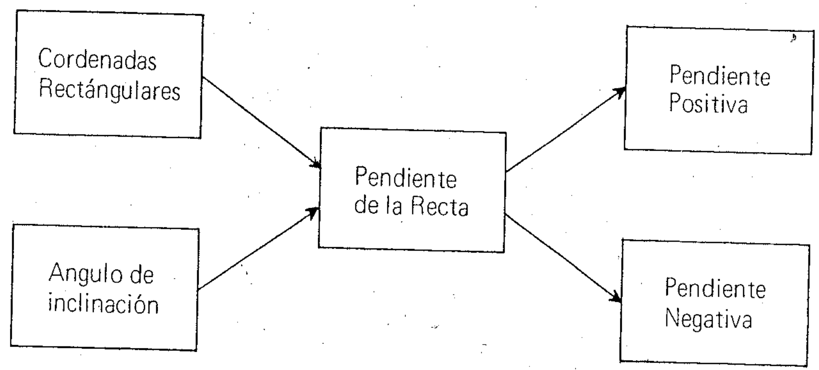
Módulo 1

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Calculará la pendiente de una recta que pasa por dos puntos dados.
2. Determinará el ángulo de inclinación de una recta que pasa por dos puntos dados.
3. Encontrará las pendientes de los lados de una figura geométrica plana de vértices conocidos.

ESQUEMA-RESUMEN



1.1 INCLINACION Y PENDIENTE DE LA RECTA

Angulo de inclinación de una recta.

Al ángulo que forma una recta dirigida o no, medido desde el eje X en sentido contrario a como giran las manecillas de un reloj, se le llama *inclinación de la recta* y lo representaremos con la letra griega Θ (se lee teta); su medida estará comprendida entre por $0° \leqslant \Theta \leqslant 180°$. (Figura 1).

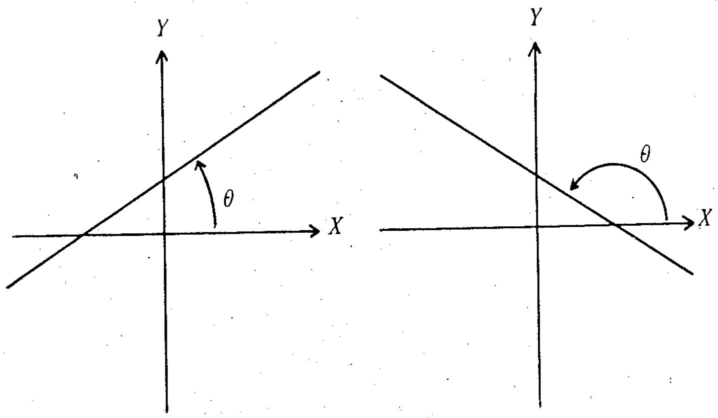


Figura 1

Fórmula para la obtención de la pendiente.

Tracemos ahora una recta l (figura 2) no paralela al eje Y, y sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos que están sobre ella $(P_1 \neq P_2)$. La pendiente de la recta (m) estará definida por la igualdad.

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

Como se puede observar, las diferencias de las abscisas y de las ordenadas se pueden tomar en cualquier orden; sin embargo, al formar el cociente sí tienen que tomarse ambas en el mismo orden. ¿Por qué?

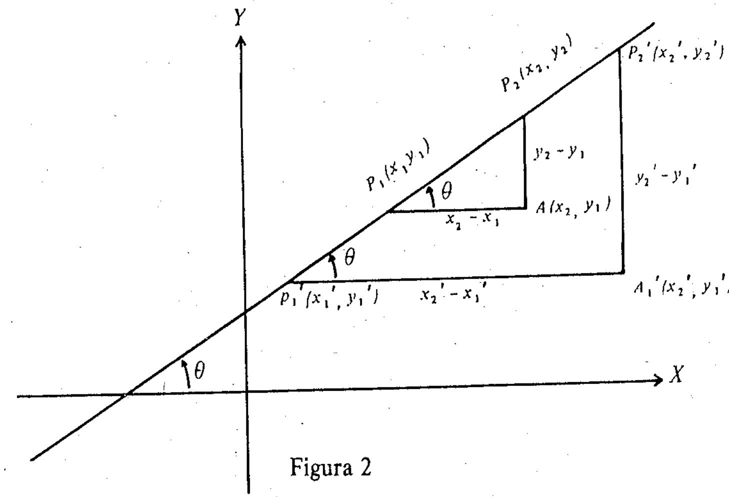


Figura 2

Tomemos dos puntos diferentes $P_1'(x_1',y_1')$ y $P_2'(x_2',y_2')$ sobre la misma recta, y formemos los triángulos rectángulos P_1AP_2 y $P_1'A_1'P_2'$ los cuales son semejantes y debido a esta semejanza podemos escribir que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

¿Que signfica m?

O sea que, para una recta dada, la *pendiente m* definida por la ecuación (1) es independiente de como se tomen los puntos P_1 y P_2, por lo que podemos decir que esta ecuación asocia a cada recta no paralela al eje Y, un solo número m al cual llamamos *pendiente* de la recta.

Si Θ es el menor ángulo que forma la recta con el eje X medido en sentido contrario a las manecillas de un reloj (sentido positivo), podemos ver, como se muestra en la figura 2, que:

$$\boxed{\tan \Theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}$$

o sea que $m = \tan \Theta$, para $0° \leqslant \Theta \leqslant 180°$

$m = \tan \Theta$

Lo anterior lo podemos definir como: *La pendiente de una recta es igual a la tangente trigonométrica de su inclinación.*

Como casos particulares de esta definición tenemos que, si una recta es paralela al eje X, su inclinación es $0°$ y por lo tanto $m = 0$. Si es perpendicular al eje X, su inclinación es igual a $90°$, por lo que $m = \tan 90°$ no está definida.

Ejemplo 1:

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(3,5)$ y $P_2(6,9)$.

Solución:

Usando la fórmula (1) tenemos que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-5}{6-3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2:

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por $P_1(-5,4)$ y $P_2(7,-6)$

Solución:

$$m = \frac{-6-4}{7-(-5)} = \frac{-6-4}{7+5} = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Ejemplo 3:

Encontrar la inclinación Θ de la recta que pasa por los puntos $P_1(4,5)$ y $P_2(6,7)$

Solución:

Por la fórmula (2) tenemos que:

$$m = \tan\Theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

así que:

$$\tan\Theta = \frac{7-5}{6-4} = \frac{2}{2} = 1$$

como $\tan 45° = 1$, la inclinación de la recta es de $45°$.

Ejemplo 4:

Encontrar la inclinación Θ de la recta que pasa por $P_1(-4,-5)$ y $P_2(-16,7)$.

Solución:

$$\tan\Theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-5)}{-16-(-4)} = \frac{7+5}{-16+4} = \frac{12}{-12} = -1$$

como $\tan 135° = -1$, la inclinación de la recta es de $135°$.

En los ejemplos 3 y 4, no fue necesario usar tablas trigonométricas para encontrar el valor de Θ, ya que eran valores "conocidos" En caso de que esto no suceda, haremos uso de las tablas trigonométricas para encontrar el valor de Θ.

Ejemplo 5:

Encontrar la inclinación Θ de la recta que pasa por $P_1(4,4)$ y $P_2(8,5)$.

Solución:

$$\tan\Theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{8-4} = \frac{1}{4} = .2500$$

En la tabla de funciones trigonométricas* buscamos en la columna de las tangentes el valor de .2500 y encontramos que el más aproximado es .2493; para este valor de la tangente el ángulo es de 14°, por lo que el valor de la inclinación de la recta es de 14° aproximadamente. (14°2' usando interpolación).

Ejemplo 6:

Encontrar las pendientes de los lados del triángulo cuyas vértices son los puntos $P_1(3,-4)$, $P_2(-1,7)$ y $P_3(-5,1)$.

Solución:

$$m_{P_1P_2} = \frac{7-(-4)}{-1-3} = \frac{7+4}{-4} = -\frac{11}{4}$$

* Tabla I del libro "Matemática" Unidades XIII-XVI.

$$m_{P_1P_3} = \frac{\quad}{-5-3} = \frac{4}{-8} = -\frac{5}{8}$$

$$m_{P_2P_3} = \frac{1-7}{-5-(-1)} = \frac{1-7}{-5+1} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 7:

Encontrar la pendiente e inclinación de la recta que pasa por $P_1(3,1)$ y $P_2(-1,4)$

Solución:

$$m = \frac{4-1}{-1-3} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Puesto que la pendiente es negativa, la inclinación de la recta es mayor de 90°, luego,

$$\text{si } \tan \Theta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \Theta = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\Theta = 180^\circ - \arctan\frac{3}{4}$$

$$\Theta = 180 - 36^\circ 52'$$

$$\Theta = 143^\circ 8'$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los siguientes problemas encuentre el valor de la pendiente (m) y la inclinación (Θ) de la recta que pasa por los pares de puntos que se dan. Para la inclinación Θ use la tabla I del libro "Matemática Unidades XIII-XVI"

1. *(3, 2), (5, 8)*
2. *(3,6), (6,–2)*
3. *(–4,1), (–1.5)*
4. *(–6,9), (0,7)*
5. *(–7,0), (0,–5)*
6. *(–5,–4), (4,–3)*
7. *(–6,0), (0,–6)*
8. *(1,–5), (–1,–5)*
9. *(2,5), (2,–5)*
10. *0,8), (–8,0)*

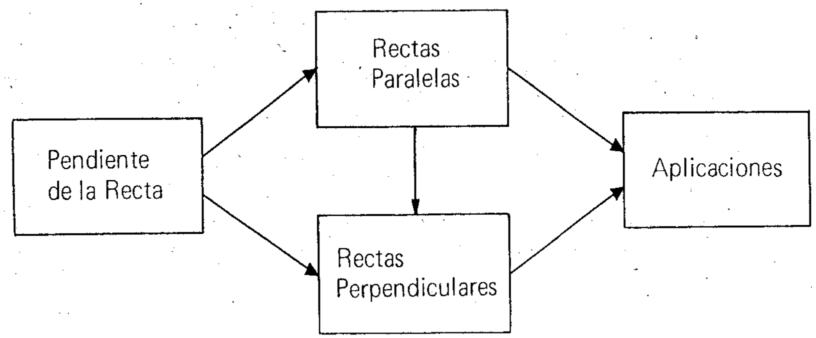
Módulo 2

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Demostrará por medio de pendientes, el paralelismo entre dos rectas dadas.
2. Demostrará por medio de pendientes, la perpendicularidad entre dos rectas dadas.
3. Verificará algunas propiedades de figuras geométricas planas, empleando el concepto de pendiente.

ESQUEMA-RESUMEN



2.1 RECTAS PARALELAS

Las rectas l_1, con pendiente m_1, y l_2 con pendiente m_2 no verticales; son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales: Se denotará como $l_1 \| l_2$ para indicar que l_1 es paralela a l_2.

$$l_1 \| l_2 \iff m_1 = m_2 \qquad (3)$$

¿Cuándo se dice que dos rectas son paralelas?

Para la demostración usaremos la figura 3

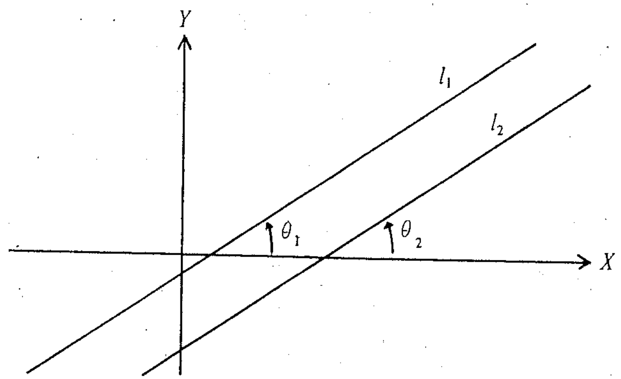


Figura 3

Primero demostramos que si $l_1 \| l_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

$l_1 \| l_2$	Hipótesis.
$\Theta_1 = \Theta_2$	los ángulos correspondientes son iguales.
$\tan \Theta_1 = \tan \Theta_2$	ángulos iguales tienen tangentes iguales.
$m_1 = \tan \Theta_1$	definición de pendiente.
$m_2 = \tan \Theta_2$	definición de pendiente.
$m_1 = m_2$	Sustitución.

En seguida demostramos que si $m_1 = m_2 \Rightarrow l_1 \| l_2$

$m_1 = m_2$	Hipótesis.
$m_1 = \tan \Theta_1$	definición de pendiente.
$m_2 = \tan \Theta_2$	definición de pendiente.
$\tan \Theta_1 = \tan \Theta_2$	Sustitución.
$\Theta_1 = \Theta_2$	Los ángulos son iguales si sus tangentes son iguales, cuando $0° \leqslant \Theta \leqslant 180°$

$l_1 = l_2$ Las rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales.

Ejemplo 1:

Demostrar que los puntos $P_1(6,1)$, $P_2(5,7)$, $P_3(-4,3)$ y $P_4(-3,-3)$ son los vértices de un paralelogramo. Dibujar el cuadrilátero. (Figura 4).

Solución:

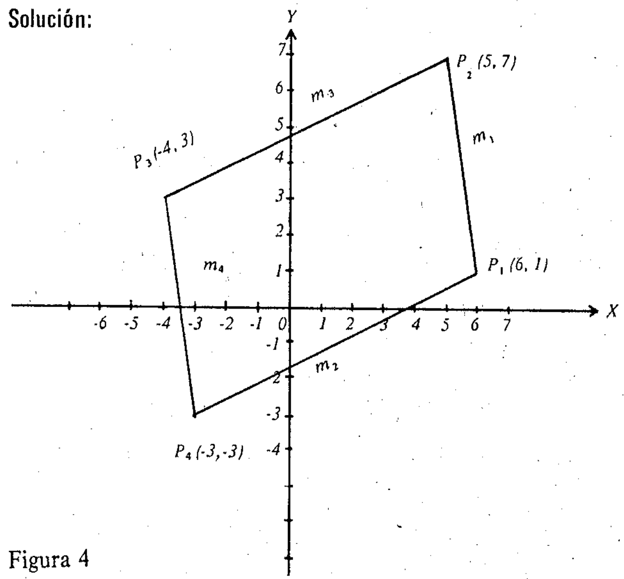


Figura 4

Primero encontramos las pendientes de los cuatro lados:

$$m_1 = \frac{7-1}{5-6} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$m_2 = \frac{1-(-3)}{6-(-3)} = \frac{1+3}{6+3} = \frac{4}{9}$$

$$m_3 = \frac{7-3}{5-(-4)} = \frac{7-3}{5+4} = \frac{4}{9}$$

$$m_4 = \frac{3-(-3)}{-4-(-3)} = \frac{3+3}{-4+3} = \frac{6}{-1} = -6$$

si $m_1 = m_4 \Rightarrow \overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_3P_4}$

y $m_2 = m_3 \Rightarrow \overline{P_2P_3} \parallel \overline{P_1P_4}$

Como sus lados opuestos son paralelos, se concluye que es un paralelogramo.

Ejemplo 2:

Demostrar que la recta l_1, que pasa por los puntos $P_1(-4,-5)$ y es paralela a la recta l_2, que pasa por los puntos $P_3\ (0,-10)$ y $P_4\,(7,3)$.

Solución:

La pendiente de la recta l_1 es:

$$m_1 = \frac{8-(-5)}{3-(-4)} = \frac{8+5}{3+4} = \frac{13}{7}$$

La pendiente de la recta l_2 es:

$$m_2 = \frac{3-(-10)}{7-0} = \frac{3+10}{7} = \frac{13}{7}$$

Como $m_1 = m_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

2.2 RECTAS PERPENDICULARES

La condición para que dos rectas sean perpendiculares es. . .

Las rectas l_1 con pendiente m_1 y l_2 con pendiente m_2 no verticales, son perpendiculares si, y sólo si, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. (Figura 5)

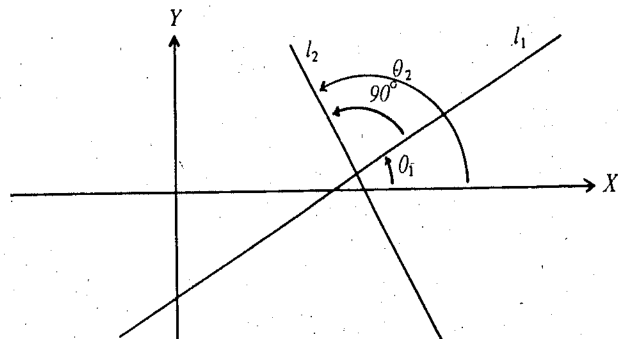


Figura 5

Demostración: Suponemos que l_1 y l_2 son perpendiculares (Figura 5) y que l_1 tiene inclinación Θ_1, y l_2 inclinación Θ_2.

Primero demostramos que si

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \text{ ó } m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ ó } m_1 m_2 = -1 \quad (4)$$

$l_1 \perp l_2$	Hipótesis.
$\Theta_2 = 90° + \Theta_1$	$l_1 \perp l_2$
$\tan \Theta_2 = \tan(90°+\Theta_1)$	Angulos iguales tienen tangentes iguales. $0° \leqslant \Theta \leqslant 180°$
$\tan \Theta_2 = -\cot \Theta_1$	Fórmulas de reducción.
$\tan \Theta_2 = -\dfrac{1}{\tan \Theta_1}$	$\cot \Theta_1 = \dfrac{1}{\tan \Theta_1}$
$m_1 = \tan \Theta_1$	Definición de pendiente.
$m_2 = \tan \Theta_2$	Definición de pendiente.
$m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$	Sustitución.

En seguida se demuestra que si $m_1 m_2 = -1$ ó $m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Rightarrow l_1 \perp l_2$ de la figura 5 tenemos que: $0° < \Theta_1 < 90°$ y $90° < \Theta_2 < 180°$

Esto implica que $\tan \Theta_2$ es negativa y $\tan\Theta_1$ es positiva.

Si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ entonces. . .

$m_1 m_2 = -1$	Hipótesis
$m_1 = \tan \Theta_1$	Definición de pendiente.
$m_2 = \tan \Theta_2$	Definición de pendiente.
$\tan \Theta_1 \,.\, \tan \Theta_2 = -1$	Sustitución.
$\tan \Theta_2 = -\dfrac{1}{\tan \Theta_1}$	Multiplicando ambos lados por $\dfrac{1}{\tan \Theta_1}$
$\tan \Theta_2 = -\cot \Theta_1$	$\cot \Theta_1 = \dfrac{1}{\tan \Theta_1}$
$\tan \Theta_2 = \tan(90°+\Theta_1)$	Fórmulas de reducción.
$\Theta_2 = 90° + \Theta_1$	Los ángulos son iguales si sus tangentes son iguales. $0° \leqslant \Theta \leqslant 180°$
$\Theta_2 - \Theta_1 = 90°$	Restando a ambos lados Θ_1.
$l_1 \perp l_2$	El ángulo entre ambas rectas es de $90°$.

Ejemplo 1:

Demostrar que la recta l_1 que pasa por los puntos $P_1(1,3)$ y $P_2(-3,-5)$ es perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos $P_3\ (3,2)$ y $P_4(-5,6)$.

Solución:

La pendiente de la recta l_1, es:

$$m_1 = \frac{3-(-5)}{1-(-3)} = \frac{3+5}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$$

La pendiente de la recta l_2 es:

$$m_2 = \frac{6-2}{-5-3} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Como m_2 es recíproca y de signo contrario de m_1, las dos rectas son perpendiculares.

Ejemplo 2:

Demostrar que los puntos $P_1(3,1)$, $P_2(-2,5)$ y $P_3\ (-10,-5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Trazar el triángulo.

Solución:

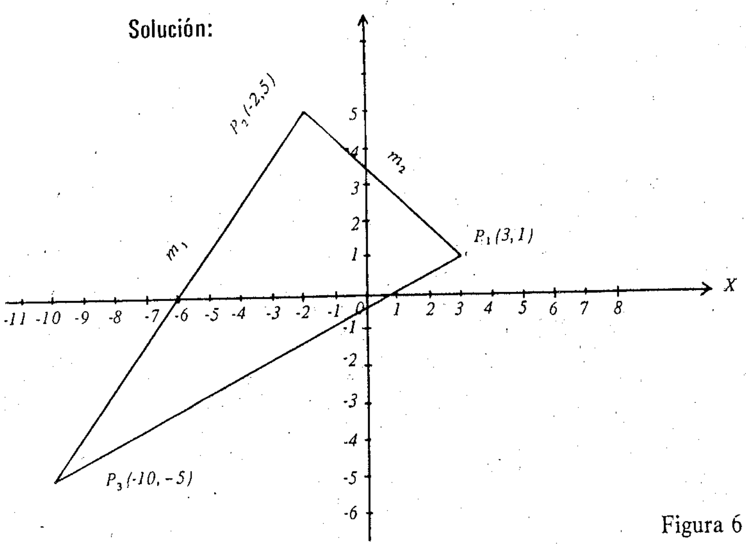


Figura 6

$$m_1 = \frac{5-(-5)}{-2-(-10)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad m_2 = \frac{5-1}{-2-3} = -\frac{4}{5}$$

Como m_2 es recíproca y de signo contrario de m_1, el lado $\overline{P_2P_3}$ es $\perp$ al lado $\overline{P_1P_2}$, por tanto, el triángulo es rectángulo.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(-3,-1)$, $P_2(3,2)$ y $P_3\ (7,4)$ quedan en línea recta.
2. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(3,5)$, $P_2(1,-1)$ y $P_3(-4,-16)$ quedan en línea recta.
3. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(6,5)$ y $D(1,3)$ son los vértices de un paralelogramo.
4. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $A(-6,0)$, $B(0,-6)$, $C(8,6)$ y $D(2,12)$ son los vértices de un paralelogramo.
5. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, demuestre que los puntos que se dan en el problema 3 son los vértices de un paralelogramo.
6. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(4,3)$, $P_2(6,-2)$ y $P_3(-11,-3)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.
7. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $A(6,-3)$, $B(7,6)$ y $C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
8. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(0,9)$, $P_2(3,1)$, $P_3(11,4)$ y $P_4(8,12)$ son los vértices de un rectángulo.
9. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, demuestre que los puntos que se dan en el problema 6 son los vértices de un triángulo rectángulo.
10. Demuestre que las diagonales del cuadrilátero que se dan en el problema 8 son iguales.

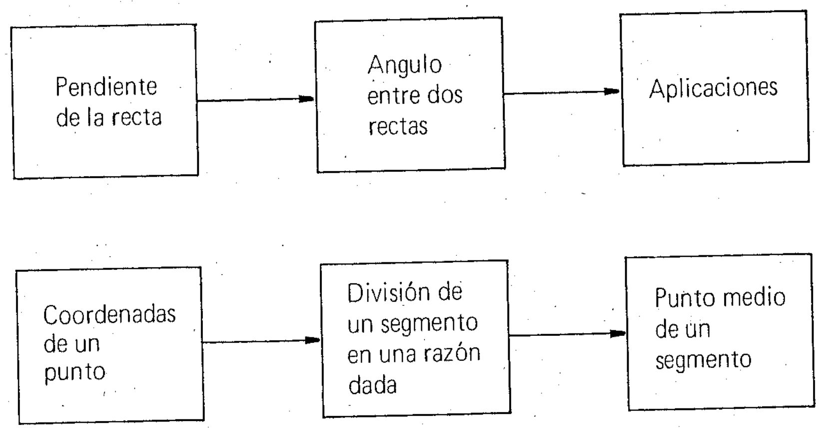
Módulo 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará el ángulo entre dos rectas conocidas sus pendientes.
2. Calculará la pendiente de una recta que se interseca con otra recta, dados el ángulo entre las dos rectas y la pendiente de la otra recta.
3. Encontrará los ángulos internos de figuras geométricas planas cuyos vértices se conocen.
4. Deducirá las expresiones que determinan las coordenadas de un punto que divide a un segmento de recta en una razón dada.
5. Encontrará las coordenadas de un punto que divide a un segmento de recta en una razón dada, conocidos dos puntos de esa recta.
6. Determinará las coordenadas del punto medio de un segmento de recta, dado por dos puntos.

ESQUEMA-RESUMEN



3.1 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Dos rectas que se intersecan forman un ángulo

Dos rectas que no se intersecan forman un ángulo de 0° y se les llama paralelas. En el caso de dos rectas no paralelas y que por tanto se intersecan en un punto, no encontramos el ángulo directamente sino que encontramos la tangente de dicho ángulo, y ya conociendo este valor, con ayuda de las tablas trigonométricas encontramos el valor del ángulo.

Sea l_1 una de las rectas y su inclinación Θ_1 y l_2 la otra recta con inclinación Θ_2. (Figura 7).

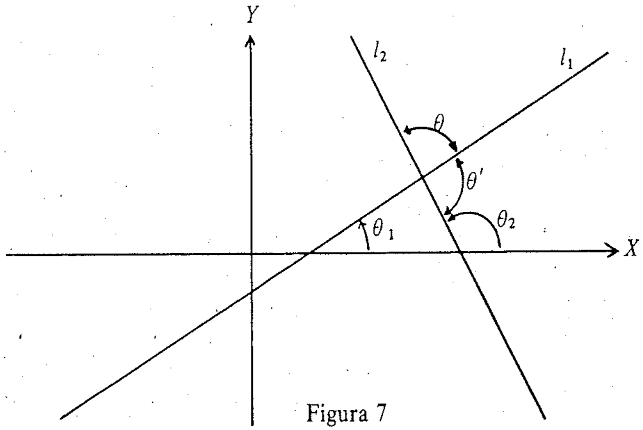


Figura 7

En este caso estamos considerando $\Theta_2 > \Theta_1$, así tenemos que $\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$. De la figura 7 podemos ver también que $\Theta + \Theta' = 180°$ por lo que nos basta encontrar Θ para conocer el valor de Θ que estará dado por $180° - \Theta$.

Para encontrar el valor de la tangente de Θ procedemos como sigue:

$\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$	Hipótesis.
$m_1 = tan\Theta_1$	Definición de pendiente.
$m_2 = tan\Theta_2$	Definición de pendiente.

$tan\Theta = tan(\Theta_2 - \Theta_1)$	Angulos iguales tienen tangentes iguales.
$tan\Theta = \dfrac{tan\Theta_2 - tan\Theta_1}{1 + tan\Theta_1\, tan\Theta_2}$	Valor de la tangente de la diferencia de dos ángulos.
$tan\Theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1\, m_2}$	Sustitución.

A esta fórmula se le conoce como fórmula de la tangente del ángulo comprendido entre dos rectas que se intersecan en función de sus pendientes.

Fórmula para hallar el ángulo entre dos rectas.

$$tan\Theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\, m_2} \qquad (5)$$

Conociendo el valor de la tangente, Θ estará dado por la fórmula:

$$\boxed{\Theta = arc\ tan\ \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\, m_2}} \qquad (6)$$

Es interesante observar que si el numerador $m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1$ la recta l_1 es paralela a l_2 y si el denominador $1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$ la recta l_1 es perpendicular a la recta l_2.

También es interesante observar que si en el numerador tomamos $m_1 - m_2$ en lugar de $m_2 - m_1$, entonces obtenemos la $tan\Theta'$.

Ejemplo 1:

Una recta con pendiente $m_1 = \frac{1}{2}$ intersecta a otra recta con pendiente $m_2 = 2$. Encontrar el ángulo Θ que se forma entre las dos rectas. (Figura 8)

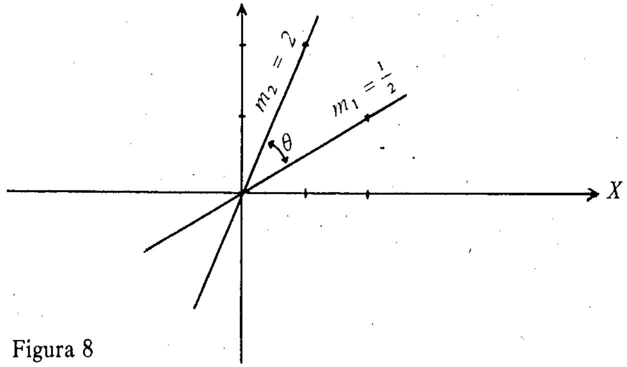


Figura 8

Solución:

Usando la fórmula (5) para encontrar la $tan\Theta$

$$tan\ \Theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\ m_2}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2}$$

$$= \frac{\frac{4-1}{2}}{1+1}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$tan\ \Theta = \frac{3}{4} \qquad \Theta = arc\ tan \frac{3}{4}$$

Si buscamos en las tablas de funciones trigonométricas en la columna de tangente, encontramos que para $\frac{3}{4} = .7500$ se lee un ángulo $\Theta = 36°52'$ y con el valor de Θ podemos encontrar Θ' que es igual a

$$180° - \Theta = 180° - 36°52' = 143°8'$$

Ejemplo 2:

El ángulo entre dos rectas es de $45°$ y la pendiente de una de ellas es 2. Encontrar la pendiente de la otra. Si hay dos soluciones posibles encontar ambas.

Solución:

Trazamos una recta por cualquier punto del plano con pendiente 2, y arbitrariamente a la pendiente la llamamos m_2; después trazamos otra recta de tal manera que forme un ángulo de $45°$ con la recta de pendiente 2 y a su pendiente la llamamos m_1 (Figura 9).

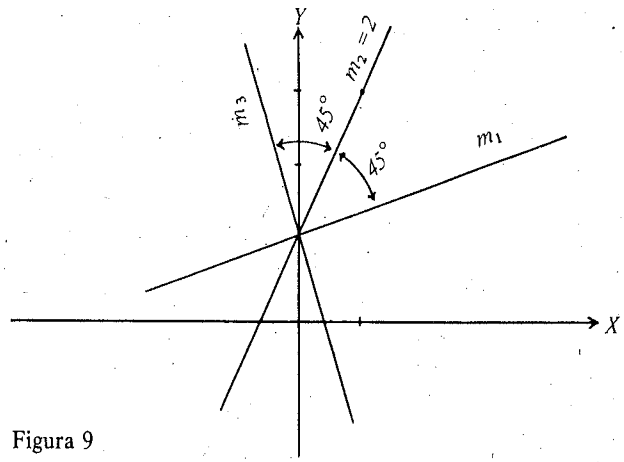


Figura 9

Con los datos de la figura 8 y usando la fórmula (5) tenemos que:

$$tan\ 45° = \frac{2 - m_1}{1 + m_1 \cdot 2}$$

pero como $tan\ 45° = 1$ tenemos:

$$1 = \frac{2 - m_1}{1 + 2m_1}$$

Resolviendo para m_1 esta ecuación se tiene que $m_1 = \frac{1}{3}$

De la figura 9 vemos que hay otra recta con pendiente m_3 que forma también un ángulo de 45° con la recta de pendiente 2; si usamos la fórmula (5) para este otro caso tenemos:

$$\tan 45^o = \frac{m_3 - 2}{1 + 2m_3}$$

$$1 = \frac{m_3 - 2}{1 + 2m_3}$$

resolviendo esta ecuación para m_3 se tiene $m_3 = -3$.

Independientemente de los subíndices que se usan en las pendientes de las dos rectas, cuando se usa la fórmula (5) para encontrar la tangente del ángulo que forman las dos rectas como m_2 se toma la pendiente de la recta que esta a la izquierda del ángulo y como m_1 la pendiente de la recta que está a la derecha del ángulo.

Ejemplo 3:

Encontrar los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(4,2)$ y $C(2,5)$. (Figura 10).

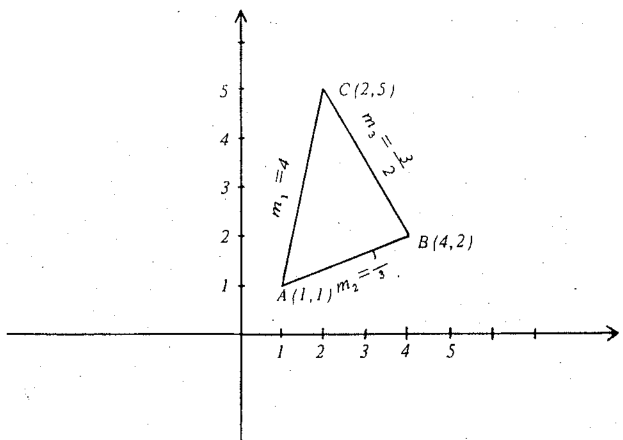


Figura 10

De la figura se tiene que las pendientes de los tres lados son:

$$m_1 = \frac{5-1}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$m_2 = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$m_3 = \frac{5-2}{2-4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Usando la fórmula (5) para encontrar cada uno de los 3 ángulos tenemos:

$$\tan A = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{3}}{1 + 4\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{11}{3}}{\frac{7}{3}}$$

$$= \frac{11}{7} = 1.571$$

$$A = \text{arc tan } 1.571 = 57^o 30'$$

$$\tan B = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{6}}$$

$$= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$= \frac{11}{3} = 3.666$$

$$B = arc\ tan\ 3.666 = 74°45'$$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°, el ángulo C se obtiene por diferencia, así

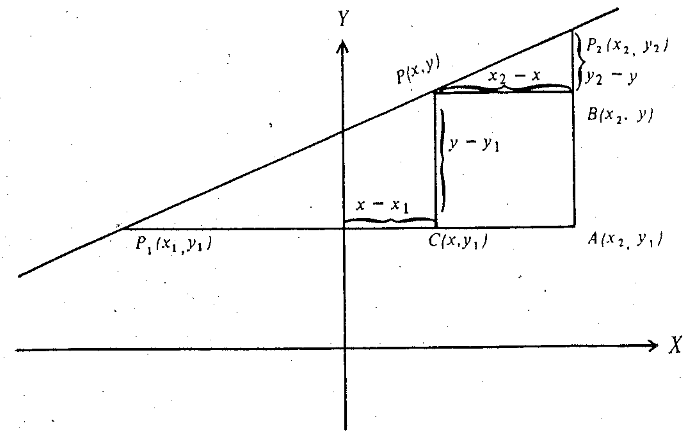
$$\begin{aligned} A + B + C &= 180 \\ C &= 180 - (A + B) \\ &= 180 - (57°30' + 74°45') \\ &= 180 - 132°15' \\ &= 47°45' \end{aligned}$$

3.2 DIVISION DE UN SEGMENTO DE RECTA EN UNA RAZON DADA.

¿A qué se le llama razón de división de un segmento?

Vamos a considerar un segmento de recta que está definido por dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$. Supongamos que un punto $P(x,y)$ se coloca sobre este segmento. No importa dónde se coloque el punto P se obtendrá una proporción que se conoce y que llamaremos γ. Si el punto P queda dentro del segmento P_1P_2 la razón γ será positiva, y si el punto P queda fuera del segmento P_1P_2 la razón γ será negativa.

Para obtener las coordenadas del punto P, procedemos como sigue: (Figura 11).



Se trazan dos segmentos de rectas paralelos a los ejes de coordenadas que pasen por los puntos P_1 y P_2 (figura 11); estos segmentos se intersecan formando un ángulo recto en el punto A y sus coordenadas son (x_2,y_1), por lo que el triángulo P_1AP_2 es un triángulo rectángulo.

Trazamos el segmento PB paralelo a P_1A y el segmento PC paralelo a P_2A; las coordenadas de B son (x_2,y) y las del punto C, (x,y_1).

Luego, los triángulos P_1CP y PBP_2 que se forman son semejantes, y haremos uso de este hecho para obtener las coordenadas del punto P.

Definimos γ de la siguiente manera:

$$\gamma = \frac{P_1P}{PP_2} \qquad (7)$$

Al definir γ es muy importante que consideremos la dirección de los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$.

Obtención de las coordenadas del punto de división de un segmento.

Haciendo uso de los dos triángulos semejantes que se formaron, obtenemos primero la abscisa x del punto P (ver figura 11).

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1C}}{\overline{PB}}$$

Sustituyendo $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ por γ, $\overline{P_1C}$ por $x-x_1$ y $\overline{PB}$ $x_2 - x$ tenemos:

$$\gamma = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $x_2 - x$ y efectuando, tenemos:

$$\gamma(x_2 - x) = x - x_1$$
$$\gamma x_2 - \gamma x = x - x_1$$

Sumando a ambos lados x_1 y γx se tiene:

$$\gamma x_2 + x_1 = \gamma x + x$$
$$= x(\gamma + 1)$$

Multipliquemos ambos lados por $\frac{1}{\gamma+1}$ se tiene:

$$\frac{\gamma x_2 + x_1}{\gamma + 1} = x$$

Usando la propiedad de simetría de la igualdad y la propiedad conmutativa para la suma, podemos escribir finalmente la fórmula para x como:

$$x = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma} \qquad (8)$$

que es el valor de la abscisa del punto P.

Para obtener y se usa la siguiente relación en los triángulos semejantes P_1CP y PBP_2:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BP_2}}$$

Sustituyendo $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ por γ, $\overline{CP}$ por $y-y_1$ y $\overline{BP_2}$ por y_2-y queda:

$$\gamma = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Fórmulas para la determinación de los valores de la absisa y la ordenada del punto de división.

De donde resolviendo para y se tiene que:

$$y = \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma} \qquad (9)$$

Que es el valor de la ordenada del punto P.

Ejemplo 1:

Dados los puntos $P_1(2,3)$ y $P_2(5,6)$, encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que está colocado a una distancia doble a P_1 que a P_2. (Figura 12).

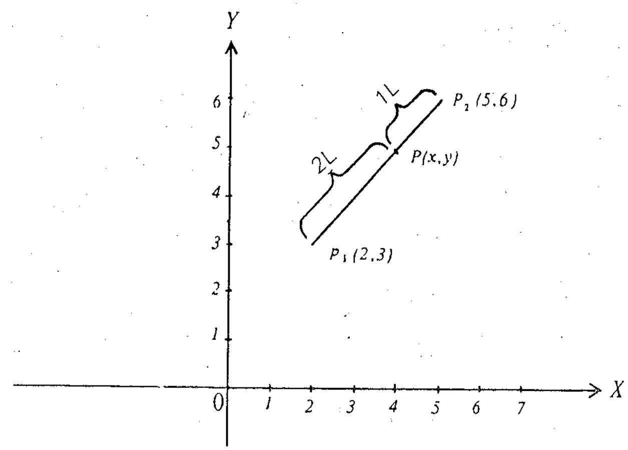


Figura 12

Solución:

Primero encontramos el valor de γ; como $P_1P=2PP_2$ entonces

$$\gamma = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{2L}{1L} = 2$$

Usando las fórmulas(8)y(9)tenemos:

$$x = \frac{2 + 2(5)}{1 + 2} = \frac{2 + 10}{3} = 4$$

$$y = \frac{3 + 2(6)}{1 + 2} = \frac{3 + 12}{3} = 5$$

Ejemplo 2:

Dados los puntos $P_1(-3,5)$ y $P(2,-4)$, encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que está colocado a una distancia que es el triple a P_2 que a P_1.(Figura 13).

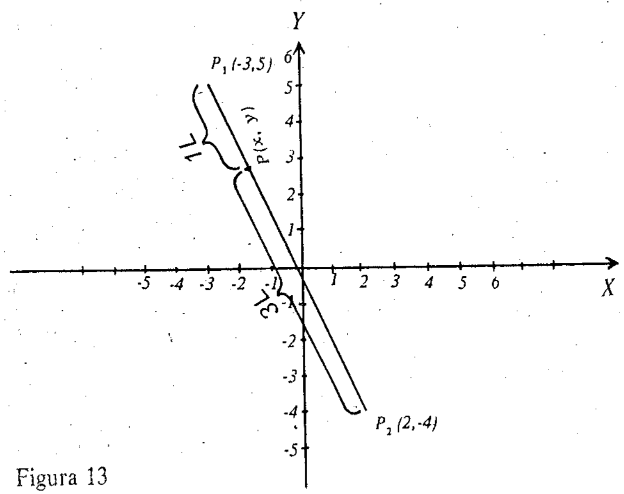


Figura 13

Solución:

$$\gamma = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{1L}{3L}$$

$$x = \frac{-3 + \frac{1}{3}(2)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-3 + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{7}{4}$$

$$y = \frac{5 + \frac{1}{3}(-4)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{11}{4}$$

Ejemplo 3:

Dados los puntos $P_1(1,4)$ y $P_2(6,6)$, encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que está colocado fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$ y que está a una distancia tres veces mayor a P_1 que a P_2.

Solución:

$$\gamma = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{3L}{-L}$$

Aquí debe observarse que el sentido de la distancia $\overline{P_1P}$ se considera positivo, mientras que el de la distancia de P a P_2 se considera negativo. (Ver figura 14).

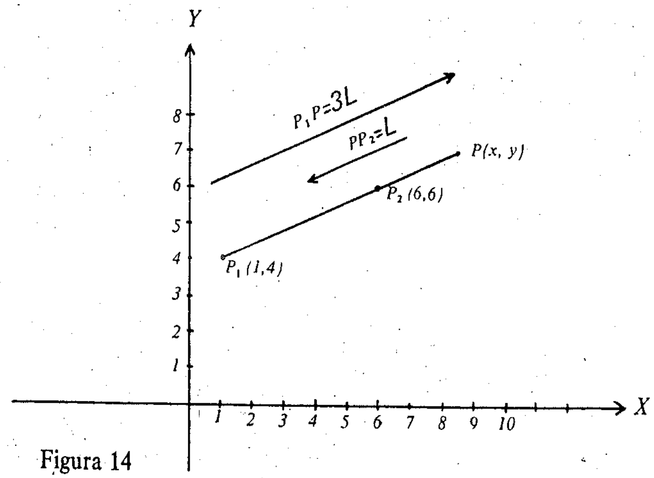


Figura 14

$$x = \frac{1 + (-3)6}{1 + (-3)} = \frac{1 - 18}{1 - 3} = \frac{-17}{-2} = \frac{17}{2}$$

$$y = \frac{4 + (-3)6}{1 + (-3)} = \frac{4 - 18}{1 - 3} = \frac{-14}{-2} = 7$$

Ejemplo 4:

Dados los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que equidista de los puntos P_1 y P_2. (Figura 15).

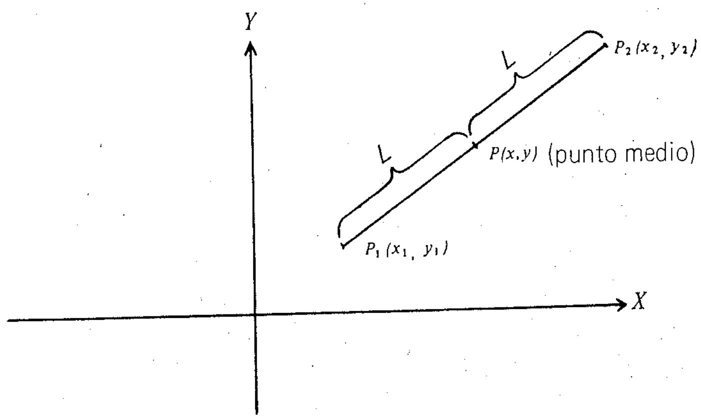


Figura 15

Solución:

¿Cómo se determina el punto medio de un segmento?

Como $\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$ se tiene que $\gamma = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = 1$, entonces,

$$x = \frac{x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{10}$$

$$y = \frac{y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{11}$$

A las fórmulas (10) y (11) se les llama *fórmulas para las coordenadas del punto medio de un segmento.*

Ejemplo 5:

Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $P_1(3,5)$ y $P_2(7,7)$.

Solución:

$$x = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Ejemplo 6:

Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $P_1(-3,5)$ y $P_2(5,-4)$.

Solución:

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{5+(-4)}{2} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 7:

Uno de los extremos de un segmento es $P_1(-3,-4)$ y su punto medio es $P(2,3)$. Encontrar las coordenadas del otro extremo.

Solución:

En este caso se conocen las coordenadas de un extremo del segmento y su punto medio, por lo que podemos usar las fórmulas (10) y (11) para encontrar el otro extremo que llamaremos $P_2(x_2,y_2)$.

Sustituyendo en (10) tenemos:

$$2 = \frac{-3 + x_2}{2}$$

Multiplicando por 2 ambos lados se tiene:

$$4 = -3 + x_2$$

Sumándole 3 a ambos lados:

$$7 = x_2 \Rightarrow x_2 = 7$$

Sustituyendo en (11) tenemos:

$$-4 = \frac{3 + y_2}{2}$$

Multiplicando por 2 ambos lados:

$$-8 = 3 + y_2$$

restándole 3 a ambos lados:

$$-11 = y_2 \Rightarrow y_2 = -11$$

El otro extremo del segmento es $P_2(7,-11)$.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Cada uno de los siguientes pares de números son las pendientes de dos rectas. En cada caso encuentre el ángulo que forman:

   a) $2,5$ b) $2,-3$ c) $-\frac{1}{5}, \frac{3}{2}$

2. El ángulo entre dos rectas de 45^0 y la pendiente de una de ellas es 3. Encuentre la pendiente de la otra. Si existen dos soluciones encuentre ambas.
3. La pendiente de una recta es $-\frac{1}{2}$ y la inclinación de la otra es 60^0

   Encuentre el valor del ángulo agudo entre ellas.

4. Las pendientes de dos rectas son $-\frac{7}{4}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente: halle la pendiente de la bisectriz del ángulo que forman.
5. Encuentre los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(3,1)$, $B(-3,-2)$ y $C(-4,4)$.
6. Encuentre los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(-6,4)$, $B(-4,-6)$ y $C(2,-8)$.

7. Los vértices de un paralelogramo son $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(6,5)$ y $D(1,3)$. Encuentre los ángulos internos.
8. Los extremos de un segmento son $P_1(-2,3)$ y $P_2(5,-2)$. Encuentre las coordenadas de su punto medio.
9. Los extremos de un segmento son $P_1(-4,-6)$ y $P_2(8,10)$. Encuentre las coordenadas de su punto medio.
10. Si el punto $P(x,y)$ está a una distancia 4 veces mayor a $P_1(5,3)$ que a $P_2(-6,-10)$ y queda entre P_2 y P_2. Encuentre las coordenadas de P.
11. Si $P_1(-3,-4)$ y $P_2(2,1)$ y $\overline{P_1 P_2}$ se prolonga hasta P de tal manera que la longitud de $\overline{P_1 P}$ sea tres veces la longitud de $\overline{P_1 P_2}$. Encuentre las coordenadas de P.
12. Si el punto medio de un segmento es $P(6,3)$ y un extremo del segmento es $P_1(-4,-7)$. ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo?
13. Un punto $P(7,2)$ está entre $P_1(3,-2)$ y $P_2(9,4)$. ¿En qué proporción (γ) divide al segmento $\overline{P_1 P_2}$?
14. Demuestre analíticamente que las coordenadas del centro de gravedad del triángulo cuyos vértices son (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son

    $$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \text{ y } y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

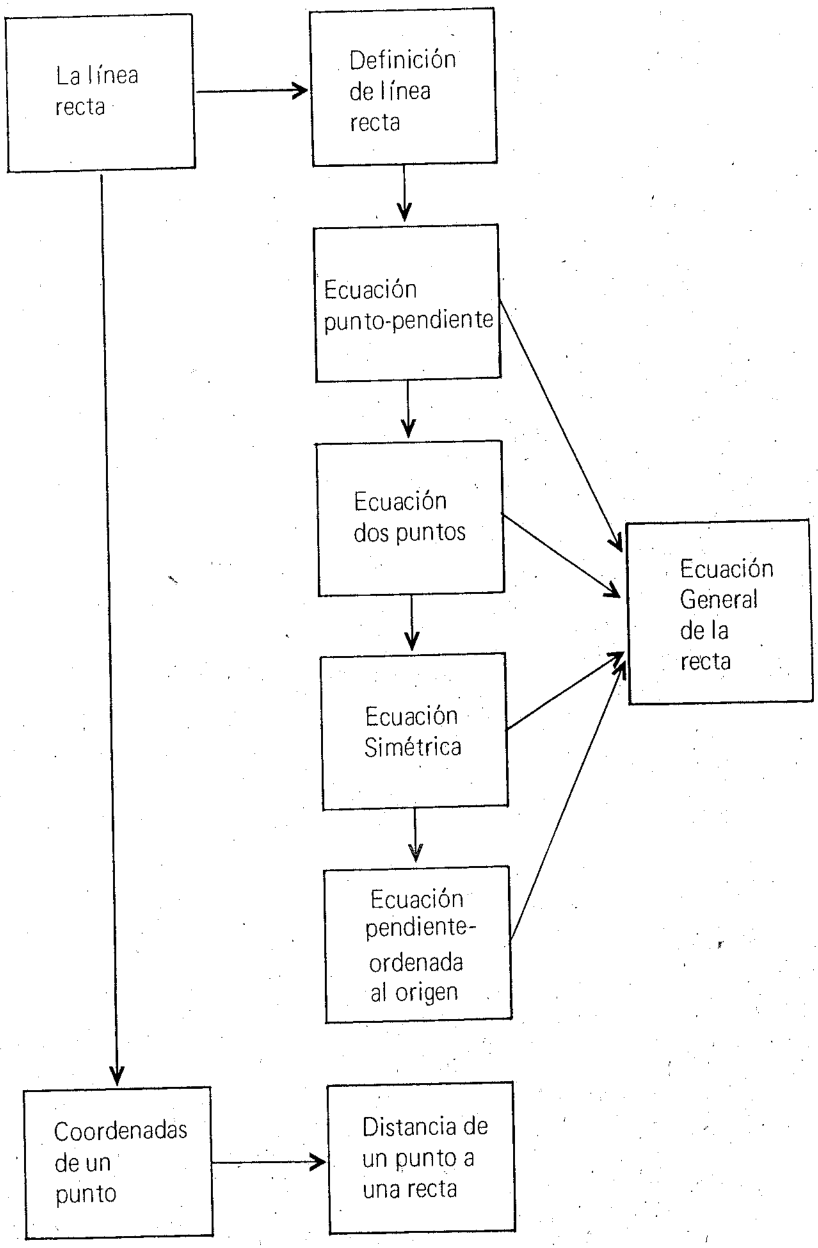
15. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero $A(3,0)$, $B(7,8)$, $C(5,-9)$ y $D(0,-4)$, se bisectan mutuamente.
16. Dos de los vértices de un triángulo son $A(0,-4)$ y $B(6,0)$ y las medianas se intersecan en $(2,0)$. Encuentre las coordenadas del tercer vértice del triángulo.
17. Los vértices de un triángulo rectángulo son $A(2,-1)$, $B(6,1)$ y $C(-2,7)$. Demuestre que el punto de la hipotenusa equidista de los 3 vértices.

Módulo 4

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Encontrará la ecuación de una recta dadas su pendiente y las coordenadas de un punto de la misma.
2. Determinará la ecuación de una recta, dadas las coordenadas de dos puntos de la misma.
3. Determinará la ecuación de una recta conocidos sus puntos de intersección con los ejes coordenados.
4. Determinará la ecuación de una recta dadas su pendiente y su intersección con el eje Y.
5. Deducirá la ecuación general de la recta.



4.1. DEFINICION DE LINEA RECTA

En la Unidad IX, estudió la *función lineal* y aprendió que la gráfica de toda función lineal es una recta; en esta lección estudiará las diferentes formas de la ecuación de una línea recta.

Las tres definiciones siguientes le serán útiles en el estudio de la ecuación de la línea recta así como en el estudio de otras curvas que verá en temas posteriores.

Definición: *Lugar geométrico es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen ciertas condiciones.*

Definición: *Ecuación de un lugar geométrico es cualquier ecuación que es satisfecha por las coordenadas de cada uno de los puntos del lugar geométrico y solamente por ellos.*

Definición: *Gráfica de un lugar geométrico es la representación geométrica del conjunto de puntos que forman el lugar geométrico.*

Los casos particulares de rctas paralelas al eje X o al eje Y, los estudió en el módulo 1 de la Unidad IX por lo que aquí estudiaremos el caso general de una recta que no es paralela a ninguno de los ejes.

¿Que es una línea recta?

> *Definición:* Llámase línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.

4.2 ECUACION PUNTO-PENDIENTE.

Sea L una recta no paralela a ninguno de los ejes y que pasa por el punto $P_1(x_1\ y_1)$ con pendiente m. (Figura 16).

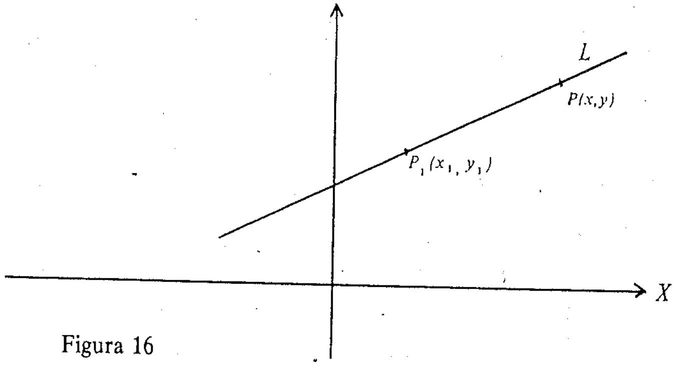


Figura 16

Supongamos un punto $P(x,y)$ cualquiera diferente de P_1, entonces P pertenece a L si, y sólo si, la pendiente de P_1 a P es m. Luego si obtenemos m usando las coordenadas de los dos puntos tenemos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

y como L no es paralela al eje Y por suposición, $x \neq x_1$, por lo que, para todo $P(x,y)$ diferente de $P_1(x_1,y_1)$ la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)} \qquad (12)$$

Obtención de la ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente.

A esta ecuación se le conoce como *ecuación punto – pendiente*, ya que se conoce un punto por donde pasa la recta y su pendiente.

De la ecuación vemos que el punto $P_1(x_1,y_1)$ satisface la ecuación, y que cualquier punto que no esté sobre la recta no lo satisface.

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5,2)$ con pendiente igual a 3

Se conocen $x_1 = 5$, $y_1 = 2$ y $m = 3$

sustituyendo estos valores en la ecuación (12) tenemos:

$$y - 2 = 3(x - 5)$$

Efectuando:

$$y - 2 = 3x - 15$$
$$-3x + y + 13 = 0$$

$-3x + y + 13 = 0$ es la ecuación de la recta que pasa por $P(5,2)$ con pendiente 3.

Ejemplo 2:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(-3,5)$ con pendiente igual a $-\frac{4}{3}$ se tiene $x_1 = -3$, $y_1 = 5$ y $m = -\frac{4}{3}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (12) tenemos:

$$y - 5 = -\frac{4}{3}(x + 3)$$

$$3y - 15 = -4x - 12$$

$$4x + 3y - 3 = 0$$

Luego, la ecuación pedida es $4x + 3y - 3 = 0$

Ejemplo 3:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(2,4)$ y $P_2(-3,-6)$.

Como no conocemos la pendiente de la recta es necesario encontrarla usando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ luego:

$$m = \frac{-6-4}{-3-2} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$= 2$, $y_1 = 4$ y $m = 2$ en la ecuación (12) tenemos:

$$y - 4 = 2(x - 2)$$
$$y - 4 = 2x - 4$$
$$-2x + y = 0$$

Para encontrar la ecuación de la recta también podíamos haber sustituido los valores $x_2 = -3$, $y_2 = -6$ y $m = 2$.

Haciéndolo así, tenemos:

$$y - (-6) = 2[\ x - (-3)]$$
$$y + 6 = 2(x + 3)$$
$$y + 6 = 2x + 6$$
$$-2x + y = 0$$

Como se puede ver, la ecuación a que se llega es la misma, por lo que podemos tomar las coordenadas de los puntos P_1 ó P_2 para sustituir en la ecuación de la recta quedándonos la misma ecuación.

4.3 ECUACION DOS PUNTOS

Si se conocen dos puntos de la recta ¿Cuál es su ecuación? ;

En general si se conocen dos puntos por donde pasa la recta, siendo estos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ podemos escribir la ecuación de la recta como:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (13)$$

ó

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (14)$$

A estas ecuaciones que son equivalentes se les llama *ecuación dos puntos* y podemos también escribirlas como:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

ó

$$\boxed{y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)}$$

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(-4, 7)$ y $P_2(3, -8)$.

Se tiene $x_1 = -4$, $y_1 = 7$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -8$

Sustituímos estos valores en la ecuación (13) ó (14); lo hacemos en la (13) y tenemos

$$\frac{y - 7}{x - (-4)} = \frac{-8 - 7}{3 - (-4)}$$

$$\frac{y - 7}{x + 4} = \frac{-15}{3 + 4}$$

$$\frac{y - 7}{x + 4} = \frac{-15}{7}$$

$$7(y - 7) = -15(x + 4)$$

$$7y - 49 = -15x - 60$$

$$15x + 7y + 11 = 0$$

Sustituya los valores de x_1, y_1, x_2, y_2 en la ecuación (14) y obtendrá la misma ecuación.

4.4 ECUACION SIMETRICA

Si conocemos las intersecciones de una recta con los ejes coordenados también podremos determinar su ecuación.

Usando la ecuación (13) ó (14). podemos llegar a una forma muy útil de la ecuación de la recta. Si la recta no es paralela a ninguno de los ejes, interseca a los ejes en un punto. Si $(a, 0)$ es la intersección con el eje X y $(0, b)$ la intersección con el eje Y, entonces conocemos dos puntos por donde pasa la recta y podemos encontrar su ecuación sustituyendo los valores de las coordenadas de los puntos en la ecuación (13) ó (14),

Consideramos al punto $(a, 0)$ como P_1 y a $(0, b)$ como P_2 y sustituímos en la ecuación (13)

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}$$

$$\frac{y}{x-a}=-\frac{b}{a}$$

$$ay = -b(x-a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab}$$

$$\boxed{\frac{y}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (15)$$

A la ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ se le llama *ecuación intersecciones con los ejes ó forma simétrica.*

Esta ecuación no se puede usar si la recta pasa por el origen $(0,0)$. ¿Por qué?

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la recta que intersecta al eje X en $(5,0)$ y al eje Y en $(0,-6)$.

Se tiene $a = 5$ y $b = -6$, sustituyendo estos valores en la ecuación (15), tenemos:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-6}=1$$

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$$

$$6x - 5y = 30$$

$$6x - 5y - 30 = 0$$

4.5 ECUACION PENDIENTE – ORDENADA AL ORIGEN

Ecuación de la recta conocidas m y b

Si conocemos la intersección con el eje Y, $(0,b)$ y conocemos la pendiente (m) de la recta, usando la ecuación (12), tenemos:

$$y - b = m(x-0)$$
$$y - b = m\,x$$
$$y = mx + b \qquad (16)$$

a la ecuación $y = mx + b$ se le conoce como *pendiente-ordenada al origen.*

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la recta que interseca al eje Y en $(0,4)$ con pendiente -3.

$m = -3$ y $b = 4$, sustituyendo estos valores en (16) tenemos:

$$y = -3x + 4$$
ó
$$3x + y - 4 = 0$$

4.6 ECUACION GENERAL DE LA RECTA

Para terminar el estudio de la ecuación de la línea recta vamos a considerar la ecuación lineal o ecuación de primer grado en x,y de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no sean ambas cero y probar que toda ecuación de esta forma es el lugar geométrico de una recta.

1. Si $B = 0$, A no puede ser cero por definición, por lo que la ecuación se puede escribir como:

$$Ax + C = 0$$

nos:

$$x = -\frac{C}{A}$$

¿Cuál es la forma general de la recta?

que es la ecuación de una recta paralela al eje Y e inter sectando al eje X en $(-\frac{C}{A},\ 0)$

2. Si $B \neq 0$, tenemos:

$$Ax + By + C = 0$$

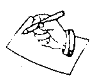
Resolviendo para y se tiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Si comparamos esta ecuación con la ecuación (16), vemos que representa una recta con $m = -\frac{A}{B}$ e intersección con el eje Y igual a $-\frac{C}{B}$

En ambos casos hemos encontrado que la ecuación $Ax + By + C = 0$ representa la ecuación de una recta.

A la ecuación $Ax + By + C = 0$ se le conoce como *forma general de la recta.*



Ejemplo 1:

Una recta pasa por $P_1(1,3)$ y $P_2(-2,-5)$. Encontrar la ecuación de la recta y escribirla en todas las formas que se han estudiado en esta lección.

Usando la ecuación (13), tenemos:

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{-5-3}{-2-1}$$

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{-8}{-3}$$

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{8}{3} \qquad \text{(Ecuación dos puntos)}$$

$$y - 3 = \frac{8}{3}(x-1) \qquad \text{(Ecuación punto - pendiente)}$$

$$3(y-3) = 8(x-1)$$

$$3y - 9 = 8x - 8$$

$$-8x + 3y - 1 = 0 \qquad \text{(Ecuación forma general)}$$

$$-8x + 3y = 1$$

$$\frac{-x}{3} + \frac{y}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{\frac{x}{3}}{-\frac{1}{24}} + \frac{\frac{y}{8}}{\frac{1}{24}} = 1 \qquad \text{(Ecuación forma simétrica)}$$

Resolviendo para y de la forma general se tiene:

$$y = \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{(Ecuación pendiente - ordenada al origen).}$$

Ejemplo 2:

Encontrar la pendiente y las intersecciones con los ejes de la recta cuya ecuación es $4x - 3y = 24$.

Resolviendo para y la ecuación, tenemos:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{24}{3}$$

Luego $m = \frac{4}{3}$

Para obtener la forma simétrica de la ecuación dividimos ambos miembros entre 24

$$\frac{4x}{24} - \frac{3y}{24} = \frac{24}{24}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{4}{-8} = 1$$

luego $a = 6, \quad b = -8$

4.7 DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PUNTO.

¿A qué llamamos distancia de un punto a una recta?

Uno de los conceptos de gran utilidad cuando se trabaja con puntos y rectas y las relaciones entre ellos, es la *distancia de una recta a un punto,* distancia que consideraremos siempre como la mínima, es decir la distancia medida sobre la perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto dado.

El primer caso que consideraremos es la distancia de una recta paralela al eje Y al punto $P_1(x_1, y_1)$; si la ecuación de la recta es $x = c$ y las coordenadas del punto son (x_1, y_1) la distancia de la recta al punto es $|x_1 - c|$ ya sea que el punto esté a la derecha o a la izquierda de la recta. (Figura 17).

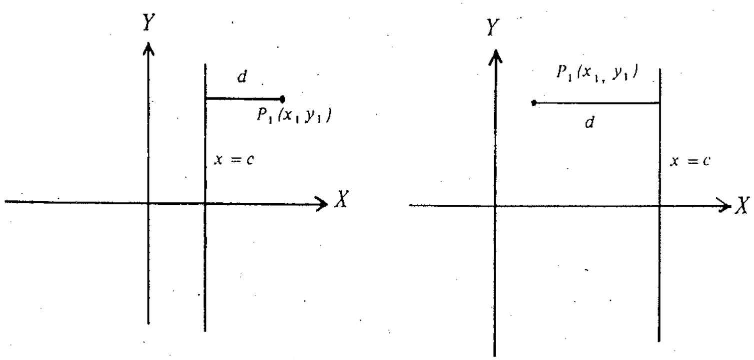


Figura 17

El segundo caso que consideramos es el de la distancia de una recta con ecuación $y = mx + b$ al origen.

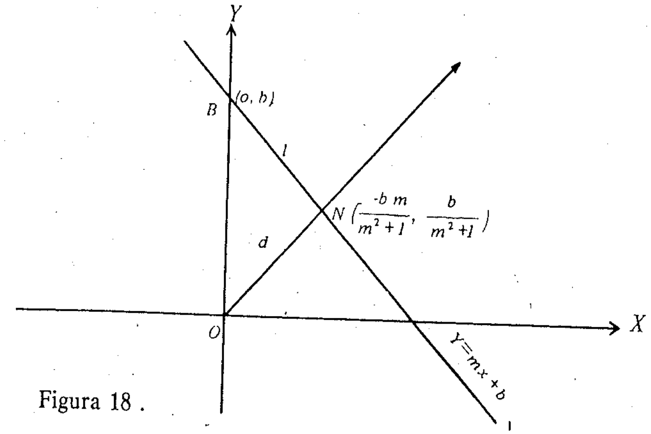


Figura 18 .

Tracemos por 0 una perpendicular a la recta 1, y sea N el punto de intersección. Puesto que $O\,N$ es perpendicular a 1 y pasa por el punto $(0,0)$, su ecuación es:

$$y = -\frac{1}{m}x$$

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones

$y = mx + b$ y $y = -\dfrac{1}{m}x$, las coordenadas del punto N son:

$$x = \frac{-bm}{m^2 + 1}, \quad y = \frac{b}{m^2 + 1}$$

Obtención de la fórmula de la distancia.

Para encontrar la distancia entre N y O usamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (Unidad XIII), luego:

$$N\,0 = \sqrt{\left(\frac{-bm}{m^2 + 1} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{m^2 + 1} - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2\,m^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{b^2}{(m^2 + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2\ m^2 + b^2}{(m^2 + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{(m^2 + 1)}}$$

$$= \frac{\pm b}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

La distancia de la recta l al punto 0 es la *distancia dirigida* * $N\,0$. De la figura se ve que el signo de $N\,0$ es opuesto al signo de $b(b = 0\,B)$. Considerando esto tenemos que:

$$N\,0 = d = \frac{-b}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

¿Qué es una recta dirigida?

El tercer caso que consideramos es el de la distancia de una recta cuya ecuación es $y = mx + b$ a un punto $P_1(x_1, y_1)$. (Figura 19).

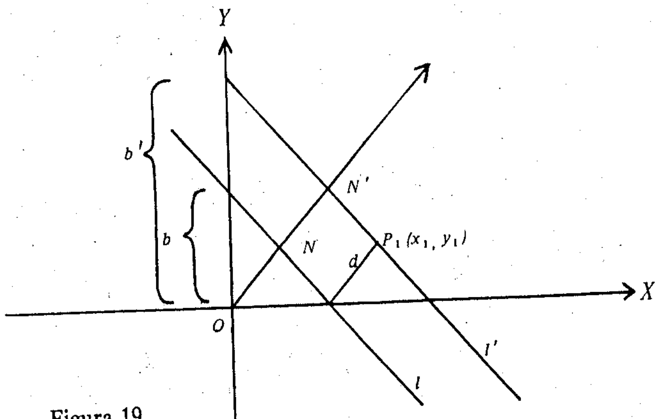


Figura 19

*Una recta está dirigida si la distancia en un sentido es positiva, y en sentido contrario es negativa.

Por el punto $P_1(x_1, y_1)$ trazamos una recta l' paralela a l, por 0 una recta perpendicular a l y por lo tanto perpendicular a l'; sean N y N' los puntos de intersección con l y l' respectivamente.

Dado que l' es paralela a l, su ecuación es:

$$y = mx + b'$$

Interpretación del signo de la distancia.

y puesto que l' pasa por $P_1(x_1, y_1)$, su ecuación la podemos escribir como:

$$y_1 = mx_1 + b'$$

ó

$$b' = y_1 - mx_1$$

La distancia d, desde l hasta P_1 es igual a $N\,N'$ y esta distancia es *positiva* si P_1 queda arriba de l, y *negativa* si P_1 queda *abajo* de l. Como 0, N y N' son puntos sobre una recta dirigida, en todos los casos tendremos que:

$$d = N\,N' = N\,0 + 0\,N'$$

$$= N\,0 - N'\,0^*$$

pero $$N\,0 = \frac{-b}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

y $$N'\,0 = \frac{-b'}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Sustituyendo estos valores en d, tenemos

$$d = N\,N' = \frac{-b}{\sqrt{m^2 + 1}} - \frac{-b'}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$= \frac{-b + b'}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

* $0\,N' = -N'\,0$ por ser rectas dirigidas.

$$= \frac{b' - b}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

pero $b' = y_1 - mx_1$, entonces:

$$\boxed{d = NN' = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}}} \qquad (17)$$

A esta expresión se le conoce como ***fórmula de la distancia de una recta a un punto.***

Ejemplo 1:

Encontrar la distancia de la recta $2x - 3y + 6 = 0$ al punto $P_1(5,3)$.

Primero resolvemos para y para que la ecuación quede de la forma $y = mx + b$, así:

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

De los datos tenemos que $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $m = \frac{2}{3}$ y $b = 2$;

sustituimos estos valores en la fórmula (17) quedando:

$$d = \frac{3 - (\frac{2}{3})(5) - 2}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{3 - \frac{10}{3} - 2}{\sqrt{\frac{4}{9} + 1}}$$

$$= \frac{\frac{9 - 10 - 6}{3}}{\frac{\sqrt{4 + 9}}{3}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{13}}$$

Por el signo de d sabemos que el punto $P_1(5,3)$ queda debajo de la recta.

Ejemplo 2:

Encontrar la distancia de la recta $y = -4x - 27$ al punto $P_1(-6,3)$.

De los datos tenemos que $x_1 = -6$, $y_1 = 3$, $m = -4$ y $b = -27$. Sustituímos estos valores en la fórmula (17) y nos queda:

$$d = \frac{3 - (-4)(-6) - (-27)}{\sqrt{(-4)^2 + 1}}$$

$$= \frac{3 - 24 + 27}{\sqrt{16 + 1}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{17}}$$

En este ejemplo el punto queda arriba de la recta por ser d positiva.

Cuando la ecuación de la recta es de la forma $Ax + By + C = 0$, la distancia de la recta al punto $P_1(x_1, y_1)$ está dada por:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad (18)$$

Dado que el numerador es un valor absoluto, esta fórmula considera la distancia siempre positiva.

Encontrar la distancia de la recta $3x + 4y + 5 = 0$ al punto $P_1(1,4)$; sustituyendo en la fórmula (18) tenemos:

$$d = \frac{|3(1) + 4(4) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|3 + 16 + 5|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$= \frac{|24|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{24}{5}$$

Ejemplo 4:

Encontrar la distancia de la recta $2x - 3y - 4 = 0$ al punto $P_1(-4,2)$.

Sustituyendo en la fórmula (18) tenemos

$$d = \frac{|2(-4) - 3(2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{|-8 - 6 - 4|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$= \frac{|-18|}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{18}{\sqrt{13}}$$

Ejemplo 5:

Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son $A(2,1)$, $B(8,3)$ y $C(4,9)$ Ver figura 20.

El área de un triángulo está dada por la fórmula:

$$Area = \frac{1}{2}(base)\ (altura)$$

Entonces, se puede tomar cualquier lado como base y se traza una recta perpendicular desde ese lado, al vértice opuesto que nos representa la altura (h). En este ejemplo tomamos como base el lado AB y h es la altura, por lo que:

$$Area = \frac{1}{2}(\overline{AB})\ h$$

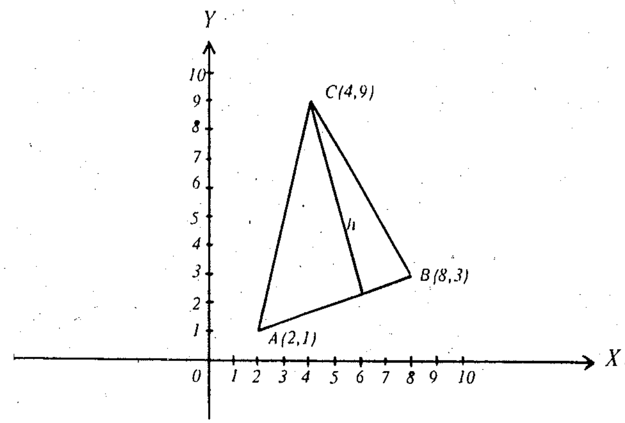


Figura 20

Para encontrar la altura h se necesita la ecuación del lado AB, la que obtenemos por medio de los puntos A y B.

$$\frac{y - 1}{x - 2} = \frac{3 - 1}{8 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$3y - 3 = x - 2$$

$$-x + 3y - 1 = 0$$

Usando la fórmula (18) de la distancia de una recta a un punto, tenemos:

$$h = \frac{|-4 + 3(9) - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{|-4 + 27 - 1|}{\sqrt{1 + 9}}$$

$$= \frac{|22|}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{22}{\sqrt{10}}$$

Para obtener la longitud $\overline{AB}$, usamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, quedando:

$$\overline{AB} = \sqrt{(8-2)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4}$$

$$= \sqrt{40}$$

$$= 2\sqrt{10}$$

Luego, el área del triángulo es:

$$Area = \frac{1}{2}(2\sqrt{10})\left(\frac{22}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= 22$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los problemas del 1 a 18, escriba las ecuaciones de las rectas determinadas por las siguientes condiciones:

1. Pasa por $(-4,5)$ y $(7,9)$.
2. Pasa por $(3,0)$ y $(6,-4)$.
3. Pasa por $(0,8)$ y $(-4,-5)$.
4. Pasa por $(1,3)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.
5. Pasa por $(-5,-3)$ y tiene pendiente $-\frac{4}{3}$.
6. Pasa por $(0,0)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$.
7. $a = 4$ y $b = 5$.
8. Pasa por $(0,5)$ y tiene inclinación de 45°.
9. Pasa por $(-3,2)$ y tiene inclinación de 135°.
10. Pasa por $(4,4)$ y es paralela al eje X.
11. Pasa por $(-3,6)$ y es paralela al eje Y.
12. Es paralela al eje Y y está 5 unidades a la izquierda de él.
13. Su intersección con el eje X es 6 y su inclinación es de 60°.
14. Su ordenada al origen es 4 y su inclinación es de 45°.
15. Pasa por $(2,5)$ y se eleva 3 unidades por cada unidad que se incrementa la x.
16. Pasa por $(-3,2)$ y desciende 2 unidades por cada unidad que se incrementa la x.
17. Pasa por $(3,7)$ y es paralela a la recta con ecuación $2x - 3y + 4 = 0$.
18. Pasa por $(-1,-6)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x - 5y + 6 = 0$.
19. Demuestre que la recta que pasa por los puntos $(5,-4)$ y $(-2,7)$ es perpendicular y bisecta al segmento de recta determinado por los puntos $(-4,-2)$ y $(7,5)$.
20. Encuentre las ecuaciones de los lados del triángulo cuyos vértices son $A(-3,2)$, $B(5,6)$ y $C(1,-4)$.

En los problemas del 21 al 28 encuentre la distancia de la recta dada al punto dado y diga sin trazar la recta y el punto, si el punto está arriba o debajo de la recta.

21. $P(5$
22. $P(-1,3);\ x + y - 4 = 0.$
23. $P(2,-4);\ 2x + 3y - 6 = 0.$
24. $P(-5,8);\ x + 2y + 5 = 0.$
25. $P(3,1);\ x - y = 0.$
26. $P(4,0);\ x + y = 0.$
27. $P(0,0);\ 3x + 2y - 12 = 0.$
28. $P(0,3);\ x - 3y + 3 = 0.$
29. Encuentre la altura correspondiente al lado $B\,C$ del triángulo cuyos vértices son $A(1,-2)$, $B(7,0)$ y $C(3,3)$.
30. Determine el área del triángulo cuyos vértices son $A(-4,-4)$, $B(6,-6)$ $C(0,3)$.

Paneles de verificación

MODULO 1 – VALIDACION

1. $m = 3\ ;\ \Theta = 71^\circ\ 33'$
2. $m = -\dfrac{8}{3};\ \Theta = 180^\circ - 69^\circ\ 30' = 110^\circ\ 30'$
3. $m = \dfrac{4}{3};\ \Theta = 53^\circ\ 6'$
4. $m = -\dfrac{1}{3};\ \Theta = 180^\circ - 18^\circ\ 26' = 161^\circ\ 34'$
5. $m = -\dfrac{5}{7};\ \Theta = 180^\circ - 35^\circ\ 30' = 144^\circ\ 30'$
6. $m = \dfrac{1}{9};\ \Theta = 6^\circ\ 22'$
7. $m = -1\ ;\ \Theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
8. $m = 0\ ;\ \Theta = 0^\circ$
9. m no definida; $\Theta = 90^\circ$
10. $m = 1\ ;\ \Theta = 45^\circ$

MODULO 2 – VALIDACION

1. m de P_1 a P_2 $= \dfrac{1}{2}$; m de P_1 a P_3 $= -\dfrac{1}{2}$

   Luego, P_1, P_2, P_3 están en línea recta.

2. m de P_1 a P_2 $= 3$; m de P_2 a P_3 $= 3.$

   Luego, P_1, P_2, P_3 están en línea recta.

3. $m_{AB} = \dfrac{2}{5}$ y $m_{DC} = \dfrac{2}{5}$

$m_{AD} = 3$ y $m_{BC} = 3$

Luego, $AB \| DC$ y $AD \| BC$, por tanto, $ABCD$ es un paralelogramo.

4. $m_{AB} = -1$ y $m_{DC} = -1$

$m_{AD} = \frac{3}{2}$ y $m_{BC} = \frac{3}{2}$

Luego $AB \| DC$ y $AD \| BC$, por tanto $ABCD$ es un paralelogramo.

5. $AB = \sqrt{29}$ y $DC = \sqrt{29}$

$AD = \sqrt{10}$ y $BC = \sqrt{10}$

Como los lados opuestos en el cuadrilátero son iguales, $ABCD$ es un paralelogramo.

6. $m_{P_1P_3} = \frac{2}{5}$ y $m_{P_1P_2} = -\frac{5}{2}$

Como $m_{P_1P_3}$ y $m_{P_1P_2}$ son recíprocas y de signo contrario $P_1P_3 \perp P_1P_2$ y por tanto, el triángulo $P_1P_2P_3$ es rectángulo.

7. $m_{AC} = -\frac{5}{4}$ y $m_{BC} = \frac{4}{5}$

Como m_{AC} y m_{BC} son recíprocas y de signo contrario $AC \perp BC$ y por tanto, el triángulo ABC es rectángulo.

8. $m_{P_1P_2} = -\frac{8}{3}$ y $m_{P_2P_3} = \frac{3}{8}$

$m_{P_3P_4} = -\frac{8}{3}$ y $m_{P_1P_4} = \frac{3}{8}$

Como las pendientes de los lados que son adyacentes son recíprocas y de signo contrario, estos lados son perpendiculares, por tanto, el cuadrilátero es un rectángulo.

9. $P_1P_2 = \sqrt{29}$, $P_1P_3 = \sqrt{261}$, $P_2P_3 = \sqrt{290}$

Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2P_3}^2$$

Si sustituímos la longitud de los lados se tiene:

$$(\sqrt{29})^2 + (\sqrt{261})^2 \stackrel{?}{=} (\sqrt{290})^2$$

$$29 + 261 \stackrel{?}{=} 290$$

$$290 = 290$$

Como sí se cumple el teorema de Pitágoras, concluimos que el triángulo $P_1P_2P_3$ es un triángulo rectángulo.

10. Longitud de la diagonal $P_1P_3 = \sqrt{146}$

Longitud de la diagonal $P_2P_4 = \sqrt{146}$

MODULO 3 – VALIDACION

1. a) 15° 12′ b) 45° c) 67° 36′
2. $\frac{1}{2}$ ó -2
3. 86° 24′
4. 2 ó $-\frac{1}{2}$
5. 49° 46′, 72° 54′, 57° 20′
6. 22° 22′, 119° 45′, 37° 53′
7. 49° 30′, 130° 30′, 49° 30′, 130° 30′
8. $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
9. $x = 2$, $y = 2$
10. $x = -\frac{19}{5}$, $y = -\frac{37}{5}$
11. $x = 12$, $y = 11$
12. $x = 16$, $y = 13$
13. $r = 2$
16. $x = 0$, $y = 4$

1. $4x - 11y + 71 = 0$
2. $4x + 3y - 12 = 0$
3. $13x - 4y + 32 = 0$
4. $x - 2y + 5 = 0$
5. $4x + 3y + 29 = 0$
6. $x - 3y = 0$
7. $5x + 4y - 20 = 0$
8. $x - y + 5 = 0$
9. $x + y + 1 = 0$
10. $y = 4$
11. $x = -3$
12. $x = -5$
13. $\sqrt{3}\,x - y - 6\sqrt{3} = 0$
14. $x - y + 4 = 0$
15. $3x - y - 1 = 0$
16. $2x + y + 4 = 0$
17. $2x - 3y + 15 = 0$
18. $5x + y + 11 = 0$

20. Ecuación del lado $AB : x - 2y + 7 = 0$
    Ecuación del lado $AC : 3x + 2y + 5 = 0$
    Ecuación del lado $BC : 5x - 2y - 13 = 0$

21. $d = \dfrac{16}{\sqrt{34}}$; arriba.
22. $d = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$; debajo.
23. $d = \dfrac{14}{\sqrt{13}}$; debajo.
24. $d = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$; arriba.

25. $d = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$; debajo.
26. $d = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$; arriba.
27. $d = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$; debajo.
28. $d = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$; arriba.
29. Altura $= \dfrac{26}{5}$
30. Area $= 39$

UNIDAD XVIII

SECCIONES CONICAS. CIRCUNFERENCIA. PARABOLA. TRASLACION DE EJES.

Introducción

En unidades anteriores ha estudiado las gráficas de algunas ecuaciones; en esta unidad y las dos siguientes, estudiará cuatro curvas que por su importancia y aplicaciones que tienen en algunas ramas de la ciencia, es necesario estudiarlas en forma exhaustiva. Cada una de estas curvas se describirá como un lugar geométrico, y demostraremos que cada una de ellas es la gráfica de una ecuación cuadrática en **x** y/o **y**, ecuación que se puede representar como un caso especial de la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B y C no todos son cero.

Estas cuatro curvas que son: ***circunferencia, parábola, elipse*** e ***hipérbola,*** se les llama ***cónicas*** debido a que se pueden describir como la curva que se genera al intersectar un plano con un cono recto circular.

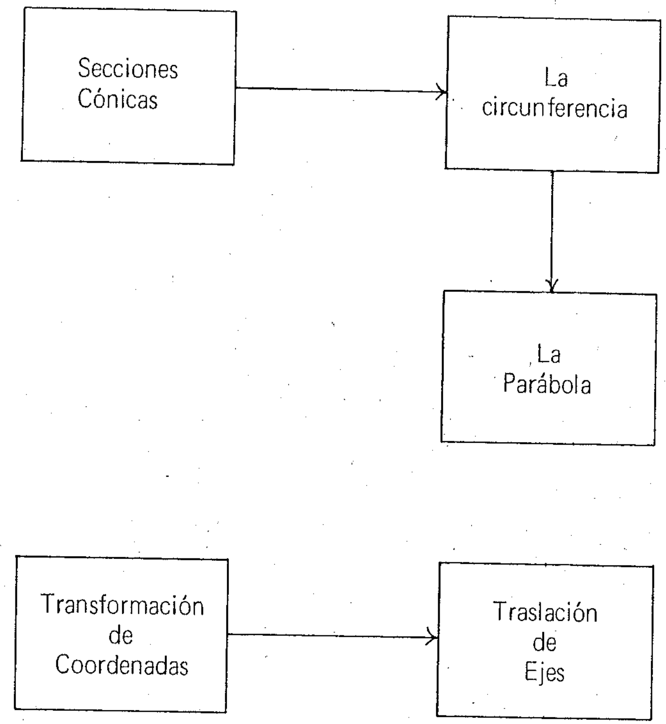
Estudiaremos en esta unidad la traslación de ejes con objeto de que comprenda las ecuaciones de las curvas cuando su centro no coincide con el origen de los ejes coordenados.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Identificará las secciones cónicas.
2. Definirá la circunferencia.
3. Deducirá la ecuación cartesiana de una circunferencia con centro en el origen y radio conocido.
4. Definirá la parábola.
5. Identificará los elementos de la parábola.
6. Explicará el proceso conocido como traslación de ejes.

Diagrama temático estructural



Glosario

Cónicas: Cuatro curvas que se general al intersectar de cierta manera un plano a un cono recto circular; siendo estas curvas la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Circunferencia: Geométricamente se describe como la curva que resulta de la intersección de un cono recto circular y un plano paralelo, a la base del cono.

Circunferencia: Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Ecuación de la circunferencia: Toda ecuación de la forma
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
o de la forma $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Radio de la circunferencia: Distancia del centro de la circunferencia a cualquier punto de la misma. Se representa por *r*.

Parábola: Geométricamente se describe como la curva que resulta al intersectar un cono recto circular y un plano paralelo a la generatriz del cono.

Parábola: Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado (foco) y de una recta fija dada (directriz) que no pase por el punto.

Directriz de la parábola: Recta perpendicular al eje de la parábola.

Lado recto: Cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola.

Radio focal: Distancia que hay entre el foco de una parábola y cualquier punto de la misma.

Traslación de ejes: Desplazamiento de uno o ambos ejes de un sistema de coordenadas rectangulares de tal manera que el origen quede en una nueva posición, pero permaneciendo cada eje paralelo a los ejes originales.

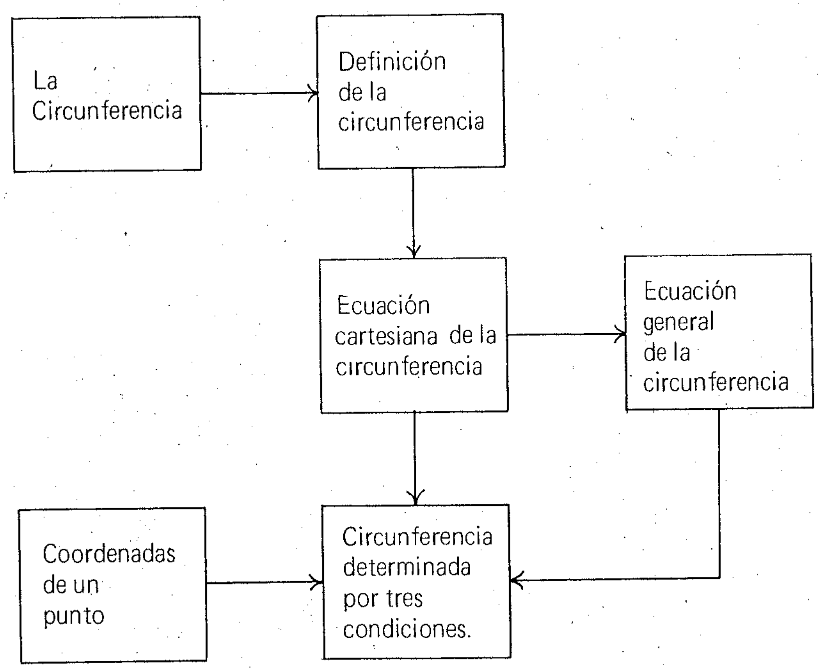
Módulo 5

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará la ecuación cartesiana de una circunferencia dadas las coordenadas de su centro y su radio.
2. Encontrará las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia dada su ecuación.
3. Representará gráficamente una circunferencia a partir de su ecuación cartesiana.
4. Determinará la ecuación de una circunferencia dadas las coordenadas de tres de sus puntos.

ESQUEMA–RESUMEN



5.1 DEFINICION DE LA CIRCUNFERENCIA.

¿Qué es una circunferencia?

De las cuatro cónicas, la *circunferencia* es la más simple y geométricamente se describe como la intersección de un cono recto circular y un plano paralelo a la base del cono. (Figura 1.)

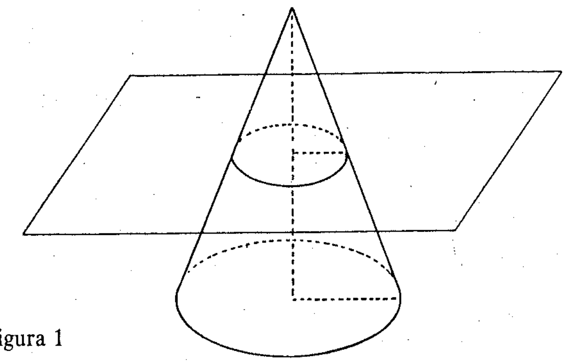


Figura 1

> **Definición.–** *La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.*

5.2 ECUACION CARTESIANA DE LA CIRCUNFERENCIA.

Para deducir la ecuación de la circunferencia, hacemos uso de la (Figura 2.)

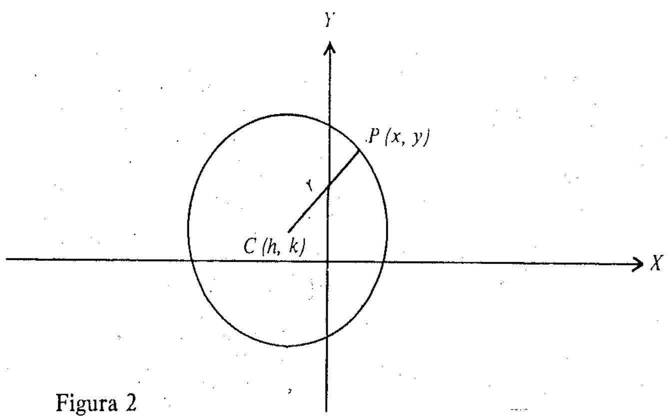


Figura 2

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia con centro en (h,k) y radio igual a r. Puesto que por la definición el radio es constante, tenemos que para todas las posiciones de P sobre la circunferencia.

$$CP = r$$

Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

La circunferencia está determinada por una ecuación.

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad nos queda

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2} \qquad (1)$$

A esta ecuación se le llama ***ecuación cartesiana de la circunferencia*** y se puede usar para escribir la ecuación de cualquier circunferencia, cuando se conocen las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $(5,2)$ y radio igual a 4.

Como el centro está en $(5,2)$ entonces

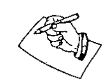
$$h = 5 \,,\; k = 2 \quad \text{y} \quad r = 4$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) tenemos:

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Ejemplo 2



Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3,4)$ y radio igual a 5. En este caso

$= 5$

Sustituyendo en la ecuación (1) tenemos:

$$[x-(-3)]^2 + [y-4]^2 = 5^2$$
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

Si el centro está en el origen $h = 0$ y $k = 0$ la ecuación (1) se reduce a:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta ecuación la estudió en la Unidad XIII.

La posición y tamaño de la circunferencia dependen de tres constantes arbitrarias h, k y r dado que (h,k) son las coordenadas del centro pueden ser positivas o negativas en tanto que r es necesariamente positivo.

5.3 ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Si desarrollamos la ecuación (1) y agrupamos los términos semejantes, tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

y dado que $-2h$, $-2k$ y $h^2 + k^2 - r^2$ son constantes, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

en donde $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$

A la ecuación (2) se le llama *forma general de la ecuación de la circunferencia.* Si la ecuación de la circunferencia tiene la forma (2) podemos reducirla a la forma (1) completando cuadrados en x y y proceso que estudiaremos más adelante.

La ecuación general de segundo grado representa una circunferencia cuando. . .

Puesto que la ecuación general de segundo grado en x y y es

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

esta ecuación puede reducirse a la *forma general* de la ecuación de una circunferencia si y sólo si, $B = 0$ y $A = C$. Cuando $B = 0$, $A = C$ y $A, C \neq 1$ la ecuación general puede reducirse a la forma (2) dividiendo la ecuación por A ó C ya que $A = C$.

Probaremos en seguida que si la ecuación (2) es satisfecha por las coordenadas de más de un punto, es la ecuación de una circunferencia.

Demostración:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Hipótesis.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = -F$$

Se sumó a ambos lados de la igualdad. -F.

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

Se sumó a ambos lados de la igualdad $\frac{D^2}{4}, \frac{E^2}{4}$ que son los cuadrados de la mitad de los coeficientes de x y y, con el objeto de completar el cuadrado perfecto en x y y

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

El lado izquierdo se escribió como binomios al cuadrado y se efectuó la operación indicada en el lado derecho de la igualdad.

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \qquad (3)$$

Si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} < 0$, no hay coordenadas de algún punto que satisfagan la ecuación puesto que del lado izquierdo de la igualdad se tiene una suma de cuadrados.

Si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} = 0$ las coordenadas de un solo punto satisfacen la ecuación, siendo este punto

$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$; si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} > 0$,

tenemos la ecuación de una circunferencia con centro en

$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Ejemplo 1:

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y - 24 = 0$. Trazar la circunferencia.

Dividiendo entre 2 la ecuación de la circunferencia, tenemos:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$$

Se suma a ambos miembros de la igualdad $+ 12$ y se completan cuadrados quedando:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$
$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$
$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

Si comparamos esta última ecuación con la ecuación (1) tenemos que $h = -2$, $k = -3$ y $r = 5$ por lo que el centro es $C(-2, -3)$ y radio $= 5$. (Figura 3.)

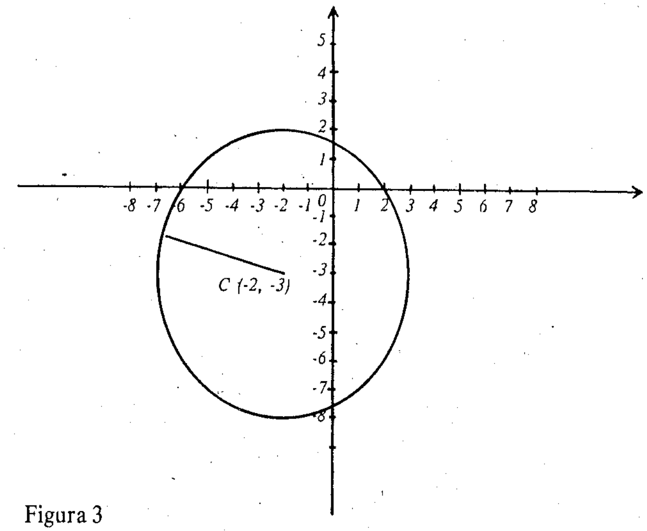


Figura 3

Ejemplo 2:

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $3x^2 + 3y^2 + 10x - 12y + 5 = 0$.

Dividiendo entre 3 la ecuación, nos queda:

$$x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x - 4y + \frac{5}{3} = 0$$

Sumando a ambos miembros de la ecuación $-\frac{5}{3}$ y completando cuadrados tenemos:

$$x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} + y^2 - 4y + 4 = -\frac{5}{3} + \frac{25}{9} + 4$$
$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = \frac{-15 + 25 + 36}{9}$$
$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = \frac{46}{9}$$

Luego, $h = -\frac{5}{3}$, $k = 2$ y $r = \frac{46}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{46}$

por lo que el centro es $(-\frac{5}{3}, 2)$ y radio $= \frac{1}{3}\sqrt{46}$.

5.4 CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES CONDICIONES

¿Cuáles son las tres condiciones que determinan una circunferencia?

Si consideramos la ecuación (1) $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ó la ecuación (2) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, en ambos casos tenemos tres constantes independientes que son h, k y r para la ecuación (1) ó D, E y F para la ecuación (2); esto representa implícitamente que la ecuación de una circunferencia queda determinada por *tres condiciones independientes,* como se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5,1)$, $(4,6)$ y $(2,-2)$. Encontrar su centro y su radio. Podemos usar la ecuación (1) ó (2) para encontrar la ecuación de la circunferencia, usamos la (2):

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dado que todo punto que pertenezca a la curva satisface su ecuación, sustituyendo los tres puntos dados en la ecuación, tenemos:

Para $(5,1)$

$$5^2 + 1^2 + D(5) + E(1) + F = 0$$

$$5D + E + F = -26$$

Para $(4,6)$

$$4^2 + 6^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$

ó

$$4D + 6E + F = -52$$

Para $(2,-2)$

$$2^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$

o

$$2D - 2E + F = -8$$

por tanto, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$5D + E + F = -26$$
$$4D + 6E + F = -52$$
$$2D - 2E + F = -8$$

Resolviendo este sistema por el método que se dio en el módulo 4 de la Unidad IX, se tiene que:

$$D = -\frac{2}{3},\ E = -\frac{16}{3} \text{ y } F = -\frac{52}{3}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2) tenemos:

$$x^2 + y^2 + (-\frac{2}{3})x + (-\frac{16}{3})y + (-\frac{52}{3}) = 0$$

Multiplicando por 3 ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 16y - 52 = 0$$

que es la ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos dados, (Verifique que los tres puntos dados satisfacen la ecuación obtenida).

Para encontrar el centro y el radio usamos el método de completar cuadrados.

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 16y - 52 = 0$$

Dividiendo entre 3 tenemos:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}y - \frac{52}{3} = 0$$

Completando cuadrados se tiene,

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 - \frac{16}{3}y + \frac{64}{9} = \frac{52}{3} + \frac{1}{9} + \frac{64}{9}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{156 + 1 + 64}{9}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{221}{9}$$

Luego, $h = \frac{1}{3}$, $k = \frac{8}{3}$ y $r = \frac{\sqrt{221}}{3}$

entonces, $C\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ y radio $= \frac{\sqrt{221}}{3}$

Si en lugar de completar cuadrados usamos la ecuación (3) para encontrar el centro y el radio tenemos que:

$$h = -\frac{D}{2},\ k = -\frac{E}{2} \text{ y } r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

De la ecuación tenemos que $D = -\frac{2}{3}$, $E = -\frac{16}{3}$

y $F = -\frac{52}{3}$ sustituyendo estos valores en h, k y r se tiene

$$h = -\frac{-\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3},\ k = -\frac{-\frac{16}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + -\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4 - \left(\frac{52}{3}\right)}{4}} \quad \frac{\sqrt{221}}{3}$$

Luego $C\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ y radio $= \frac{\sqrt{221}}{3}$ que es lo mismo

que habíamos encontrado.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia en la forma cartesiana y redúzcala a la forma general.
   a) Centro en $(3,4)$, radio 5.
   b) Centro en $(-4,6)$, radio 6.
   c) Centro en $(0,-5)$, radio 8.
2. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias:
   a) $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 49$
   b) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 64$
   c) $x^2 + y^2 - 20x + 40y + 379 = 0$
   d) $3x^2 + 3y^2 + 36x - 12y = 0$
3. Encuentre las ecuaciones de las circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:
   a) Tiene su centro en $(-4, -2)$ y pasa por $(1,3)$.
   b) Tiene su centro en $(-5,6)$ y es tangente al eje X.
   c) Tiene su centro en $(3,4)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $4x - 2y + 10 = 0$.
   d) Tiene su centro sobre la recta $y = x$, es tangente a ambos ejes y radio igual a 4.
   e) Tiene su centro en el origen y es tangente a la recta $x + y = 6$.
4. Grafique las circunferencias que se dan en los incisos b, c, a y e del problema 3.
5. Describa el lugar geométrico que representa cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 90 = 0$
   d) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 30 = 0$
6. Encuentre las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los puntos:
   a) $A(3,4)$, $B(-1, -4)$ y $C(5,2)$.
   b) $A(7,9)$, $B(12, -3)$ y $C(-5, -7)$.
7. Encuentre la ecuación de la circunferencia con radio $= \sqrt{13}$ y tangente a la recta $4x - 6y + 2 = 0$ en $(1,1)$.
8. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(2,3)$ y $B(-1,6)$ y su centro está sobre la recta $6x + 15y + 3 = 0$.
9. Encuentre la ecuación del lugar geométrico del vértice de un triángulo rectángulo para el cual los extremos de la hipotenusa son $(-2,1)$ y $(8,3)$.
10. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto cuya distancia al orígen es siempre el triple de su distancia al punto $(8,0)$.
11. Demuestre que los puntos $(5,0)$, $(5,-8)$, $(4,1)$ y $(\sqrt{5},2)$ están sobre una misma circunferencia.

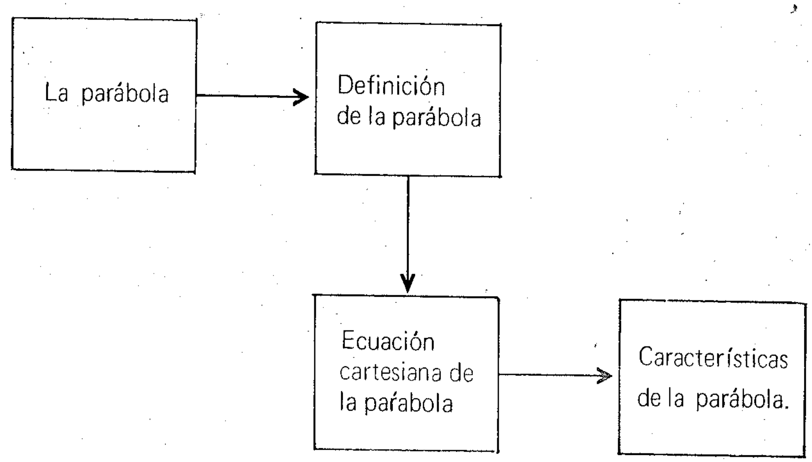
Módulo 6

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Obtendrá las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de una parábola a partir de su ecuación.
2. Representará gráficamente una parábola dada su ecuación cartesiana.
3. Obtendrá la ecuación cartesiana de una parábola que satisface ciertas condiciones dadas.

ESQUEMA-RESUMEN



6.1 DEFINICION DE LA PARABOLA

Esta cónica llamada *parábola*, se describe geométricamente como la curva que resulta al intersectar un cono recto circular y un plano paralelo a la generatriz del cono. (Figura 1.)

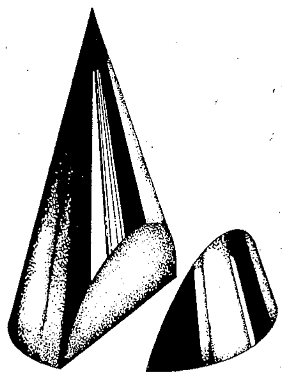


Figura 1.

¿A qué llamamos parábola?

> **Definición:** *Parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado y de una recta fija dada, que no pase por el punto.*

Elementos de la parábola.

Al punto fijo se le llama *foco* y lo representaremos con F, a la recta fija se le llama *directriz.* La distancia entre el foco y la directriz la representaremos por $2p$ $(p > 0)$. La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama *eje de la parábola.*

Basándonos en la definición de parábola, el punto medio entre la directriz y el foco pertenece al lugar geométrico y este punto se llama *vértice.* (Figura 2.)

6.2 ECUACION CARTESIANA DE LA PARABOLA. DIRECTRIZ. LADO RECTO.

Para obtener la ecuación de la parábola empezaremos por el caso más simple haciendo que el vértice coincida con el origen del sistema de coordenadas y que el eje de la parábola sea el eje X ó el eje Y. Puesto que las ramas de la

parábola se pueden extender hacia arriba o hacia abajo, a la derecha o a la izquierda, tendremos una ecuación para cada caso. Empezaremos por el caso de una parábola en la que sus ramas se extienden hacia la derecha, con vértice en el origen y su eje es el eje X. (Figura 2).

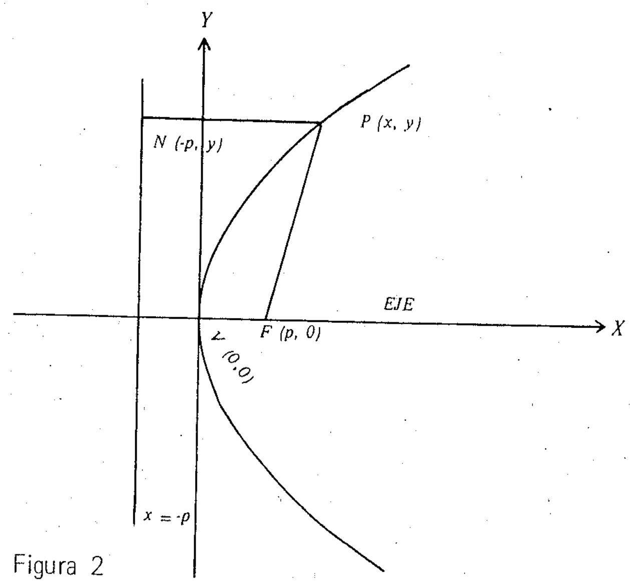


Figura 2

Dado que la distancia de la directriz al foco es $2p$, las coordenadas del foco son $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$ (ver figura 2). Tomemos un punto cualquiera $p(x,y)$ del lugar geométrico; trazamos una recta PN perpendicular a la directriz y siendo perpendicular a la directriz, es paralela al eje X por lo que las coordenadas de N son $(-p, y)$. Se traza la recta PF.

Usando la definición de la parábola, tenemos que

$$PN = PF$$

Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos para encontrar PN y PF, tenemos:

$$PN = \sqrt{[\,x - (-p)]^2 + [\,y - y]^2}$$

Obtenci... ecuación cartesiana de la parábola.

$$= \sqrt{(x + p)^2}$$

$$\text{y} \quad PF = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$$

$$= \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Sustituyendo PN y PF en $PN = PF$, se tiene:

$$\sqrt{(x + p)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2$ Se elevaron al cuadrado ambos miembros.

$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$ Efectuando.

$\boxed{y^2 = 4px}$ Simplificando.

Entonces, la ecuación $x^2 = -4py$; es la ecuación de una parábola con vértice en $(0,0)$, foco en $(p,0)$ y ecuación de la directriz $x = -p$. Las coordenadas de todo punto que pertenece a la parábola satisfacen esta ecuación y viceversa; si las coordenadas de un punto satisfacen esta ecuación el punto pertenece a la parábola.

Cuando las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda ¿Cuál es su ecuación?

Si las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda, queda la siguiente figura:

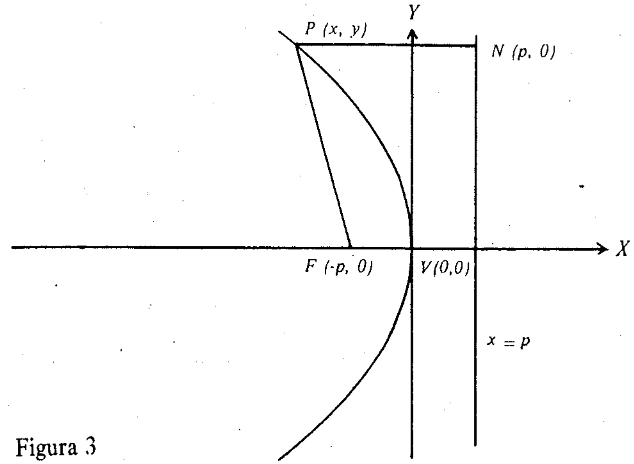


Figura 3

La ecuación de una parábola de este tipo es $y^2 = -4px$; la deducción de esta ecuación se le deja como ejercicio (problema 1 de los Reactivos de Autoevaluación, Módulo 6.

Deduciremos ahora la ecuación de una parábola con las ramas hacia arriba. (Figura 4.)

¿Y si las ramas se extienden hacia arriba?

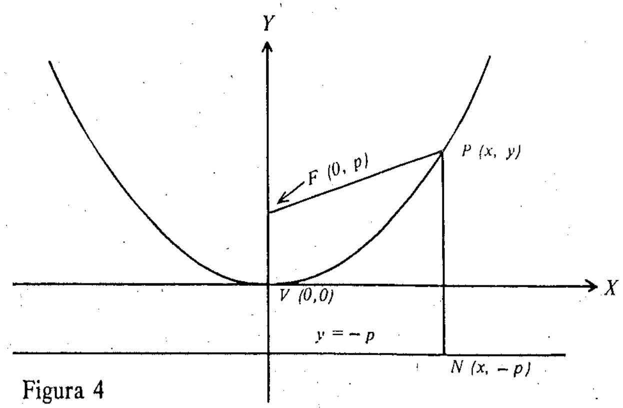


Figura 4

Puesto que PN es paralela al eje Y, por ser perpendicular a la directriz, las coordenadas de N son $(x, -p)$.

Usando la definición de parábola, tenemos:

$$PN = PF$$

$$\sqrt{[\,x - x]^2 + [\,y - (-p]^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2}$$

$$\sqrt{0^2 + (y + p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

$$(y + p)^2 = x^2 + (y - p)^2$$

$$y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Entonces, la ecuación $x^2 = 4py$ es la ecuación de una parábola con las ramas hacia arriba, vértice en $(0,0)$ foco en $(0,p)$ y ecuación de la directriz $y = -p$.

Si las ramas de la parábola se extienden hacia abajo, queda la siguiente figura:

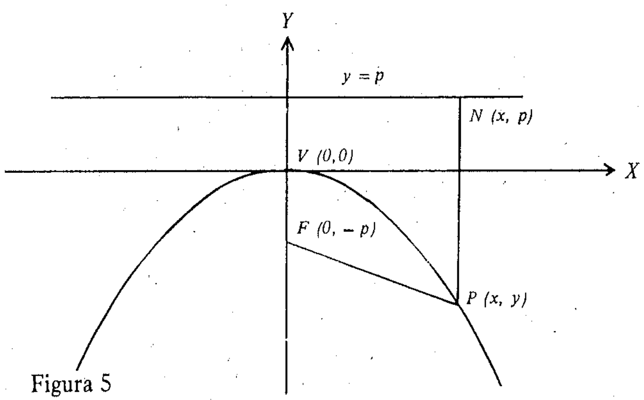


Figura 5

La ecuación de una parábola de este tipo, es $x^2 = -4py$; la deducción completa se le deja como ejercicio (problema 2 de los Reactivos de Autoevaluación, Módulo 6.

¿Qué es el lado recto?

> La cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola, se le llama *lado recto* de la parábola.

> A la distancia que hay entre el foco de una parábola y cualquier punto de la misma, se le llama *radio focal.*

Ejemplo 1:

Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para la parábola $y^2 = 8x$.

Comparando esta ecuación con $y^2 = 4px$, tenemos que

$$4p = 8 \Rightarrow p = 2$$

Entonces las coordenadas del foco son $(2,0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -2$.

Ejemplo 2:

Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para la parábola $y^2 = -16x$.

Comparando esta ecuación con $y^2 = -4px$, tenemos que

$$4p = 16 \Rightarrow p = 4$$

Como el signo menos del coeficiente de la x nos indica que las ramas de la parábola son hacia la izquierda, entonces las coordenadas del foco son $(-4,0)$ y la ecuación de la directriz es $x = 4$.

Ejemplo 3:

Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para la parábola $x^2 = 6y$.

Comparando esta ecuación con $x^2 = 4py$, tenemos que

$$4p = 6 \Rightarrow p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Entonces, las coordenadas del foco son $(0, \frac{3}{2})$ y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{3}{2}$.

Ejemplo 4:

Escribir la ecuación de la parábola con foco en $(0,5)$ y directriz $y = -5$. Hacer su gráfica.

Como el foco está sobre el eje Y en $(0,5)$, entonces es una parábola vertical con ramas hacia arriba y vértice en $(0,0)$ por lo que su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$, Por definición, p es la distancia del vértice al foco, entonces $p = 5$, sustituyendo este valor en $x^2 = 4py$. tenemos

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4(5)y$$
$$x^2 = 20y$$

Por tanto, la ecuación de la parábola con foco en $(0,5)$ y directriz $y = -5$ es $x^2 = 20y$. Para hacer la gráfica, tabulamos algunos puntos; en este caso conviene darle valores a la y y encontrar los correspondientes valores de la x. ($y = 0$, $x = 0$; $y = 5$, $x = \pm 10$;...) (Figura 6).

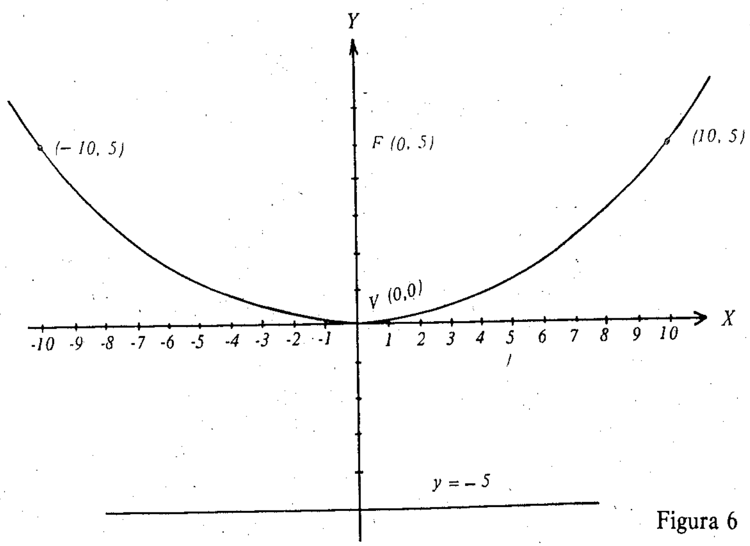


Figura 6

Ejemplo 5:

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en $(0,0)$: foco en el eje X y pasa por el punto $(3,2)$. Encontrar el foco y la ecuación de la directriz. (Figura 7).

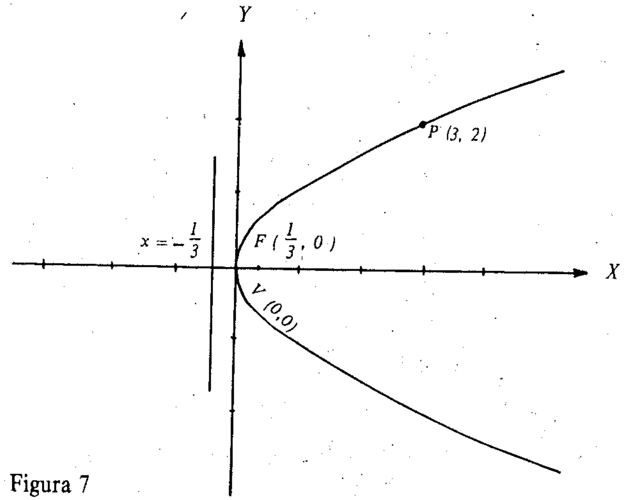


Figura 7

De la figura vemos que es una parábola horizontal con las ramas hacia la derecha por lo que su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$. Como sabemos que pasa por el punto $(3,2)$, las coordenadas de este punto satisfacen esta ecuación. Sustituyendo $x = 3$ y $y = 2$ en la ecuación, tenemos:

$$2^2 = 4p(3)$$
$$4 = 12\,p$$
$$\frac{4}{12} = p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{3}$$

Si $p = \frac{1}{3} \Rightarrow 4p = \frac{4}{3}$ por lo que la ecuación es $y^2 = \frac{4}{3}x$,

el foco está en $(\frac{1}{3}, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -\frac{1}{3}$.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Deduzca la ecuación de una parábola con vértice en el origen, eje el eje X y ramas hacia la izquierda.
2. Deduzca la ecuación de una parábola con vértice en el origen, eje el eje Y y ramas hacia abajo.

En los problemas 3 al 8, encuentre las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para cada una de las parábolas dadas.

3. $y^2 = 16x$
4. $x^2 + 12y = 0$
5. $3x^2 - 27y = 0$
6. $4y = 24x^2$
7. $12x = -3y^2$
8. $y^2 = -16x$

En los problemas del 9 al 14, escriba la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas.

9. Foco en $(0,-3)$, directriz $y = 3$
10. Vértice en $(0,0)$, directriz $x = 2$.
11. Vértice en $(0,0)$, pasa por $(-4,-3)$. Eje vertical.
12. Vértice en $(0,0)$, foco en el eje X y pasa por $(4,6)$.
13. Foco en $(\frac{2}{3}, 0)$, directriz $x = -\frac{2}{3}$
14. Vértice en $(0,0)$ y pasa por $(5,2)$.
15. Demostrar que para cualquier punto $p(x,y)$ sobre la parábola $y^2 = 4px$, la longitud del radio focal es $|x + p|$.
16. Demuestre que la longitud del lado recto para cualquier parábola es igual a $4p$.
17. Encuentre al lado recto de las parábolas dadas en los problemas 3, 5, 7.
18. Encuentre el radio focal al punto $(-1,6)$ para la parábola dada en el problema 8.
19. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y por los extremos del lado recto de la parábola $y^2 = 8x$.
20. Uno de los extremos de una cuerda que pasa por el foco de una parábola es el punto $(4,-4)$. La parábola tiene como eje el eje X y el vértice en el origen. Encuentre las coordenadas del otro extremo de la cuerda.
21. Demuestre que la circunferencia en cuyo diámetro es el radio focal de la parábola. $y^2 = 4px$, es tangente al eje Y.
22. Si AB representa la cuerda que pasa por el foco en la parábola $y^2 = 4px$, demuestre que la circunferencia con diámetro igual a AB es tangente a la directriz de la parábola.

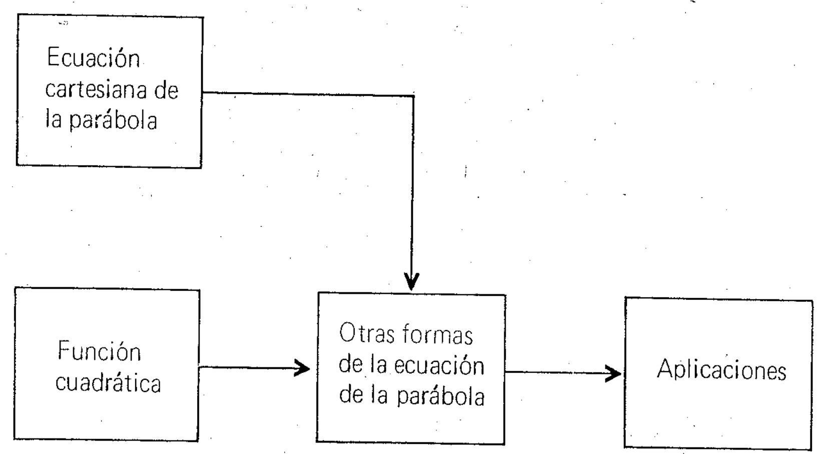
Módulo 7

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Obtendrá el vértice, lado recto, foco y la ecuación de la directriz de una parábola cuyo vértice esté en el punto de coordenadas (h, k).
2. Encontrará la ecuación de una parábola cuyo vértice no está en el origen y satisface ciertas condiciones dadas.
3. Resolverá algunos problemas de aplicación donde intervengan parábolas.

ESQUEMA-RESUMEN



7.1 OTRAS FORMAS DE LA ECUACION DE LA PARABOLA.

Las ecuaciones de la parábola que estudiaste en la lección anterior, son válidas solamente para el caso bastante restringido, de que el vértice esté en el origen y que el eje de la parábola sea el eje X ó el eje Y.

Veamos el caso en que el vértice no está en el origen.

Estudiaremos en esta lección un caso más general en el que el vértice está en un punto cualquiera que no es el origen y el eje de la parábola es paralelo al eje X ó al eje Y.

Para deducir las ecuaciones de este tipo de parábolas, haremos uso de la definición que se dio en la lección anterior. El vértice de la parábola es ahora el punto (h,k) y la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz, seguirá siendo p. (Figura 1.)

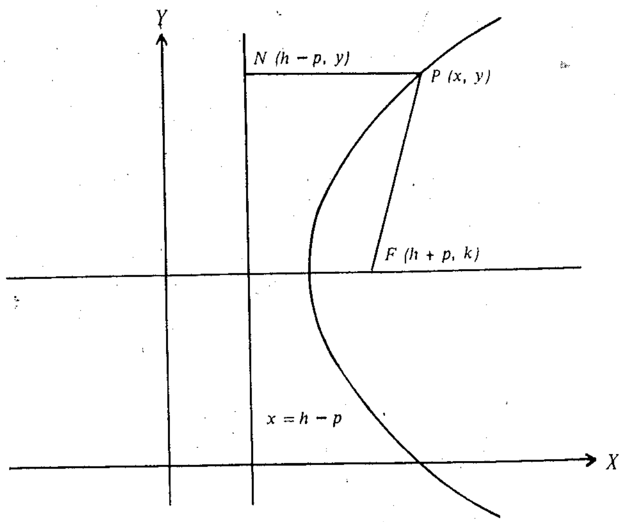


Figura 1

De la definición de la parábola, tenemos que:

$$NP = PF$$

$$\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2} = \sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} \qquad \text{Sustitución.}$$

$$[x-(h-p)] + 0^2 = [x-(h+p)]^2+(y-k)^2 \qquad \text{Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad.}$$

$$(x-h+p)^2 = (x-h-p)^2+(y-k)^2 \qquad \text{Eliminando paréntesis.}$$

$$x^2+h^2+p^2-2hx+2px-2hp = x^2+h^2+p^2-2hx-2px+2hp+y^2-2ky+k^2 \qquad \text{Efectuando.}$$

$$4px-4hp = y^2-2ky+k^2 \qquad \text{Simplificando.}$$

$$y^2-2ky+k^2 = 4px-4hp \qquad \text{Simetría}$$

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p\,(x-k)} \qquad \text{Sustitución y propiedad distributiva por la izquierda.}$$

Entonces la ecuación $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ es la ecuación de una parábola horizontal con vértice en (h,k), foco en $(h+p,\ k)$ y directriz $x = h-p$.

Si la parábola es horizontal con vértice en (h,k), y sus ramas se extienden hacia la izquierda, su ecuación es $(y-k)^2 = -4p\,(x-h)$.

Deduciremos ahora la ecuación de una parábola con vértice en (h,k) y ramas hacia arriba. (Figura 2.)

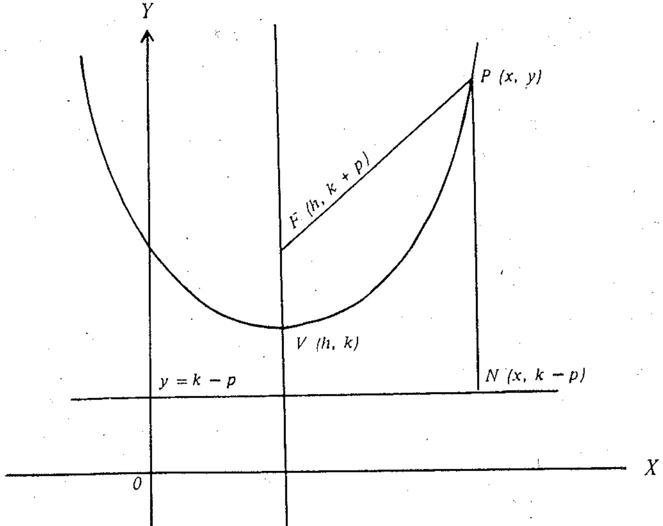


Figura 2

De la definición de parábola tenemos que:

Aplicando la definición de parábola.

$PN = PF$

$\sqrt{(x - x)^2 + [y - (k - p)]^2} =$
$\sqrt{(x - h)^2 + [y - (k + p)]^2}$ Sustitución

$(x - x)^2 + [y - (k - p)]^2 =$
$(x + h)^2 + [y - (k + p)]^2$ Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

$0^2 + (y-k+p)^2 = (x-h)^2 + (y-k-p)^2$ Eliminando paréntesis.

$y^2 + k^2 + p^2 - 2ky = x^2 - 2xh + h^2$ Efectuando.
$+ 2py - 2kp \qquad + y^2 + k^2 + p^2$
$- 2ky - 2py + 2kp$

$4py - 4kp = x^2 - 2hx + h^2$ Simplificando.

$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$ Simetría.

$\boxed{(x - h)^2 = \pm 4p(y - k),}$ propiedad distributiva por la izquierda.

Entonces, la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ es la ecuación de una parábola vertical con vértice en (h,k), foco en $(h, k + p)$ y directriz $y = k - p$.

Si la parábola es vertical con vértice en (h,k) y sus ramas se extienden hacia abajo, la ecuación de la parábola es $(x - h)^2 = -4p(y - k)$.

Si resolvemos para x de la ecuación $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$, la ecuación toma la forma.

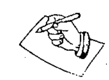
$$x = ay^2 + by + C$$

y si se resuelve para y de la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, la ecuación toma la forma $y = ax^2 + bx + c$; esta ecuación la estudió en la Unidad XI.

Interpretación del signo de *a*

Si a es positiva, la parábola se extiende hacia la derecha o hacia arriba y si a es negativa, la parábola se extiende hacia la izquierda o hacia abajo.

Ejemplo 1:



Hallar vértice, lado recto, foco, ecuación de la directriz y trazar la parábola cuya ecuación es $x^2 - 4x - 4y - 4 = 0$.

Solución:

Dejamos del lado izquierdo de la igualdad los términos en x ; haciendo ésto, nos queda:

$$x^2 - 4x = 4y + 4$$

Sumamos 4 a ambos lados de la igualdad, para que del lado izquierdo quede un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 4x + 4 = 4y + 4 + 4 = 4y + 8$$

Esta igualdad la podemos escribir como:

$$(x-2)^2 = 4(y+2)$$

Luego el vértice está en $(2,-2)$ y el lado recto es igual a 4. (Ver problema 16 de los Reactivos de Autoevaluación Módulo 6. Como $4p = 4$, tenemos que $p = 1$ por tanto, la ecuación de la directriz es $y = -3$ y las coordenadas del foco son $(2,-1)$. La gráfica de la parábola es la siguiente:

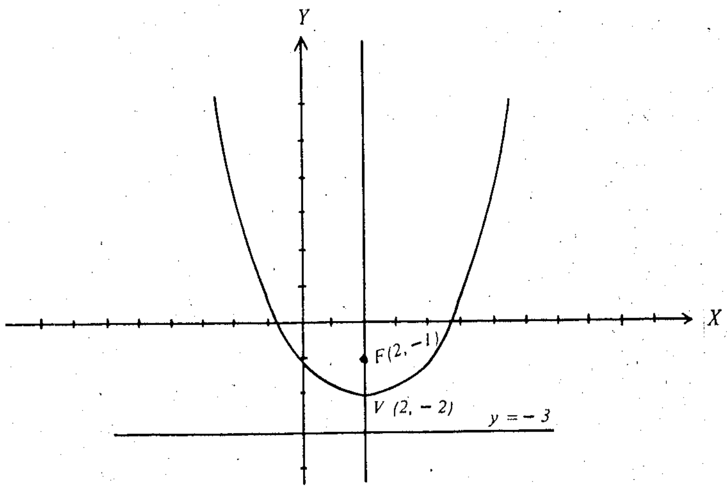


Figura 3

Ejemplo 2:

Hallar vértice, lado recto, foco, ecuación de la directriz y trazar la parábola cuya ecuación es

$$y^2 + 6y + 8x - 7 = 0.$$

Solución:

Escribimos la ecuación dejando los términos en **y** del lado izquierdo de la igualdad.

$$y^2 + 6y = -8x + 7$$

Completando un cuadrado perfecto el lado izquierdo de la igualdad se tiene

$$y^2 + 6y + 9 = -8x + 7 + 9$$
$$(y+3)^2 = -8x + 16$$
$$(y+3)^2 = -8(x-2)$$

Como el coeficiente del término en **x** es negativo, las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda.

De la ecuación, tenemos que $4p = 8 \Rightarrow p = 2$, luego,

Lado recto $= 4p = 4(2) = 8$

El vértice está en $(2.-3)$, foco en $(0,-3)$ y la ecuación de la directriz es $x = 4$. La gráfica de la parábola es la siguiente:

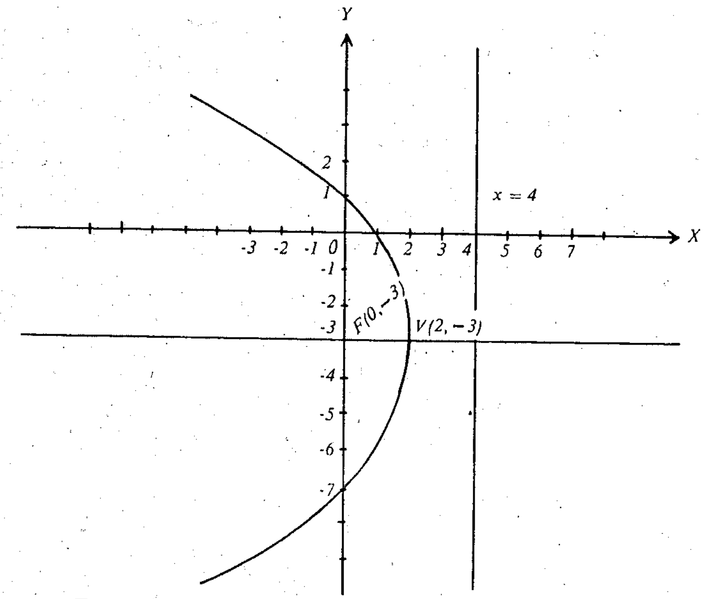


Figura 4

Ejemplo 3:

Encontrar la ecuación de una parábola horizontal que pasa por $(-2,4)$, $(-3,2)$ y $(2,-4)$. Encontrar el vértice, lado recto, foco, extremos del lado recto y ecuación de la directriz. (Figura 5.)

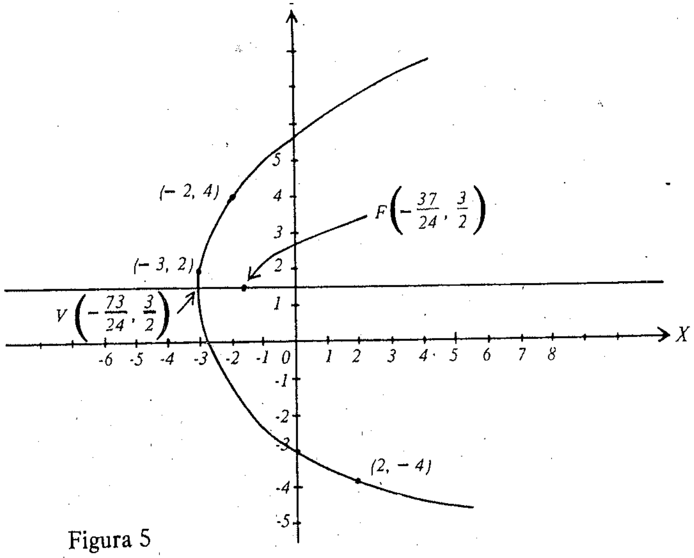


Figura 5

La ecuación de una parábola con eje paralelo al eje **X** es $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$ ó $x = ay^2 + by + c$. Si sustituímos en esta última ecuación las coordenadas de los 3 puntos por donde pasa la parábola, tenemos:

$-2 = a(4)^2 + b(4) + c$ para el punto $(-2,4)$

$-3 = a(2)^2 + b(2) + c$ para el punto $(-3,2)$

$2 = a(-4)^2 + b(-4) + c$ para el punto $(2,-4)$.

Si efectuamos operaciones y ordenamos las tres ecuaciones, tenemos el siguiente sistema:

$$16a + 4b + c = -2$$
$$4a + 2b + c = -3$$
$$16a - 4b + c = 2$$

Resolviendo este sistema por el método que se estudió en el Módulo 4 de la Unidad IX, tenemos que:

$$a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{2} \text{ y } c = -\frac{8}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x = \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{8}{3}$$

Si transformamos esta ecuación a la forma $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$, nos queda:

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 6\left(x + \frac{73}{24}\right)$$

Luego el vértice está en $\left(\frac{73}{24}, \frac{3}{2}\right)$, Lado recto $= 6$, foco en $\left(-\frac{37}{24}, \frac{3}{2}\right)$ y la ecuación de la directriz es $x = -\frac{109}{24}$.

como $4p = 6$, $2p = 3$ por lo que los extremos del lado recto son

$$\left(-\frac{73}{24}, -\frac{3}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{73}{24}, \frac{9}{2}\right)$$

Ejemplo 4:

Encontrar la ecuación de una parábola con foco en $(2,-2)$ y ecuación de la directriz $y = 4$. Figura 6.)

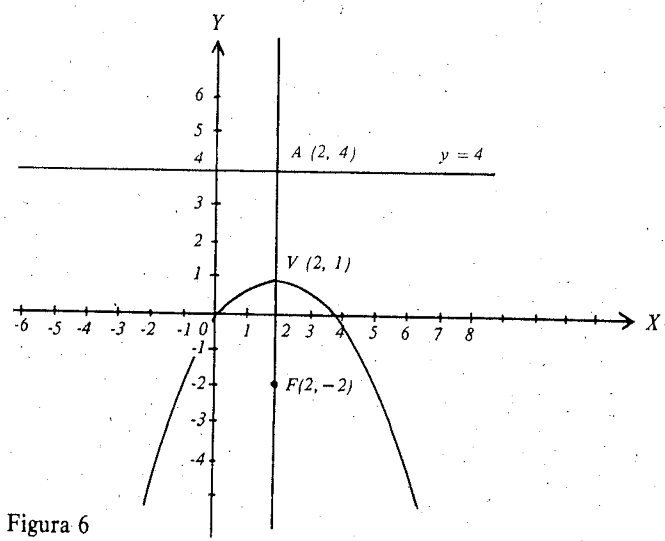


Figura 6

es perpendicular a la directriz, la parábola es vertical. El eje de la parábola intersecta a la directriz en $A(2,4)$ por lo que el vértice está en el punto medio de AF, luego el vértice es el punto $(2,1)$, siendo p la distancia del foco al vértice, entonces $p = 3$.

Como conocemos el vértice, P y sabemos que las ramas de la parábola se extienden hacia abajo, su ecuación es:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Sustituyendo valores nos queda:

$$(x - 2)^2 = -4(3)(y - 1)$$

Simplificando, queda finalmente:

$$(x - 2)^2 = -12(y - 1)$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Para cada una de las siguientes parábolas, encuentre las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y longitud del lado recto.
   a) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
   b) $4x^2 + 4x + 24y + 25 = 0$
   c) $3y^2 + 24y + 30x + 38 = 0$
   d) $x^2 - 4y + 8 = 0$
2. Encuentre la ecuación de la parábola vertical que pasa por los puntos:
   a) $(1,0)$, $(-3,28)$, $(2,3)$
   b) $(-1,0)$, $(-2,-5)$, $(3,0)$
3. Encuentre la ecuación de la parábola horizontal que pasa por los puntos:
   a) $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(-5,0)$
   b) $(1,0)$, $(-19,-2)$, $(-14,3)$
4. Encuentre la ecuación de la parábola que satisface las siguientes condiciones:
   a) Directriz $y = 8$, Foco en $(3,-2)$
   b) Directriz $y = -5$, Foco en $(-4,3)$
   c) Directriz $x = 4$, Foco en $(8,6)$
   d) Directriz $x = -1$, Foco en $(-5,-3)$
   e) Vértice en $(4,2)$, longitud del lado recto $= 6$, eje horizontal.

5. Encuentre la ecuación de la parábola con foco en $(2,2)$ y directriz la recta $3x + 4y + 12 = 0$. (Use la definición de parábola.)
6. La trayectoria de un proyectil lanzado por un mortero es la parábola $y = 4x -$; la unidad es un kilómetro y el punto de lanzamiento es el origen.
   a) ¿Cuál es el punto más alto que alcanza el proyectil?
   b) ¿Cuál es el alcance máximo del proyectil?

   El cable de suspensión de un puente, toma forma parabólica si el peso del puente más el del cable está uniformemente distribuído en sentido horizontal. Considera un puente cuyas torres son de 20 m de alto y están separadas entre sí 100 m y en el cual el punto más bajo del cable de suspensión está 10 m arriba del puente. ¿Cuál es la ecuación de la parábola que forma el cable de suspensión? (origen en el centro del puente).

8 Verifique la siguiente construcción geométrica de la parábola cuando se dan las coordenadas del foco y la directriz. Dibuje una recta que pase por el foco (F) y sea perpendicular a la directriz, llame D al punto donde se intersecta esta recta con la directriz. Localice el vértice sobre la recta DF de tal manera que $DV = VF$. Tome cualquier punto A sobre VF del mismo lado de V o de F y trace por A una recta paralela a la directriz. Con centro en F y radio igual a DA dibuje un arco que intersecte a la recta que se trazó por A en los puntos P y P'. Entonces estos puntos P y P', son puntos de la parábola. Repita el proceso por otros puntos A', A'' etc.

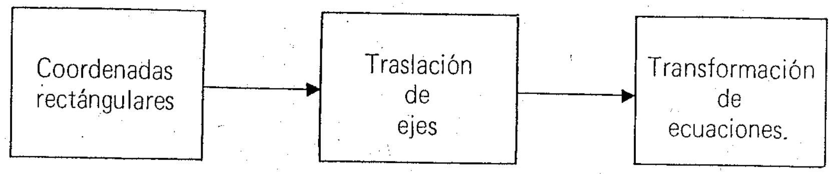
Módulo 8

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Referirá la ecuación de una cónica dada en un sistema de dos dimensiones a otro sistema que resulte de trasladar paralelamente los ejes a un nuevo origen cuyas coordenadas estén definidas.
2. Simplificará la ecuación de una superficie dada, eliminando los términos de primer grado, mediante una traslación de ejes.

ESQUEMA–RESUMEN



En todos los temas que hemos tratado en relación con la línea recta, circunferencia o parábola, se ha considerado el sistema de coordenadas rectangulares; sin embargo podemos referir la ecuación a un sistema rectangular determinado y si cambiamos los ejes coordenados, obtener algunas simplificaciones en la ecuación de la curva que estamos considerando. Estos cambios pueden consistir en *una traslación de ejes, una rotación de ejes,* o bien ambos cambios, efectuando uno primero y después el otro.

¿Cómo se efectúa una traslación de ejes?

En este tema trataremos solamente el caso de traslación de ejes, el cual se define como sigue: *Traslación de ejes, es el desplazamiento de uno o ambos ejes de un sistema de coordenadas rectangulares de tal manera que el origen quede en una nueva posición pero permaneciendo cada eje paralelo a los ejes originales.*

Usaremos la siguiente figura para ilustrar en qué consiste la traslación de ejes.

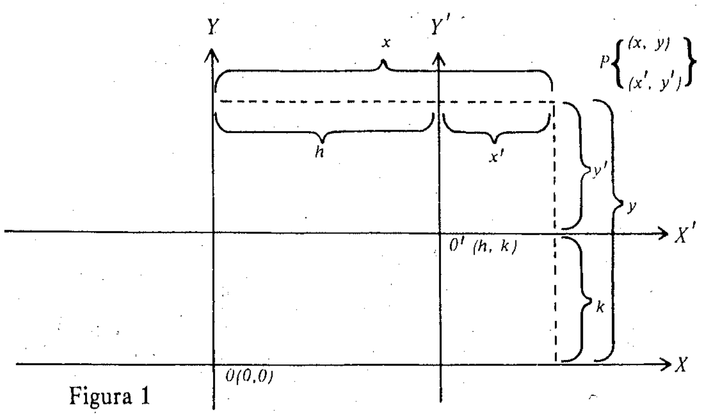


Figura 1

Designamos por O' un punto cuyas coordenadas son (h,k), referidos al sistema de coordenadas $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, por este punto O' trazamos rectas paralelas al eje X y al eje Y, las

que tomaremos como los nuevos ejes y las llamaremos X' y Y' respectivamente. Todo punto P con coordenadas (x,y) en el sistema original tendrá coordenadas (x', y') referidas al nuevo sistema de ejes.

De la figura 1, podemos ver la relación que hay entre las coordenadas (x,y) y las coordenadas (x', y'). Para la traslación de los ejes a $O'(h,k)$; esta relación está dada por:

Ecuaciones de traslación de ejes.

$$\boxed{x' = x - h \, , \, y' = y - k} \qquad (1)$$

o también como

$$\boxed{x = x' + h \, , \, y = y' + k} \qquad (2)$$

La demostración de las ecuaciones (1) se ve claramente a partir de la figura y las ecuaciones (2) se obtienen directamente de la (1).

Con el uso de las ecuaciones (2) podemos transformar cualquier ecuación en $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en otra ecuación en $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{y}'$. La curva de la ecuación en el sistema de coordenadas $\mathbf{xy}$ coincide con la curva de la nueva ecuación referida al nuevo sistema $\mathbf{x}'\ \mathbf{y}'$, es decir la curva no se ha trasladado, los que se han trasladado son los ejes.

Ejemplo 1:

Si la ecuación de una curva referida a un sistema de coordenadas $\mathbf{xy}$ es $x^2 - 10x - 4y + 9 = 0$, encontrar la ecuación de esta misma curva referida a un nuevo sistema de ejes $\mathbf{x}'\ \mathbf{y}'$ con el origen en $(5, -4)$. Graficar la curva y trazar los ejes $X, Y,$ y X', Y'.

Solución:

Como O' es $(5, -4)$, de aquí tenemos que $h = 5$ y $k = -4$ y puesto que las coordenadas de todo punto $P(x,y)$ satisfacen la ecuación $x^2 - 10x - 4y + 9 = 0$, sus nuevas coordenadas son: (usando la ecuación (2))

$$x = x' + 5 \quad \text{y} \quad y = y' - 4$$

Estas dos últimas ecuaciones, nos dan las coordenadas originales en términos de las nuevas coordenadas, por tanto, sustituyendo estas expresiones en la ecuación tenemos:

$$(x' + 5)^2 - 10(x' + 5) - 4(y' - 4) + 9 = 0$$
$$x'^2 + 10x' + 25 - 10x' - 50 - 4y' + 16 + 9 = 0$$

Simplificando, se tiene:

$$x'^2 - 4y' = 0$$

ó

$$x'^2 = 4y'$$

Esta última ecuación que es más simple que la original, es la ecuación de la misma curva referida al nuevo sistema de coordenadas x' y' con el origen en $(5, -4)$.
La gráfica de la curva y ambos sistemas de coordenadas se dan en la figura 2.

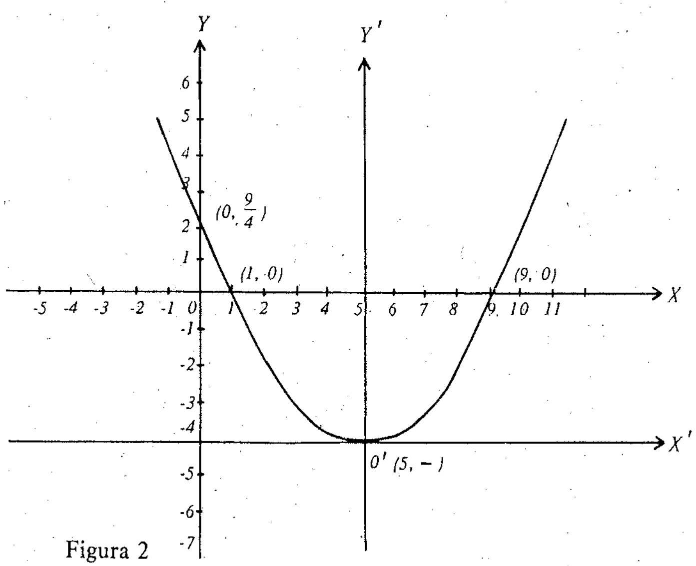


Figura 2

Ejemplo 2:

Determinar la traslación que elimina los términos en **x** y **y** en la ecuación $4x^2 + 16y + 9y^2 + 18y - 119 = 0$.
Encontrar la ecuación resultante de esta traslación y graficar la ecuación mostrando ambos ejes.

Solución 1:

Usando el método de completar cuadrados, tenemos:

$$4(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) = 119 + 16 + 9$$
$$4(x + 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 144$$

Dividiendo la ecuación por 144, se tiene:

$$\frac{4(x + 2)^2}{144} + \frac{9(y + 1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x + 2)^2}{36} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$$

Haciendo $x' = x + 2$ y $y' = y + 1$ de tal forma que $h = -2$ y $k = -1$, la ecuación referida al nuevo sistema de coordenadas nos queda:

$$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

donde $0'$ es $(-2, -1)$.

Solución 2:

Como se desea encontrar la traslación necesaria para que desaparezcan los términos en x y y, representamos esta traslación como h y k, luego:

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación $4x^2 + 16x + 9y^2 + 18y - 119 = 0$ tenemos:

$$\ldots 9(y' + k)^2 + 18(y' + k) - 119 = 0$$

Efectuando, se tiene:

$$4x'^2 + 8x'h + 4h^2 + 16x' + 16h + 9y'^2 + 18y'k + 9k^2 + 18y' + 18k - 119 = 0$$

Asociando términos semejantes, obtenemos

$$4x'^2 + (8h + 16)\,x' + (18k + 18)\,y' + 4h^2 + 16h + 9k^2 + 18k - 119 = 0$$

Como se desean eliminar los términos en x' y y' sus coeficientes deben ser cero, entonces:

$$8h + 16 = 0 \;\Rightarrow\; h = -2$$

y

$$18k + 18 = 0 \;\Rightarrow\; k = -1$$

por lo que la traslación requerida es $x = x' - 2$ y $y = y' - 1$, que es la misma que encontramos en la Solución 1.

Si estos valores se sustituyen en la ecuación original, obtenemos:

$$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

La gráfica de la ecuación, así como los dos sistemas de coordenadas, se muestran en la figura 3.

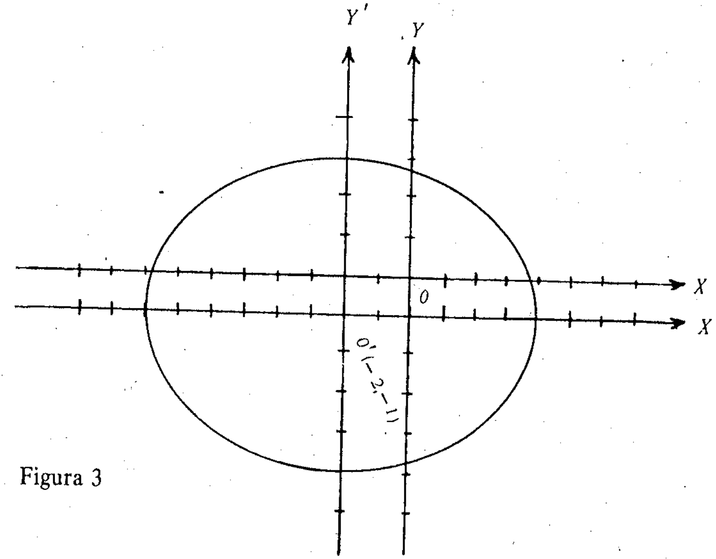


Figura 3

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

En los problemas del 1 al 5, transforme la ecuación dada, trasladando los ejes de coordenadas al nuevo origen que se indica.

1. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$, $(2, -2)$
2. $y^2 - 6x + 9 = 0$, $(\frac{3}{2}, 0)$
3. $4x^2 - 16x + 5y^2 - 4 = 0$, $(2, 0)$
4. $12x^2 - 12x - 16y^2 - 48y - 29 = 0$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
5. $75x^2 + 90x - 375y + 152 = 0$, $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{3})$

En los problemas del 6 al 9, transforme la ecuación dada a otra que no tenga términos en x y y por medio de una traslación de los ejes de coordenadas. Obtenga la coordenadas del nuevo origen.

6. $x^2 - 2x - 12y + 25 = 0.$
7. $y^2 + 4y + 20x + 4 = 0.$
8. $x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0.$
9. $4x^2 - 12x + 4y^2 + 12y + 2 = 0$

En los problemas 10, 11 y 12 grafique (mostrando los ejes X, Y, y X', Y') las curvas de los problemas 7, 8 y 9:

10. Curva del problema 7.
11. Curva del problema 8.
12. Curva del problema 9.

Paneles de verificación

MODULO 5 – VALIDACION

1. a) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

   $x^2 + y^2 - 8x - 6x = 0$

   b) $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 36$

   $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 16 = 0$

   c) $(x - 0)^2 + (y + 5)^2 = 64$

   $x^2 + y^2 + 10y - 39 = 0$

2. a) $C(6, -4)$, radio $= 7$

   b) $C(-3, 1)$, radio $= 8$

   c) $C(10, -20)$, radio $= 11$

   d) $C(-6, 2)$, radio $= \sqrt{40}$

3. a) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 50$

   b) $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 36$

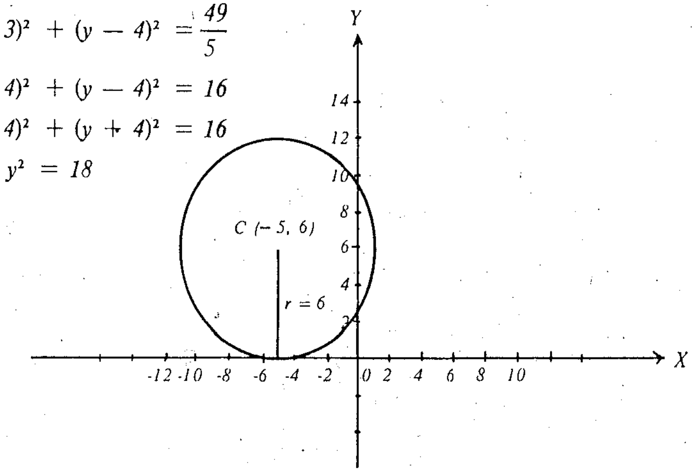
   c) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{49}{5}$

   d) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

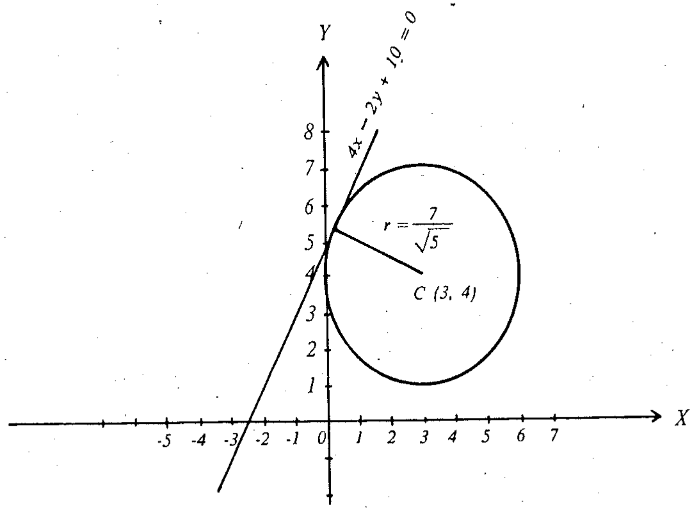
   $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

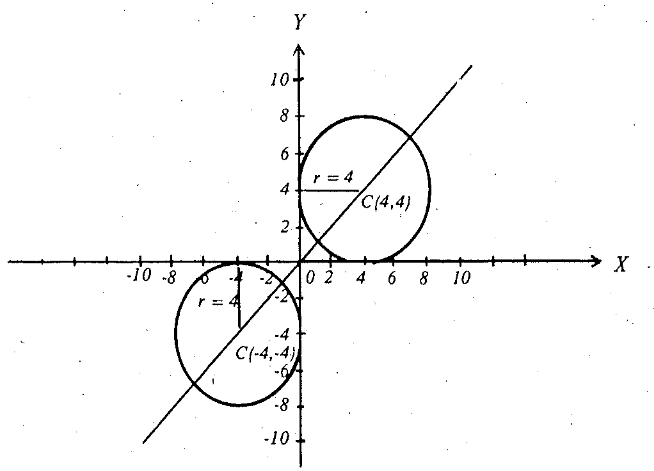
   e) $x^2 + y^2 = 18$

4. b)



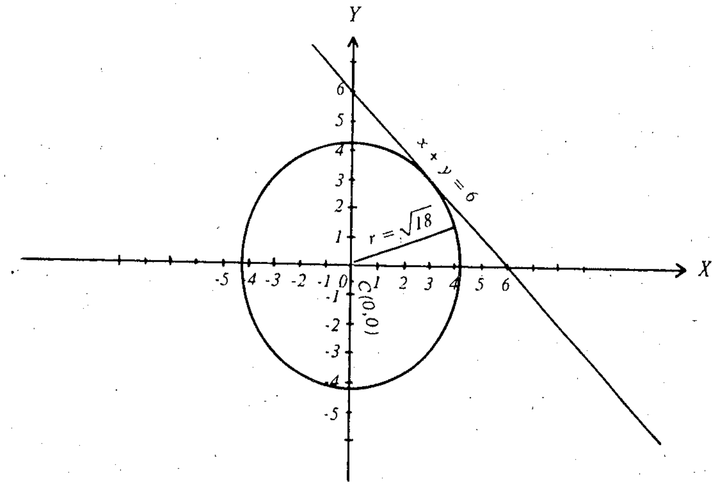
c)





d)

e)



5. a) Circunferencia con centro en $(5,4)$ y radio $= 6.$
   b) Es el punto $(3,4)$
   c) Es un lugar geométrico imaginario
   d) Circunferencia con centro en $(-1,3)$ y radio $= 5.$
6. a) $x^2 + y^2 - 2x - 19 = 0$
   b) $56x^2 + 56y^2 - 260x - y - 5451 = 0$
7. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ ó $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 13$
8. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$
9. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 26$
10. $8x^2 + 8y^2 - 144x + 576 = 0$

MODULO 6 – VALIDACION

3. $F(4,0)$; Directriz $x = -4$
4. $F(0,-3)$; Directriz $y = 3$
5. $F(0, \frac{9}{4})$; Directriz $y = -\frac{9}{4}$
6. $F(0, \frac{1}{24})$; Directriz $y = -\frac{1}{24}$
7. $F(-1,0)$; Directriz $x = 1$

8. $F(-4,0)$; Directriz $x = 4$

9. $x^2 = -12y$

10. $y^2 = -8x$

11. $x^2 = -\frac{16}{3}y$

12. $y^2 = 9x$

13. $y^2 = \frac{8}{3}x$

14. $y^2 = \frac{4}{5}x$ ó $x^2 = \frac{25}{2}y$

17. Problema 3, Lado recto $= 16$
Problema 5, Lado recto $= 9$
Problema 7, Lado recto $= 4$

18. Radio focal $= |x_0 + p| = |-1 + (-9)| = |-10| = 10$

19. $x^2 + y^2 - 10x = 0$

20. $(\frac{1}{4}, 1)$

MODULO 7 – VALIDACION

1. a) $V(1,3)$, $F(3,3)$, directriz $x = -1$, Lado recto $= 8$.

   b) $V(-\frac{1}{2}, -1)$, $F(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, directriz $y = \frac{1}{2}$, Lado recto $= 6$.

   c) $V(\frac{1}{3}, -4)$, $F(-\frac{13}{6}, -4)$ directriz $x = \frac{17}{6}$, Lado recto $= 10$.

   d) $V(0,2)$, $F(0,3)$ directriz $y = 1$, Lado recto $= 4$

2. a) $y = 2x^2 - 3x + 1$
   b) $y = -x^2 + 2x + 3$

3. a) $x = 4y^2 - 5$
   b) $x = -3y^2 + 4y + 1$

4. a) $(x - 3)^2 = -20(y - 3)$ ó $x^2 - 6x + 20y - 51 = 0$

   b) $(x + 4)^2 = 16(y + 1)$ ó $x^2 + 8x - 16y = 0$
   c) $(y - 6)^2 = 8(x - 6)$ ó $y^2 - 12y - 8x + 84 = 0$
   d) $(y + 3)^2 = -8(x + 3)$ ó $y^2 + 6y + 8x + 33 = 0$
   e) $(y - 2)^2 = \pm 6(x - 4)$

5. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 172x - 196y + 56 = 0$

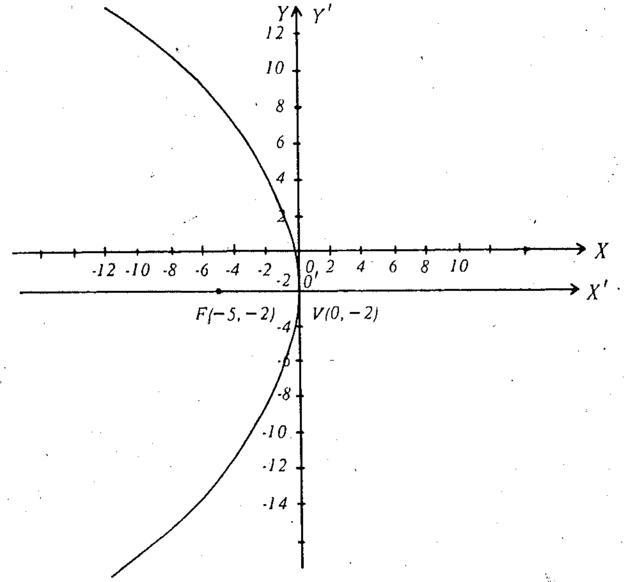
6. a) 4 km.
   b) 4 km.

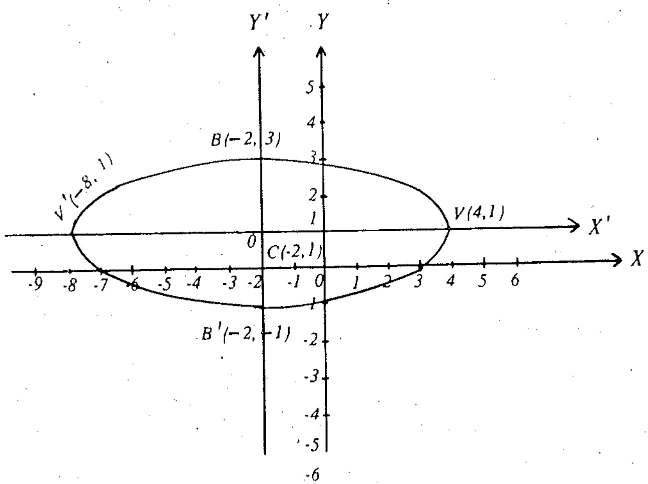
7. $x^2 = 250(y - 10)$ ó $x^2 - 250y + 2500 = 0$

MODULO 8 – VALIDACION

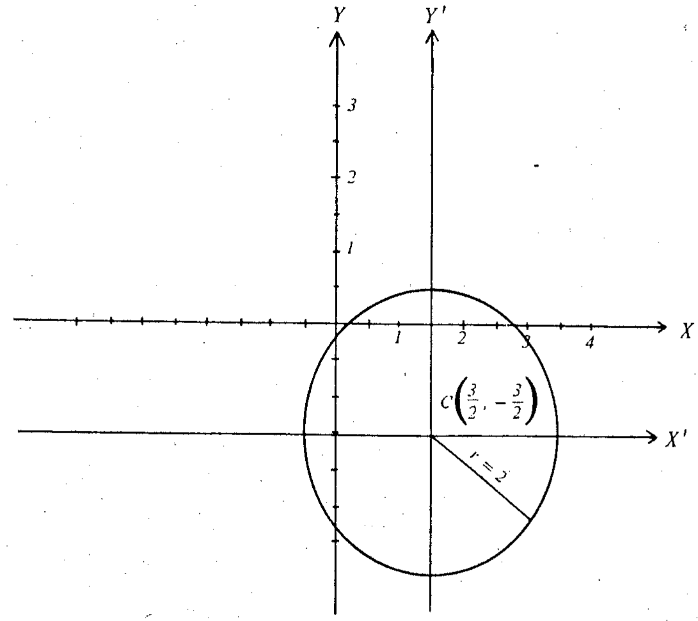
1. $x'^2 + y'^2 = 8$
2. $y'^2 = 6x'$
3. $4x'^2 + 5y' = 20$
4. $3x'^2 - 4y'^2 = -1$
5. $x'^2 = 5y'$
6. $x'^2 = 12y'$, $(1,2)$
7. $y'^2 = -20x'$, $(0, -2)$
8. $\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{4} = 1$, $(-2, 1)$
9. $x'^2 + y'^2 = 4$, $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

10.


Y
Y'
X
X'
0
0'
F(−5, −2)
V(0, −2)


Y'
Y
X'
X
B(−2, 3)
V'(−8, 1)
V(4,1)
C(-2,1)
0
B'(−2, −1)

12.


Y
Y'
X
X'
$C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
r = 2

UNIDAD XIX

SECCIONES CONICAS. ELIPSE.

Introducción

El propósito de esta unidad es presentar al estudiante un nuevo, interesante e importante material geométrico cuya utilidad será notable en cursos posteriores tanto de matemáticas como de física en temas tales como óptica y acústica.

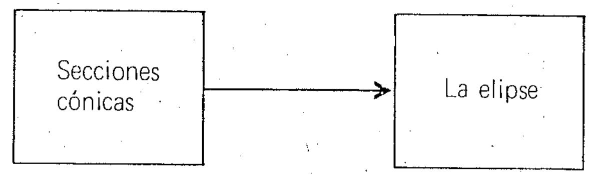
Para lograr el propósito descrito en el párrafo anterior el material es presentado en forma simple y concreta procurando al mismo tiempo reafirmar conceptos como el de relación, además de generar habilidades necesarias para determinar dominio y contradominio de una relación.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Definirá la elipse.
2. Deducirá la ecuación de una elipse con centro en el origen.
3. Determinará a partir de la ecuación de una elipse su dominio y contradominio.
4. Explicará la interpretación geométrica de la ecuación de una elipse.
5. Aplicará la traslación de ejes para simplificar la ecuación de una cónica.

Diagrama Temático Estructural



Glosario

Elipse: En un plano es la gráfica descrita por un punto que se mueve de forma tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

Focos: Son los puntos fijos a que alude la definición de elipse.

Centro: El punto medio del segmento de recta que une los focos.

2 c: Longitud del segmento que une los focos.

Vértices: Intersecciones entre el segmento de recta que contiene al centro y los focos, con la elipse.

Eje Mayor: Segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la elipse.

2 a: Longitud del eje mayor.

Eje Menor: Segmento de recta perpendicular al eje mayor en el centro de la elipse.

2 b: Longitud del eje menor.

Ecuación: Representación algebraica de la característica común a todos los puntos de la elipse y sólo a esos puntos.

Lado Recto: Segmento de recta perpendicular al eje mayor, pasa por un foco y sus extremos son puntos de la curva, L.R.

Excentricidad: Cociente que resulta de dividir la distancia de centro a foco entre la longitud del semi eje mayor.

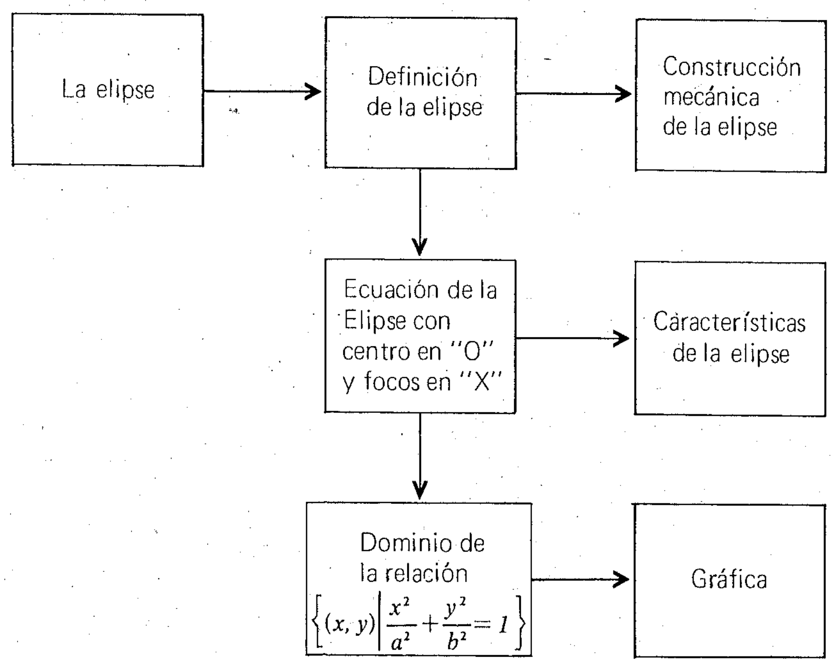
Módulo 9

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno será capaz de:

1. Dibujar una elipse utilizando un cordón sujeto por sus extremos a dos puntos.
2. Determinar las longitudes del eje mayor y menor, las coordenadas de los focos y de los vértices de una elipse con centro en el origen de ecuación dada.
3. Obtener la gráfica de una elipse con centro en el origen cuya ecuación esté definida.

ESQUEMA–RESUMEN



9.1 DEFINICION DE LA ELIPSE.

Descripción:

¿Cómo se obtiene una elipse?

Una elipse es la curva que se obtiene intersectando un cono circular recto y un plano: si el plano está inclinado y no es paralelo a una de las generatrices* y corta a una sola rama del cono. (Ver figura 1.)

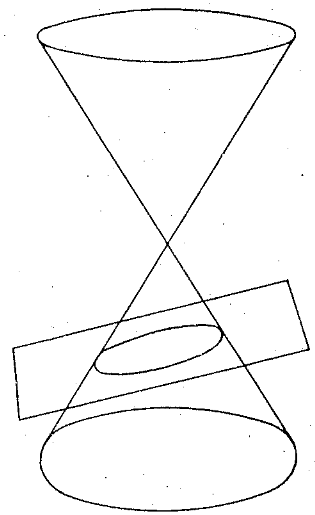


Figura 1

> **Definición:** *Una elipse, es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante.*

Estos dos puntos son conocidos como focos de la elipse, mientras que la constante será representada por 2a (ver figura 2.)

*Generatriz de una superficie cónica es una recta fija en uno de sus puntos con uno de sus extremos describiendo una circunferencia plana.

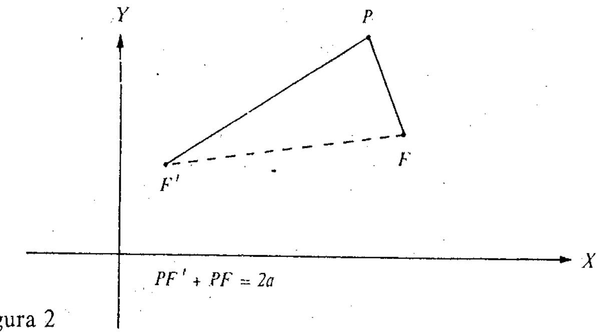


Figura 2

De la figura anterior puede deducir que la definición de la elipse sólo tiene sentido, si la constante $(2a)$ que se menciona en dicha definición es mayor que la distancia entre los focos (PF'); ésto se confirma observando que los puntos P, F y F' son los vértices de un triángulo, y recordando que para todo triángulo la suma de dos de sus lados $(PF' + PF)$ es siempre mayor que el tercero $(F'\ F)$.

La elipse tiene dos focos.

Para indicar los focos en una elipse, usamos las letras F' y F. La distancia entre estos puntos es representada por $2c$, es decir $F'\ F = 2c$; el punto medio del segmento que une los focos es el centro de la elipse. La recta que contiene a los focos y al centro intersecta la elipse en los puntos V y V' a los que llamamos Vértices, el segmento de recta que une los vértices es el eje mayor de la elipse; mostraremos que la longitud del eje mayor $(V'\ V)$ es igual con $2a$ o sea $VV' = 2a$.

En la figura 3 tenemos una elipse con su respectivo eje mayor.

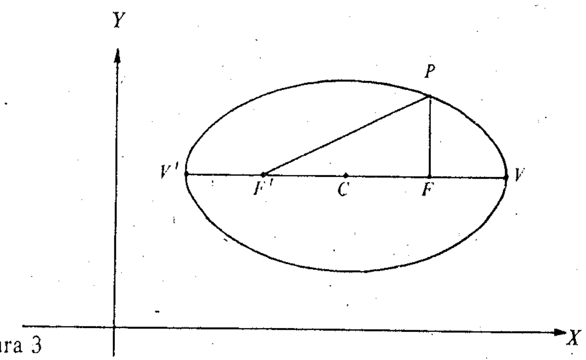


Figura 3

Los extremos del eje mayor, puntos V' y V pertenecen a la elipse por lo que:

$V'F' + V'F = 2a$	(1) Definición de elipse.
$F'V + FV = 2a$	(2) Definición de elipse.
$V'F' + V'F = F'V + FV$	(3) Propiedad transitiva de las Igualdades.

De la figura podemos confirmar que

$V'F = V'F' + F'F$ y que $F'V = F'F + FV$

Haciendo las sustituciones correspondientes en (3), tenemos

$V'F' + V'F' + F'F = F'F + FV + FV$	(4) sustitución
$2V'F' = 2FV$	(5) Efectuando operaciones indicadas.
$V'F' = FV$	(6) Ley de cancelación para multiplicación.

si FV sustituye a $V'F'$ en (1)

$FV + V'F = 2a$	(7) Sustitución.
$V'F + FV = 2a$	(8) Conmutativo para la suma.

pero como $V'F + FV = V'V$

$V'V = 2a$	(9) Sustitución.

¿Cuál es la longitud del eje mayor?

Además con la expresión obtenida en (6) y recordando que $F'C = CF$, podemos concluir que $V'O = OV = a$, o sea que los vértices de la elipse equidistan del centro, y la distancia de centro a vértice (a) es la longitud del semieje mayor.

9.2 CONSTRUCCION MECANICA DE LA ELIPSE

¡Construyamos una elipse!

En un papel dibuje dos puntos (focos) y fije en ellos los extremos de un cordón cuya longitud obviamente tendrá

que ser mayor que la distancia entre los focos. La gráfica resulta cuando sobre el papel movemos un lápiz que mantenga tirante el cordón (ver figura 4).

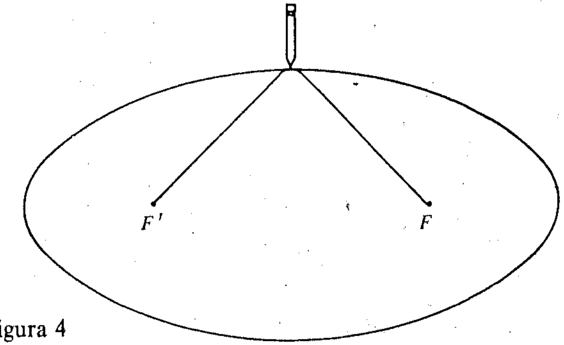


Figura 4

Observe que la longitud del cordón, es la constante mencionada en la definición de este lugar geométrico.

9.3 ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN 0 Y FOCOS EN EL EJE X.

También la elipse se determina por medio de una ecuación.

Como ya sabe, la ecuación de una curva o lugar geométrico es una representación "algebraica" de la característica común de las coordenadas de los puntos que la forman; la elipse no es la excepción y para determinar su ecuación debemos basarnos en su definición.

Dejemos que $P(x,y)$ represente a los puntos de la curva. Si $P(x,y)$ pertenece a la elipse, entonces debe cumplirse la siguiente igualdad: $F'P + FP = 2a$ (ver figura 5).

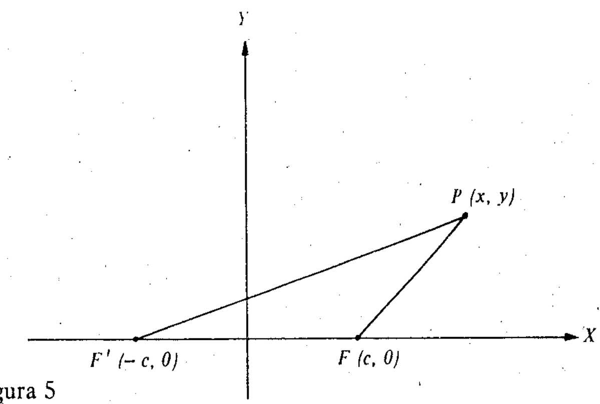


Figura 5

Empleando las coordenadas de los focos.

Esto es, la suma de sus distancias a los focos es igual a la longitud (constante) del eje mayor. $2a$. Siendo (c,o) y $(-c,o)$ las coordenadas de los focos y $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ la expresión para indicar la distancia entre dos puntos; podemos con estos datos representar la definición de la elipse en términos de las coordenadas de sus puntos.

Si $F'P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ y $FP = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

entonces: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

Aunque esta ecuación representa la condición que satisfacen las coordenadas de los puntos en la elipse, deduciremos una ecuación más fácil de manipular; con ese objeto dejamos en un miembro de la igualdad a un radical

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad tenemos:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

ó:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

cancelando sumandos iguales en ambos miembros de la ecuación resulta:

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2\ y^2} + 2cx$$

dejando a $4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ sólo en un miembro de la igualdad

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Dividiendo entre 4 y elevando al cuadrado, resulta:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

ó:

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

Por la ley de cancelación para la suma

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

Dejando los términos variables en un lado de la igualdad y los constantes en el otro

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

a es mayor que c

Dado que a (distancia de centro a vértice) es mayor que c (distancia de centro a foco) entonces $a^2 > c^2$ por lo que $a^2 - c^2 > 0$. Esta diferencia se acostumbra representar por b^2 ó sea $b^2 = a^2 - c^2$. Haciendo la sustitución correspondiente en la última igualdad, obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

y si dividimos esta ecuación por a^2b^2, resulta:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b}$$

Ecuación conocida como **forma normal** de la ecuación de la elipse.

9.4 DOMINIO DE LA RELACION $\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

¿Cuál es el dominio para la ecuación de la elipse?

Dominio de esta relación, es el conjunto de números reales los cuales al sustituir a x en la ecuación, generan valores reales para y. Determinemos dicho dominio resolviendo la ecuación para y.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) Dado.

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ (2) Propiedad aditiva de igualdades.

$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$ (3) Efectuando operaciones indicadas.

$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2)$ (4) Definición de cociente.

y a^2 ... iedad multiplicativa de igualdades.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (6) \text{ Si } m^2 = n^2 \rightarrow m = n \text{ ó } m = -n.$$

Para que y sea un número real, es suficiente que el radicando $a^2 - x^2$ sea positivo o cero, esto es $a^2 - x^2 \geqslant 0$.

si $\quad a^2 - x^2 \geqslant 0$

entonces: $\quad a^2 \geqslant x^2$

ó $\qquad x^2 \leqslant a^2$

luego, $\quad |x| \leqslant a$

por lo que $-a \leqslant x \leqslant a$

Entonces concluímos que

si $-a \leqslant x \leqslant a$ entonces $y \in R$

El dominio de la relación es $\left\{ x \in R \mid -a \leqslant x \leqslant a \right\}$

9.5 INTERSECCIONES

Determinación de las intersecciones de la elipse.

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, tenemos que $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ ó $x^2 = a^2$ de donde $x = a$ ó $x = -a$, entonces los puntos $V'(-a,0)$ y $V(a,0)$ son las intersecciones de la elipse con el eje x.

Pero si hacemos $x = 0$ en la misma ecuación resulta

$$\frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = b^2$$

$$y = b \text{ ó } y = -b$$

entonces $B(0,b)$ y $B'(0,-b)$ son los puntos donde la elipse intersecta al eje Y.

El segmento $B'B$ recibe el nombre de eje menor de la elipse y su longitud es obviamente $B'B = 2b$ (ver figura 6).

Análisis de la gráfica de la elipse.

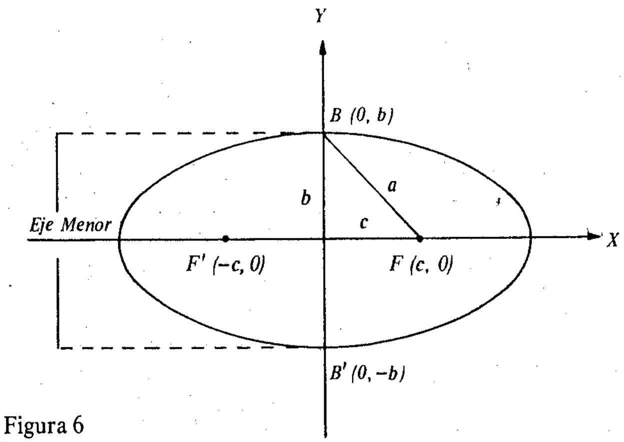


Figura 6

De la figura anterior podemos notar que b y c son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es a; $(b^2 = a^2 - c^2)$. Siendo la hipotenusa el mayor de los tres lados del triángulo podemos justificar que $a > b$, que $2a > 2b$ y el porqué de los nombres eje mayor $(2a)$ y eje menor $(2b)$.

Ejemplo 1:

Determine la longitud del eje mayor y del eje menor, las coordenadas de los focos y de los vértices y grafique la elipse definida por la siguiente ecuación:

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

Solución:

Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 144

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

como $a^2 > b^2$ entonces $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$ por lo que

$$a = 4 \text{ y } b = 3$$

De ahí que la elipse intersecta los ejes coordenados en

$$V'(-4,0),\ V(4,0),\ B'(0,-3) \text{ y } B(0,3)$$

y además el eje mayor $2a = 8$ y el eje menor $2b = 6$. Ahora bien, si $b^2 = a^2 - c^2$ entonces $c^2 = a^2 - b^2$ y sustituyendo $c^2 = 16 - 9$, $c^2 = 7$ ó $c = \sqrt{7}$, las coordenadas de los focos son $F'(-\sqrt{7},0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$ (ver figura 7).

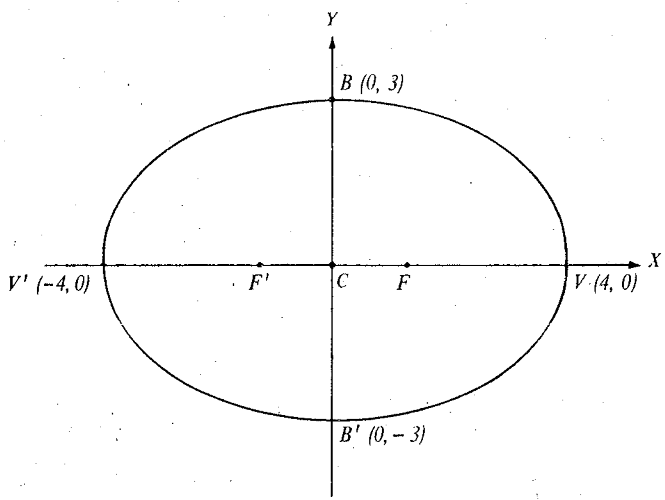


Figura 7

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine en cada caso las longitudes del eje mayor y del eje menor. Las coordenadas de los focos, de los vértices y grafique.

1. $2x^2 + 8y^2 = 32$
2. $16x^2 + 25y^2 = 400$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$
4. $x^2 + 9y^2 = 9$
5. $x^2 + 4y^2 = 4$
6. $4x^2 + 7y^2 = 28$
7. $4x^2 + 9y^2 = 1$ NOTA $4x^2 = \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}$ y $9y^2 = \dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}$
8. $16x^2 + 25y^2 = 1$ NOTA $16x^2 = \dfrac{x^2}{\frac{1}{16}}$ y $25y^2 = \dfrac{y^2}{\frac{1}{25}}$

Determine en cada caso la ecuación de la elipse con centro en $O(0,0)$ que cumple las siguientes condiciones

9. $V(5,0)$ $F(3,0)$
10. $2a = 10$ $F(4,0)$
11. $V(4,0)$ $b = 2$

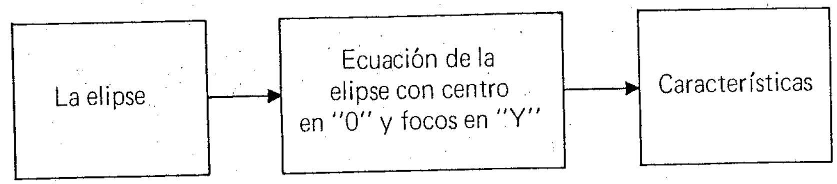
Módulo 10

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará la distancia entre los focos de una elipse y su excentricidad conocidas las longitudes de los semiejes.
2. Encontrará la ecuación de una elipse con centro en el origen que satisfaga ciertas condiciones dadas.

ESQUEMA–RESUMEN



10.1 EXCENTRICIDAD

Habrá notado que todas las circunferencias tienen la misma forma, es decir, son similares aunque los radios sean diferentes; lo mismo sucede con las parábolas. Sin embargo, ésto no acontece con las elipses; en ocasiones tienden a ser "redondas", en otras ocasiones son "alargadas". Como una medida de "redondez" o bien de "alargamiento", existe un número definido por el cociente $\frac{c}{a}$ llamado *excentricidad* que es representado por e. Entonces $e = \frac{c}{a}$

¿Cómo se interpreta la excentricidad en una elipse?

Para cualquier elipse $c < a$, por lo que $\frac{c}{a} < 1$ ó $e < 1$.

Esto significa que la excentricidad de una elipse siempre es menor que 1.

Como para toda elipse $a^2 = b^2 + c^2$ entonces $c^2 = a^2 - b^2$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ La excentricidad podemos representarla términos de "a" y "b" así;

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$$

Cuando dos elipses tienen la misma excentricidad...

Dos elipses tienen la misma forma, si y sólo si su excentricidad es la misma; sin embargo la forma de la elipse depende de "a" y "b" que son respectivamente las longitudes del semieje mayor y el semieje menor. Esto lo confirmamos si la ecuación:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$ la escribimos como:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2}}, \qquad a = \sqrt{a^2}$$

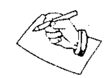
ó $$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

y $$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Consecuentemente todas las elipses para las cuales el cociente $\frac{b}{a}$ es el mismo, tienen la misma excentricidad y recíprocamente dos elipses con la misma excentricidad tienen el mismo cociente $\frac{b}{a}$.

¿Qué sucede si $c = 0$?

Si en una elipse dejamos constante la longitud $2a$ y permitimos que cada uno de los focos se aproxime al otro, la forma de la elipse se hará "más redonda" y cuando los focos coincidan en el centro de la elipse $(c = 0)$ ésta se habrá convertido en una circunferencia. Es por ello que una circunferencia se describe o define en ocasiones, como una elipse de excentricidad 0. o como una elipse de ejes iguales, $a = b$



Ejemplo 1:

Si los semiejes de una elipse miden 6 y 10 unidades de longitud, determine la distancia entre los focos y la excentricidad.

Solución:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\ ; \quad a = 10 \quad b = 6$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{10}\right)^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$e = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}}$$

$$e = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$e = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \qquad \text{pero } c \neq 4$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{100 - 36}$$

$$c = \sqrt{64} \quad c = 8 \therefore 2c = 16$$

10.2 LADO RECTO

Definición de lado recto.

> En una elipse, lado recto es el segmento de recta perpendicular al eje mayor en uno de los focos, si los extremos de dicho segmento son puntos de la curva. (Ver figura 8.)

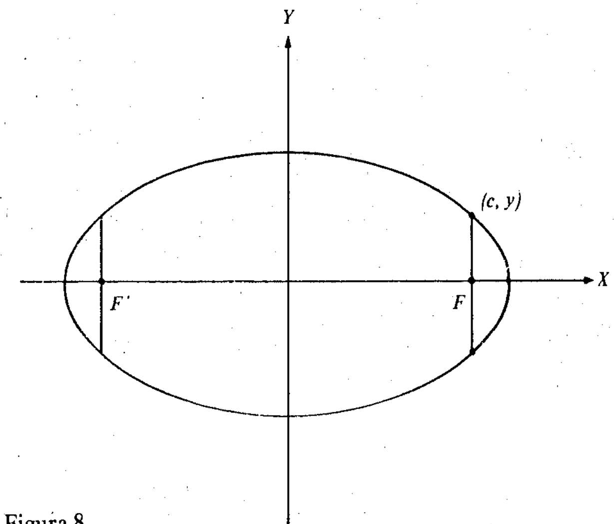


Figura 8

¿Cuántos lados rectos tiene una elipse?

Cada elipse tiene dos lados rectos; a nosotros nos interesa una expresión que nos permita determinar su longitud y lo haremos estableciendo la distancia entre los puntos extremos de uno de ellos. Para eso necesitamos conocer las coordenadas de dichos puntos y ésto lo logramos resolviendo el sistema de ecuaciones formado por la elipse y el lado recto. Como el lado recto es perpendicular al eje *"X"*, resulta paralelo al eje *"Y"*, por lo que todos sus puntos

están a la misma distancia *"c"* de dicho eje; entonces la ecuación del lado recto es $x = c$ ó $x = -c$ y el sistema de ecuaciones es

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(2) \quad x = \pm c$$

sustituyendo (2) en (1) tenemos

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ó $$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad b^2 \text{ sustituye a } a^2 - c^2$$

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y = \pm\frac{b^2}{a} \qquad \text{(ver figura 9)}$$

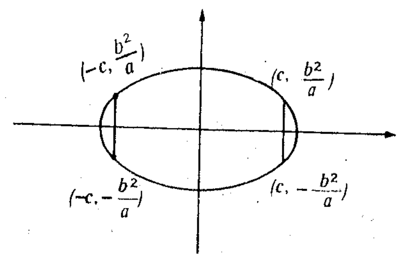


Figura 9

Si de la figura 9 no alcanza a comprender que la longitud del lado recto que representamos por $L.R.$ es $L.R. = \frac{2b^2}{a}$, puede valerse de la expresión $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para confirmarlo.

Ejemplo 1:

Determine la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones:

· Su lado recto mide $\frac{9}{2}$ unidades, un vértice es el punto $V\ (4,0)$ y su centro es el origen

Solución:

$$L.R. = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad a = 4 \quad \text{entonces}$$

$$(1)\ \frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad (2)\ a = 4$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos variables (a y b) se resuelve sustituyendo la a de (2) en (1) con lo que resulta:

$$\frac{2b^2}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{b^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$b^2 = 9$$

Dado que $a = 4$ entonces $a^2 = 16$ por lo que la ecuación pedida es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

10.3 ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN O Y FOCOS EN EL EJE Y.

Si el centro de la elipse coincide con el origen de coordenadas y los focos están en el eje Y, los focos son los puntos $F'(0,-c)$ y $F\ (0,c)$. (Ver figura 10.)

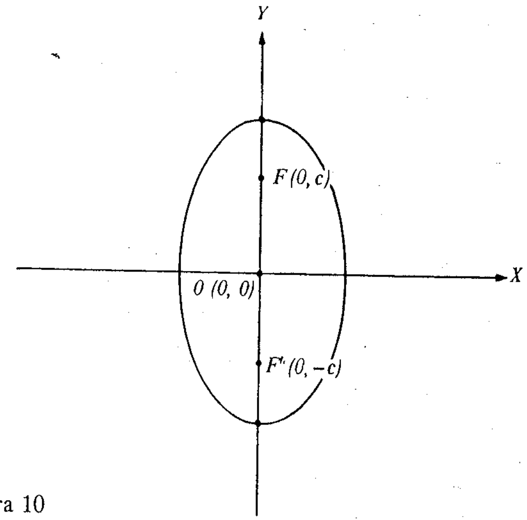


Figura 10

También los focos de la elipse pueden estar en el eje Y

La definición de elipse nos dice que $F'P + FP = 2a$, lo cual expresado en términos de las coordenadas de los puntos, es

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$$

Procediendo igual que en el caso anterior obtenemos la ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a > b}$$

Haciendo $x = 0$ en la ecuación, determinamos que la curva intersecta al eje "Y" en los puntos $V\ (0,a)$ y $V'(0,-a)$. (Ver figura 11.)

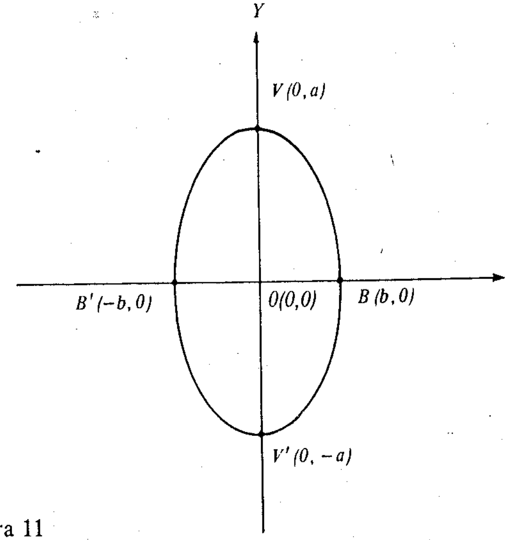


Figura 11

La excentricidad y el lado recto no cambian de expresión.

Si ahora hacemos $y = 0$, encontramos que la gráfica intersecta al eje X en los puntos $B(b,0)$ y $B'(-b,0)$. (Ver figura 11.)

La longitud del lado recto sigue siendo $L.R. = \frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad $e = \frac{c}{a}$.

Ejemplo 1:

Determine la longitud del eje mayor y del eje menor, las coordenadas de los focos y grafique la elipse definida por la siguiente ecuación:

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

Solución:

Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 100

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

como $a^2 > b^2$ entonces $a^2 = 25$ y $b^2 = 4$ por lo que

$$a = 5 \quad \text{y} \quad b = 2$$

Luego, la elipse intersecta a los ejes coordenados en $V(0,5)$, $V'(0,-5)$, $B(2,0)$ y $B'(-2,0)$, de ahí que el eje mayor, $2a = 10$ y el eje menor, $2b = 4$ si $a^2 = b^2 + c^2$ entonces $c^2 = a^2 - b^2$ y $c^2 = 25 - 4$, $c^2 = 21$ y $c = \sqrt{21}$ siendo entonces los focos los puntos $F(0,\sqrt{21})$ y $F'(0 - \sqrt{21})$

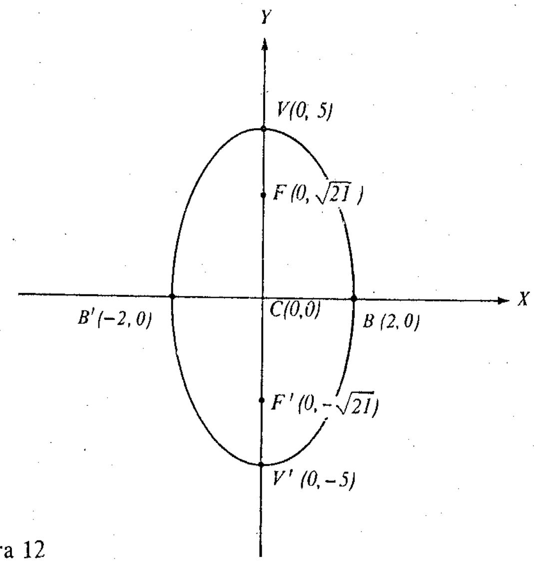


Figura 12

Ejemplo 2:

Determine la ecuación de la elipse que tiene su centro en el origen y además cumple con las condiciones siguientes:

Un vértice es $V(0,5)$ y un foco es $F'(0,3)$

Solución:

Los datos indican que el eje mayor coincide con el eje

Y por lo que la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$,

además sabemos que $a = 5$, y que $c = 3$; debemos conocer el valor de b^2 para determinar la ecuación de la elipse, como $b^2 = a^2 - c^2$ entonces $b^2 = 25 - 9$ ó $b^2 = 16$.

sustituyendo $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$ tenemos

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

que es la ecuación buscada.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. La excentricidad de una elipse es $e = \frac{3}{4}$ y la longitud del semieje menor es de 2 unidades. ¿Cuál es la medida del eje mayor?
2. El eje mayor de una elipse mide el doble de la longitud del eje menor. ¿Cuál es la excentricidad de dicha elipse?
3. El eje mayor de una elipse mide 26 unidades si la excentricidad es $e = \frac{5}{13}$ ¿Cuál es la longitud del eje menor?
4. Los semiejes de una elipse miden 3 unidades y 5 unidades de longitud. Encuentre la distancia entre los focos y la excentricidad.
5. Encuentre la ecuación de la elipse con vértices en los puntos $(-2,0), (2,0)$ y excentricidad $e = \frac{2}{3}$
6. Encuentre la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones, focos en $(3,0)$ y $(-3,0)$ longitud del lado recto es $L.R. = 9$.
7. Determine la ecuación de la elipse con vértices en $(-6,0)$ y $(6,0)$ con longitud de su lado recto dado por $L.R. = \frac{20}{3}$
8. $L.R. = 4, \; b = 4, \; C\,(0,0) \quad a = ?$
9. $L.R. = 1, \; a = 4, \; C\,(0,0) \quad b = ?$
10. $L.R. = 2, \; V\,(9,0), \; C\,(0,0) \quad b = ?$
11. $V\,(4,0), \; B\,(0,3), \; C\,(0,0) \quad L.R. = ?$
12. $V\,(\pm 5,0), \; F\,(\pm 3,0), \; C\,(0,0) \quad L.R. = ?$

Determine en cada caso longitud de cada eje, longitud del lado recto, coordenadas de los focos, los vértices, la excentricidad y grafique.

13. $4x^2 + y^2 = 16$
14. $9x^2 + y^2 = 9$
15. $5x^2 + ay^2 = 45$
16. $25x^2 + 9y^2 = 225$
17. $36x^2 + 4y^2 = 144$
18. $16x^2 + 9y^2 = 144$
19. $16x^2 + 3y^2 = 48$
20. $16x^2 + 9y^2 = 1$
21. $36x^2 + 4y^2 = 1$
22. $9x^2 + y^2 = 1$

Determine en cada caso la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas que cumple con las siguientes condiciones. (De aquí en adelante tendrá que distinguir si se hace referencia a la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ o bien a ambas).

23. Un vértice es $(0,4)$ y pasa por el punto $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$
24. El eje mayor coincide con uno de los ejes coordenados y la gráfica pasa por los puntos $A(4,3)$ y $B(6,2)$
25. Vértices en $(0, \pm 6)$; focos en $(0, \pm 4)$
26. Los ejes de la elipse coinciden con los ejes coordenados

$$L.R. = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad e = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

27. Haciendo uso de la definición determine la ecuación de la elipse con focos en $(0,3)$, y $(0,-3)$ con eje mayor de 10 unidades de longitud.

Módulo 11

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Encontrará la ecuación de una elipse con centro en el punto (h, k) y que satisfaga ciertas condiciones dadas.
2. Analizará la ecuación general de una elipse y obtendrá centro, focos, vértices, excentricidad y lado recto.
3. Graficará una elipse a partir de su ecuación general.

ESQUEMA–RESUMEN

Ecuación cartesiana de la elipse. → Otras formas de la ecuación de la elipse. → Aplicaciones

11.1 OTRAS FORMAS DE LA ECUACION DE LA ELIPSE

En este tema consideraremos elipses cuyo centro no coincide con el origen de coordenadas, pero sólo aquellas cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Sus ecuaciones pueden determinarse mediante el método usado en los temas anteriores, pero como es demasiado laborioso, nos valdremos de lo que ha aprendido acerca de la traslación de ejes para simplificar nuestro trabajo.

Veamos la elipse cuando su centro está fuera del origen.

Sea una elipse con centro en el punto $C(h,k)$ con su eje mayor parelelo al eje X. (Ver figura 15.)

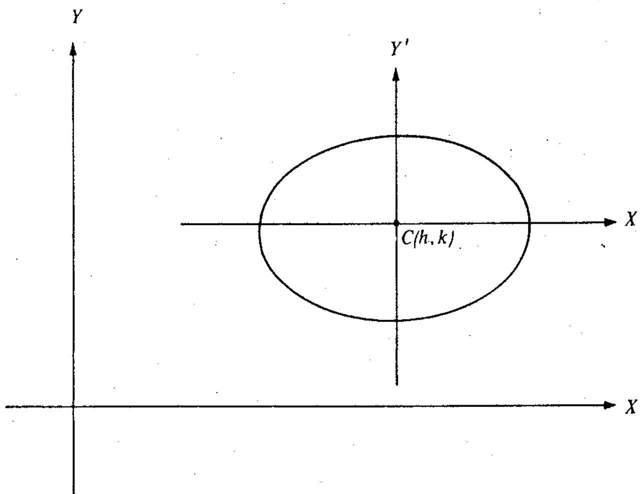


Figura 15

Construyamos un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ cuyo origen coincida con el punto $C(h.k)$ y sus ejes sean paralelos a los ejes X y Y (Ver figura 15.)

Con respecto a este nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la elipse es $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Para referir este conjunto de puntos a los ejes originales X, Y, necesitamos sustituir x' y y' por sus equivalentes en términos de x y y, y como $x' = x - h$ y $y' = y - k$ (ver figura 16).

Efectuando la sustitución tenemos:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

que es la ecuación de la elipse (referida a los ejes X, Y) con centro en el punto (h,k) con su eje mayor paralelo al eje X. (Ver figura 16.)

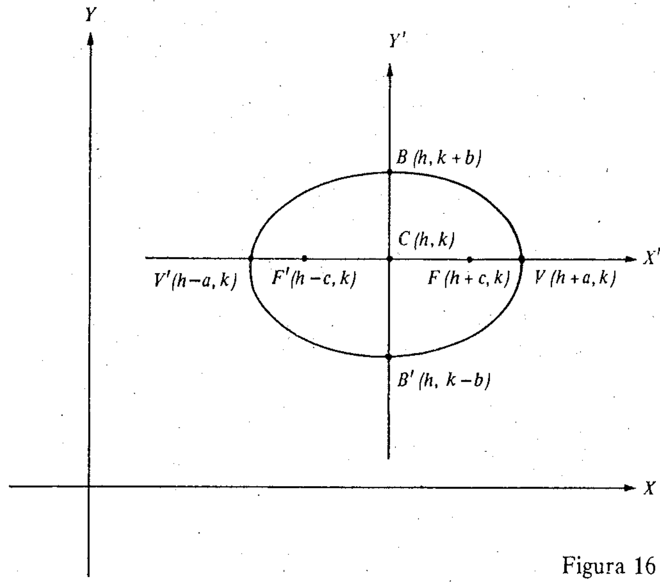


Figura 16

También podemos determinar sus elementos.

Las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje menor, se determinan a partir del centro de la elipse. Una vez conocidos los valores correspondientes de a, c y b. La longitud del lado recto sigue siendo $L.R. = \frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad $e = \frac{c}{a}$. La ecuación del eje mayor es:

$$y = k, \; h - a \leqslant x \leqslant h + a$$

y la ecuación del eje menor es $x = h;\; k - b \leqslant y < k + b$

Determine la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones, vértices: $V'(-10,6)$ $V(10,6)$

$$L.R. = 10 \text{ ó } \frac{2b^2}{a} = 10$$

Solución:

El centro de la elipse es el punto medio del segmento $(V'V)$ que une los vértices entonces $C(0,6)$ es el centro, y $a = 10$. Como el eje mayor es horizontal la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, de la cual conocemos h, k y a^2 quedando por determinar sólo b^2 este valor resulta al sustituir el valor de a en $\frac{2b^2}{a} = 10$ resultando $b^2 = 50$ por lo que la ecuación de la elipse dada es

$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-6)^2}{50} = 1$ (ver figura 17).

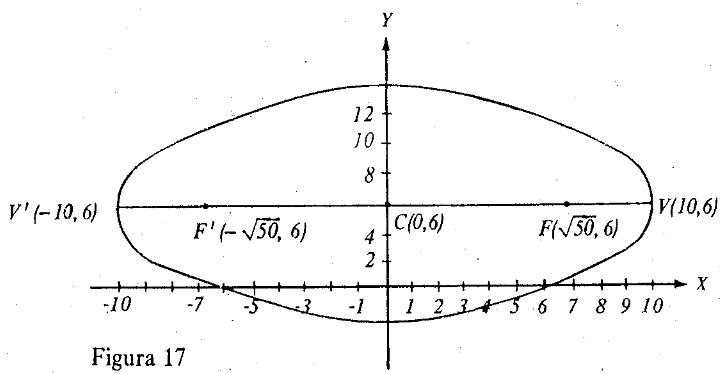


Figura 17

Si pensamos en una elipse con su centro en un punto distinto del origen y su eje mayor paralelo al eje Y, el método usado en el caso anterior nos lleva a la ecuación.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad a > b$$

La confirmación de este hecho se propone como problema para autoevaluación.

Ejemplo 2:

Usando la definición, determine la ecuación de la elipse con focos en $F'(3,-1)$ y $F(3,5)$ siendo 10 unidades la longitud de su eje mayor.

Solución:

De acuerdo con la definición, la suma de las distancias de un punto $P(x,y)$ en la elipse a los focos es $2a$ entonces $F'P + FP = 2a$ y como

$$F'P = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

$$FP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$$

$$2a = 10$$

tenemos $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = 10$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación resulta:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\ (x-3)^2 + (y-5)^2$$

Efectuando y simplificando:

$$3y - 31 = -5\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$$

ó:

$$5\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = -3y + 31$$

y elevando al cuadrado nuevamente

$$25(x-3)^2 + 25(y-5)^2 = 9y^2 - 186y + 961$$

efectuando las operaciones indicadas y simplificando:

$$25x^2 - 150x + 16y^2 - 64y = 111$$

factorizando

$$25(x^2 - 6x) + 16(y^2 - 4y) = 111$$

completando trinomios cuadrados perfectos

$$25(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 4y + 4) = 111 + 25 \cdot 9 + 16 \cdot 4$$

ó:

$$25(x - 3)^2 + 16(y - 2)^2 = 400$$

$$\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1$$

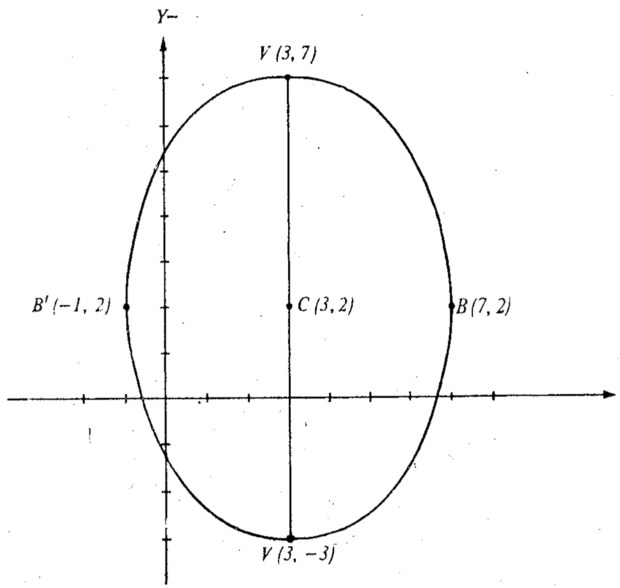


Figura 18

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine la ecuación de la elipse que satisface las condiciones especificadas en cada caso y grafique con todo detalle.

1. Eje mayor de 20 unidades, eje menor mide 12 unidades, centro en $(-3,2)$ eje menor paralelo al eje X.
2. Focos en $(1,-2)$, y $(7,-2)$ eje menor mide 8 unidades.
3. $V'(-8,5)$, $V(12,5)$ $L.R. = 5$
4. $V'(0,0)$, $V(10,0)$, $F'(1,0)$, $F(9,0)$
5. $F'(2,-2)$, $F(2,6)$, eje mayor mide 10 unidades
6. $V'(-3,-5)$ $V(-3,3)$ $e = \frac{3}{4}$
7. $F'(-1,0)$ $F(-1,8)$ $e = \frac{2}{3}$
8. Usando la definición determine la ecuación de la elipse con focos en los puntos $F'(-2,2)$, $F(6,2)$ y eje mayor $2a = 10$.

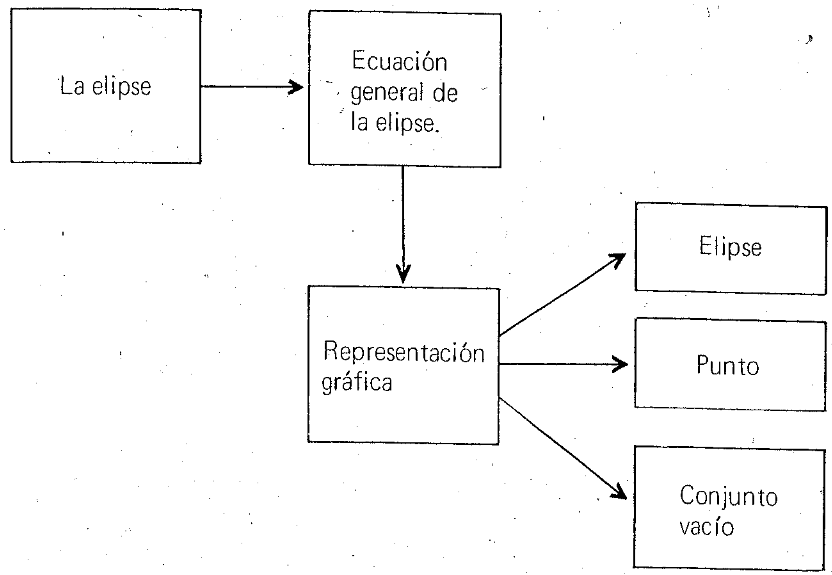
Módulo 12

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno será capaz de:

1. Determinar si la ecuación general de una cónica representa una elipse, un punto o al conjunto vacío.
2. Obtener la ecuación de la elipse dadas ciertas condiciones específicas.

ESQUEMA–RESUMEN



12.1 ECUACION GENERAL DE LA ELIPSE.

En el módulo 1 de la Unidad XVIII, aprendió que las curvas que se estudian en estos temas, siempre se pueden representar por medio de la ecuación cuadrática.

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.}$$

La ecuación general puede representar a un punto o al conjunto vacío

Mostraremos que dicha ecuación puede representar una elipse con sus ejes paralelos a los ejes coordenados o coincidiendo con ellos, cuando en la ecuación $B = 0$ y además $AC > 0$ con $A \neq C$. Pero también puede ser que su gráfica se reduzca a un punto o bien que represente al conjunto vacío. En este último caso debemos entender que ningún punto del plano tiene coordenadas que hagan cierta la ecuación.

Sea

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde

$$B = 0,\ AC > O \text{ y } A \neq C$$

esta ecuación puede escribirse en formas equivalentes así:

$$Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey = -F$$

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) = -F$$

completando los trinomios cuadrados perfectos resulta

$$A\left[x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right] + C\left[y^2 + \frac{E}{C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right]$$

$$= \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} = -F.$$

factorizando

$$A(x + \frac{D}{2A})^2 + C(y + \frac{E}{2C})^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

Hagamos $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = N$

Si $N = 0$, entonces $A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0;$

como $A \cdot C > 0$, A y C son ambos positivos o ambos negativos, consecuentemente los sumandos $A(x + \frac{D}{2A})^2$ y $C(y + \frac{E}{2C})^2$ son también ambos positivos o ambos negativos o cero, es por ello que la suma es igual a cero solamente si ambos sumandos son cero y eso sucede cuando

$x = -\frac{D}{2A}$ y $y = -\frac{E}{2C}$ es decir sólo el par ordenado $(-\frac{D}{2a}, -\frac{E}{2c})$ hace cierta la ecuación, por lo que su gráfica se reduce a un punto. Si $N = 0$, la gráfica es un punto

Si $N > 0$

Al sustituir tenemos $A(x + \frac{D}{2A})^2 + C(y + \frac{E}{2C})^2 = N$

y dividiendo entre N

$$\frac{A}{N}(x + \frac{D}{2A})^2 + \frac{C}{N}(y + \frac{E}{2C})^2 = 1$$

pero

$$\frac{A}{N} = \frac{1}{\frac{N}{A}} \text{ y } \frac{C}{N} = \frac{1}{\frac{N}{C}}$$

$$\frac{1}{\frac{N}{A}}\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{1}{\frac{N}{C}}\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 1$$

o bien

Analizar bien esta ecuación.

$$\boxed{\frac{(x+\frac{D}{2A})^2}{\frac{N}{A}}+\frac{(y+\frac{E}{2C})^2}{\frac{N}{C}}=1}$$

Esta ecuación se reconoce como la ecuación de una elipse con centro en el punto $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C})$, es decir que $h = -\frac{D}{2A}$ y $k = -\frac{E}{2C}$. El eje mayor es horizontal cuando $\frac{N}{A} > \frac{N}{C}$*, ó en forma más simple $A > C$. Obviamente el eje mayor resulta paralelo al eje Y cuando $C > A$.

Si $N < 0$ con $A > 0$ y $C > 0$, la ecuación representa al conjunto vacío, es decir no tiene representación geométrica en el plano real.

Ejemplo 1:

Determine si la siguiente ecuación representa una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$9x^2 + 25y^2 + 36x - 50y - 164 = 0$$

Solución:

La ecuación dada puede representarse de las formas equivalentes:

$$9x^2 + 36x + 25y^2 - 50y = 164$$

$$9(x^2 + 4x) + 25(y^2 - 2y) = 164$$

$$9(x^2 + 4x + 4) + 25(y^2 - 2y + 1) = 164 + 36 + 25$$

$9(x + 2)^2 + 25(y - 1)^2 = 225$; $N = 225$ entonces $N > 0$

$$\frac{9(x+2)^2}{225} + \frac{25(y-1)^2}{225} = 1$$

* Si $\frac{N}{A} > \frac{N}{C} \rightarrow \frac{N}{A} = a^2$ y $\frac{N}{C} = b^2$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{225}{9}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{225}{25}} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)}{9} = 1$$

esta es una elipse con $C(-2,1)$ $a = 5,$ $b = 3;$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $\therefore$ $c = \sqrt{25 - 9}$ $c = 4$

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$$

$$e = \frac{4}{5}$$

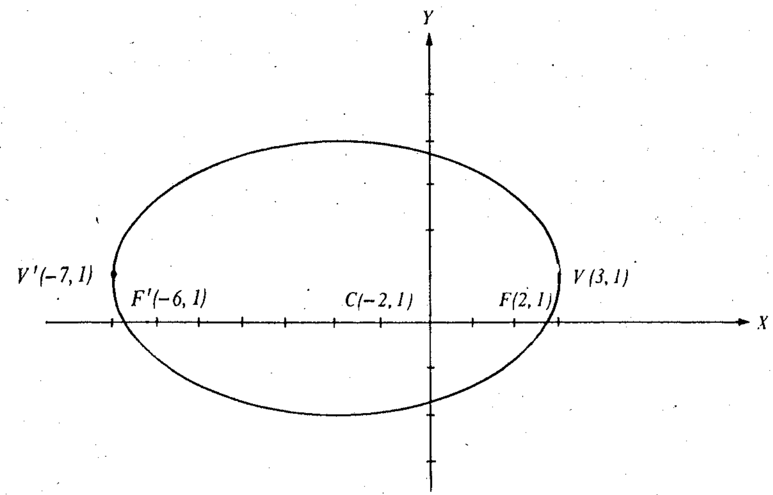


Figura 14

Ejemplo 2

Determine si la ecuación dada representa una elipse, un punto ó al conjunto vacío.

$$9x^2 + 25y^2 - 36y - 50y + 61 = 0$$

Solución:

Procediendo igual que en el ejemplo anterior tenemos:

$$9x^2 - 36x + 25y^2 - 50y = -61$$

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 2y) = -61$$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 - 2y + 1) = -61 + 36 + 25$$

$$9(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 = 0$$

$$N = 0$$

por lo que representa al punto (1,2)

Ejemplo 3:

Determine si la siguiente ecuación representa a una elipse, a un punto o al conjunto vacío.

$$9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 65 = 0$$

Solución:

En este caso

$$A = 9,\ C = 25,\ D = -36,\ E = -50,\ F = 65$$

como

$$N = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

entonces

$$N = \frac{(-36)^2}{4 \cdot 9} + \frac{(-50)^2}{4 \cdot 25} - 65$$

o bien

$$N = \frac{36 \cdot 36}{36} + \frac{50 \cdot 50}{2 \cdot 2 \cdot 25} - 65$$

$$N = 36 + 25 - 65$$

$$N = -4$$

$$N < 0$$

por lo tanto $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 65 = 0$ no tiene representación en el plano real.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

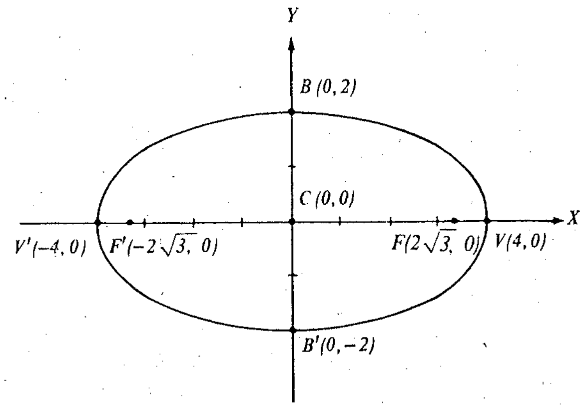
En el siguiente conjunto de problemas determine en cada caso si la ecuación dada representa una elipse, un punto ó el conjunto vacío; en caso de ser una elipse encuentre: centro, focos, vértices, excentricidad, lado recto y finalmente graficarla.

1. $x^2 - 8x + 4y^2 = 0$
2. $x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0$
3. $25x^2 + 4y^2 + 100x = 0$
4. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y - 252 = 0$
5. $9x^2 + 25y^2 + 36x - 50y - 164 = 0$
6. $9x^2 + 16y^2 - 18x + 32y + 24 = 0$
7. $2x^2 + y^2 + 12x - 43 = 0$
8. $5x^2 + y^2 - 10x - 2y + 71 = 0$
9. $7x^2 + 6y^2 + 14x - 24y + 32 = 0$
10. $8x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 62 = 0$
11. $8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$
12. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$

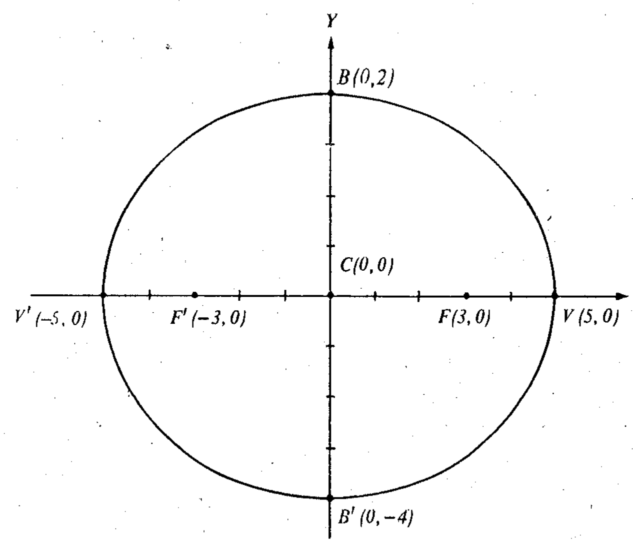
Páneles de verificación

MODULO 9 – VALIDACION

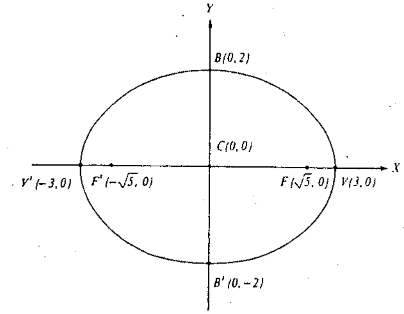
1. $2a = 8,\ 2b = 4,\ F'(-2\sqrt{3},\ 0),\ F(2\sqrt{3},\ 0),\ V'(-4,0),\ V(4,0)$



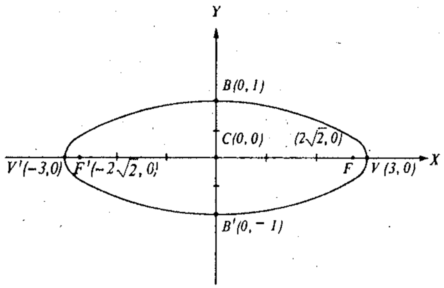
2. $2a = 10,\ 2b = 8,\ F'(-3,0),\ F(3,0),\ V'(-5,0),\ V(5,0)$



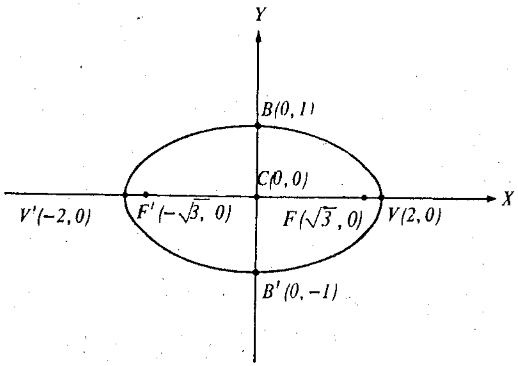
3. $2a = 6,\ 2b = 4,\ F'(-\sqrt{5},\ 0),\ F(\sqrt{5}, 0),\ V'(-3, 0),\ V(3, 0)$



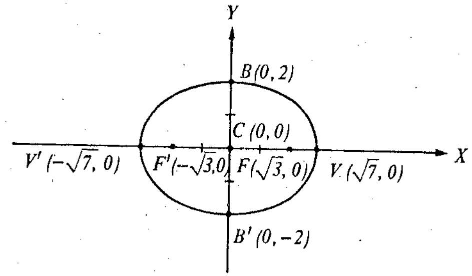
4. $2a = 6,\ 2b = 2,\ F'(-2\sqrt{2},\ 0),\ F(2\sqrt{2},\ 0), V'(-3, 0),\ V(3, 0)$



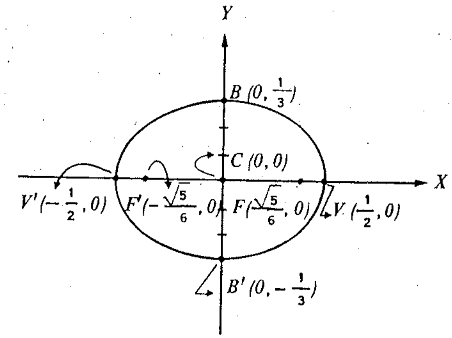
5. $2a = 4,\ 2b = 2,\ F'(-\sqrt{3},\ 0), F(\sqrt{3},\ 0),\ V'(-2, 0),\ V(2, 0)$



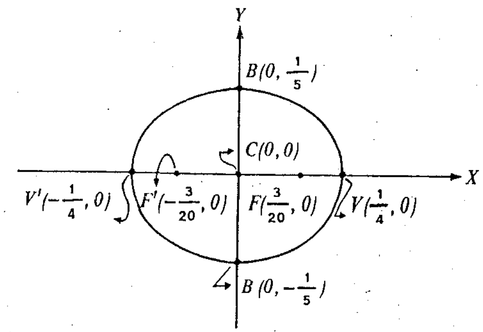
6. $2a = 2\sqrt{7},\ 2b = 4,\ F'(-\sqrt{3},\ 0),\ F(\sqrt{3},\ 0),\ V'(-\sqrt{7},\ 0),\ V(\sqrt{7},\ 0)$



7. $2a = 1,\ 2b = \frac{2}{3},\ F'(-\frac{\sqrt{5}}{6},\ 0),\ F(\frac{\sqrt{5}}{6},\ 0),\ V'(-\frac{1}{2},\ 0),\ V(\frac{1}{2},\ 0)$



8. $2a = \frac{1}{2},\ 2b = \frac{2}{5},\ F'(-\frac{3}{20},\ 0),\ F(\frac{3}{20},\ 0), V'(-\frac{1}{4},\ 0),\ V(\frac{1}{4},\ 0)$



9. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ó $16x^2 + 25y^2 = 400$

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ó $9x^2 + 25y^2 = 225$

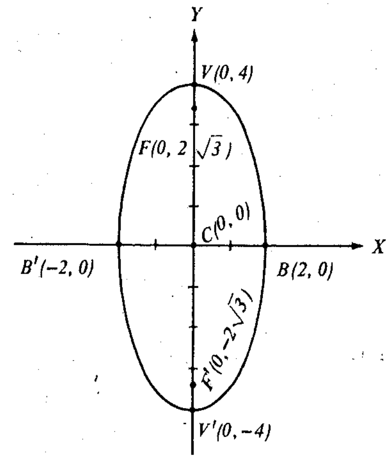
11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ó $4x^2 + 16y^2 = 64$

MODULO 10 – VALIDACION

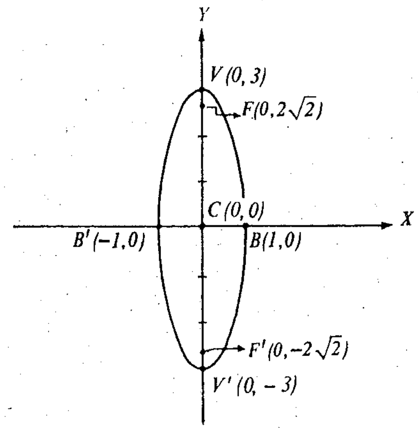
1. $2a = \frac{16}{7}\sqrt{7}$
2. $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $2b = 24$
4. $2c = 8,\ e = \frac{4}{5}$
5. $\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{20} = 1$ ó $5x^2 + 9y^2 = 20$
6. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ ó $27x^2 + 36y^2 = 972$

   Nota: Se descarta la solución $a = -\frac{3}{2}$
7. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ ó $5x^2 + 9y^2 = 180$
8. $a = 8$
9. $b = \sqrt{2}$
10. $b = 3$
11. $L.R. = \frac{9}{2}$
12. $L.R. = \frac{32}{5}$

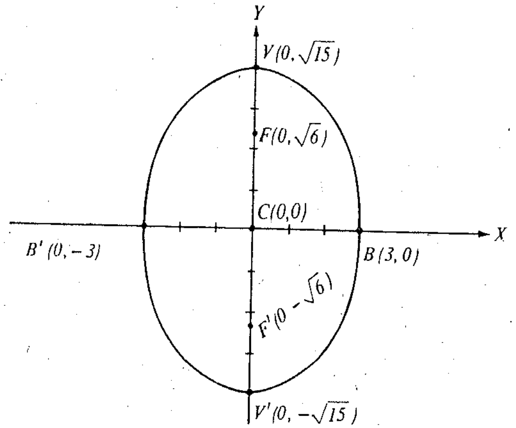
13. $2a = 8,\ 2b = 4,\ e = \frac{\sqrt{3}}{2},\ L.R. = 2,\ F'(0, -2\sqrt{3}),\ F(0, 2\sqrt{3}),$
$V'(0, -4),\ V(0, 4)$



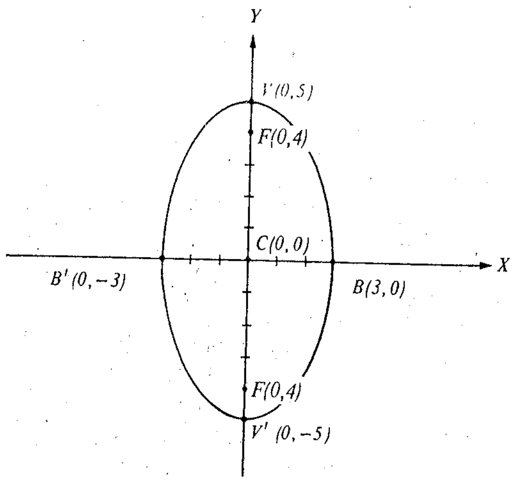
14. $2a = 6,\ 2b = 2,\ e = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ L.R. = \frac{2}{3},\ F'(0, -2\sqrt{2}),\ F(0, 2\sqrt{2}),$
$V'(0, -3),\ V(0, 3)$



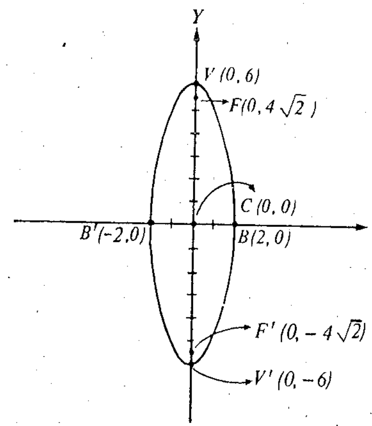
15. $2a = 2\sqrt{15},\ 2b = 6,\ e = \dfrac{\sqrt{10}}{5},\ L.R. = \dfrac{6\sqrt{15}}{5},\ F'(0, -\sqrt{6}),$
$F(0, \sqrt{6}),\ V'(0, -\sqrt{15}),\ V(0, \sqrt{15})$



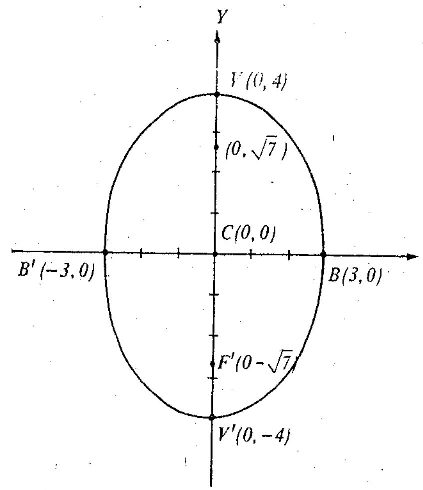
16. $2a = 10,\ 2b = 6,\ e = \dfrac{4}{5},\ L.R. = \dfrac{18}{5},\ F'(0, -4),\ F(0,4),$
$V'(0, -5),\ V(0,5)$



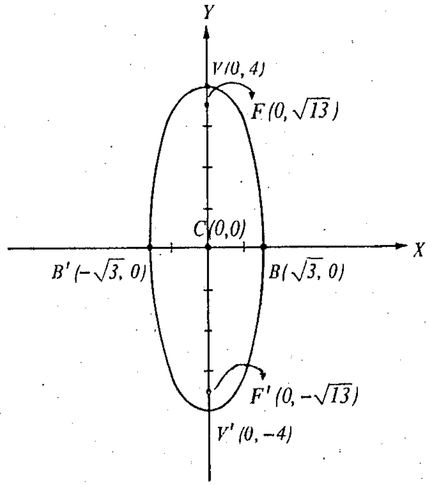
17. $2a = 12,\ 2b = 4,\ e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ L.R. = \dfrac{4}{3},\ F'(0, -4\sqrt{2}),\ F(0, 4\sqrt{2}),$
$V'(0, -6),\ V(0,6)$



18. $2a = 8,\ 2b = 6,\ e = \dfrac{\sqrt{7}}{4},\ L.R. = \dfrac{9}{2},\ F'(0, -\sqrt{7}),\ F(0, \sqrt{7}),$
$V'(0, -4),\ V(0,4)$

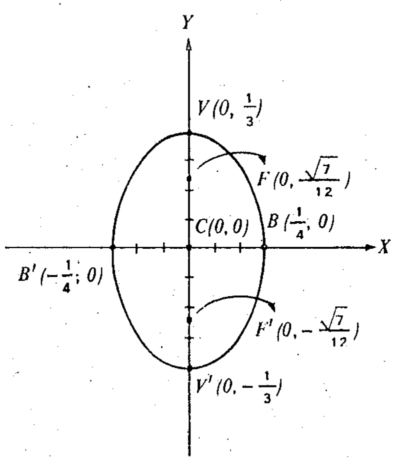


19. $2a = 8,\ 2b = 2\sqrt{3},\ e = \frac{\sqrt{13}}{4},\ L.R. = \frac{3}{2},\ F'(0, -\sqrt{13}),\ F(0, \sqrt{13}),$



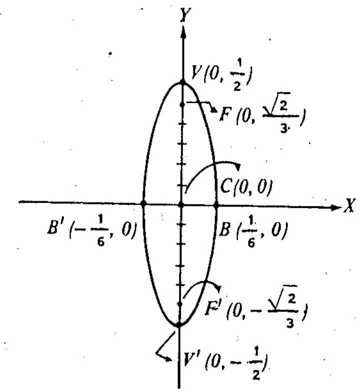
20. $2a = \frac{2}{3},\ 2b = \frac{1}{2},\ e = \frac{\sqrt{7}}{4},\ L.R. = \frac{3}{8},\ F'(0, -\frac{\sqrt{7}}{12}),$

$F(0, \frac{\sqrt{7}}{12}),\ V'(0, -\frac{1}{3}),\ V(0, \frac{1}{3})$



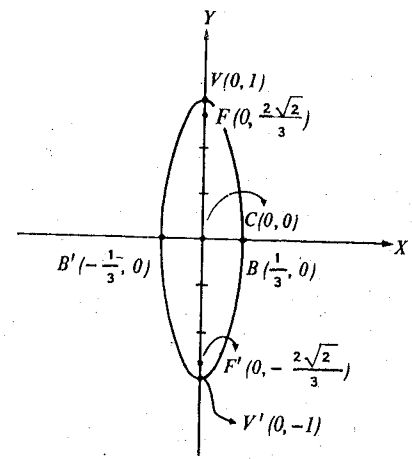
21. $2a = 1,\ 2b = \frac{1}{3},\ e = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ L.R. = \frac{1}{9},\ F'(0, -\frac{\sqrt{2}}{3}),$

$F(0, \frac{\sqrt{2}}{3}),\ V'(0, -\frac{1}{2}),\ V(0, \frac{1}{2})$



22. $2a = 2,\ 2b = \frac{2}{3},\ e = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ L.R. = \frac{2}{9},\ F'(0, -\frac{2\sqrt{2}}{3}),$

$F(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}),\ V'(0, -1),\ V(0, 1)$



23. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

24. $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$

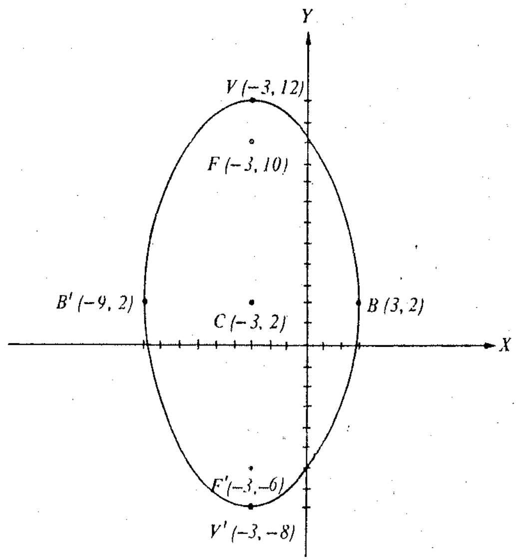
25. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$

26. $x^2 + 5y^2 = 5$ ó $5x^2 + y^2 = 5$ (Dos soluciones)

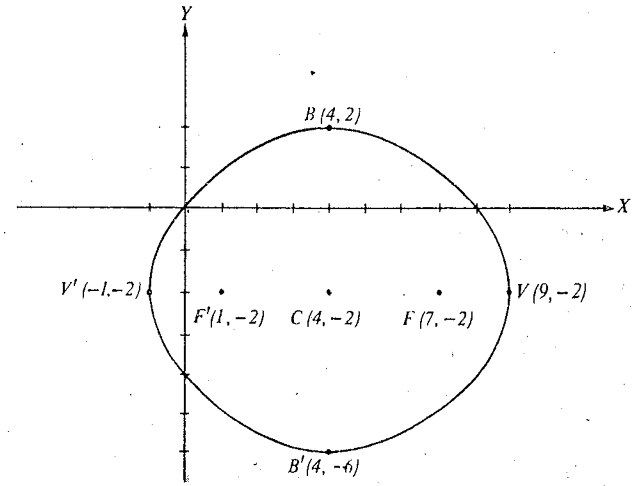
27. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

MODULO 11 – VALIDACION

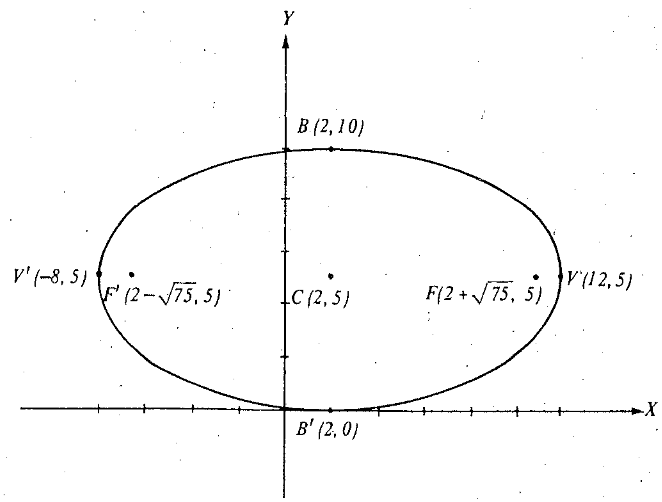
1. $\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$



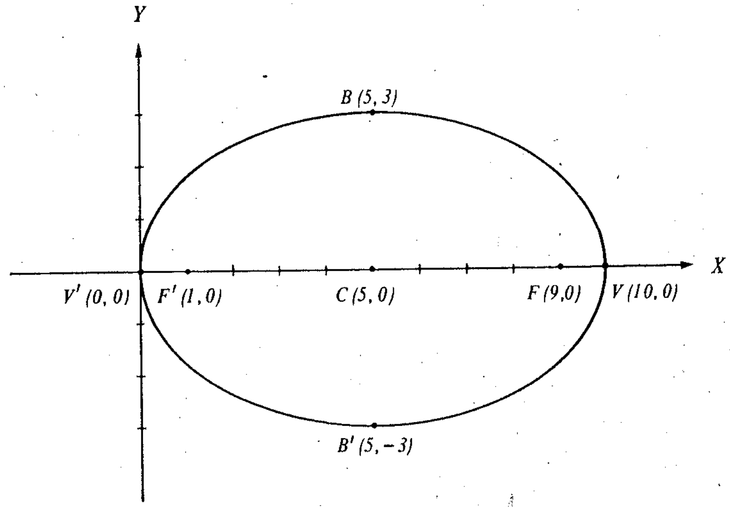
2. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$



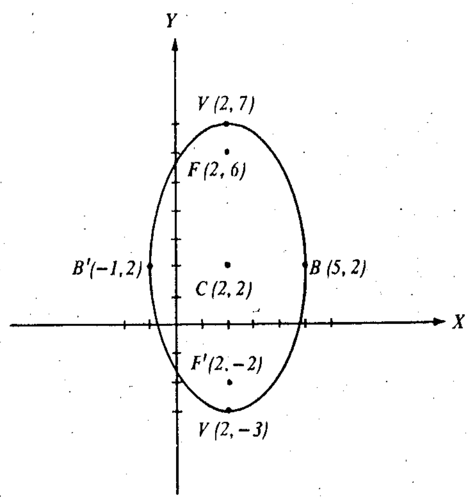
3. $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$



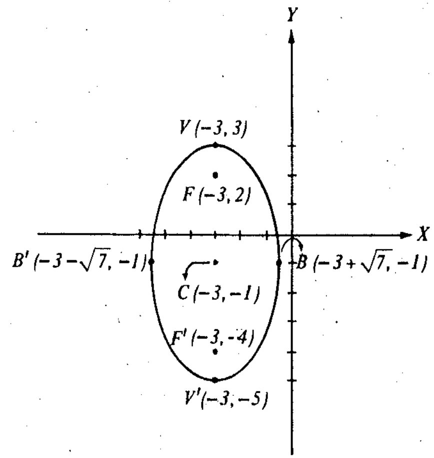
4. $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



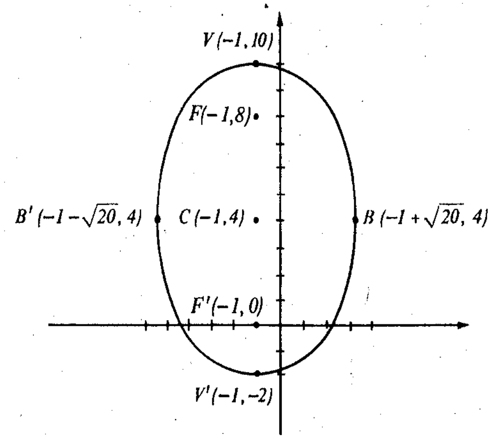
5. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$



6. $\dfrac{(x+3)^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$



7. $\dfrac{(x+1)^2}{20} + \dfrac{(y-4)^2}{36} = 1$

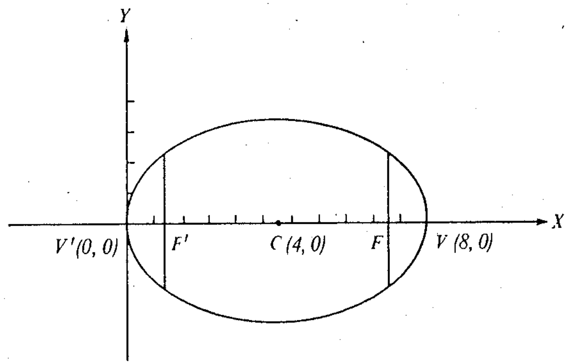


8. $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

MODULO 12 – VALIDACION

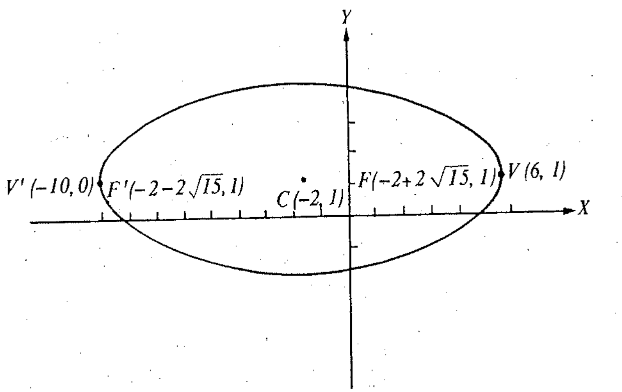
1. Es una elipse con: $C\ (4,0),\ F'\ (4-\sqrt{12},\ 0),\ F\ (4+\sqrt{12},\ 0)$
$V'\ (0,0),\ V(8,0)$

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad e=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4} \qquad e=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad L.R.=2$$



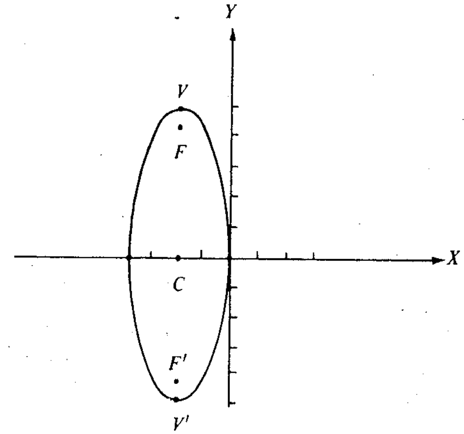
2. Es una elipse cuya ecuación es: $\frac{(x+2)^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

$C\ (-2,1),\ F'\ (-2-2\sqrt{15}\ ,\ 1),\ F\ (-2+2\sqrt{15}\ ,\ 1),\ V'\ (-10,1)$
$V(6,1),\ e=\frac{\sqrt{15}}{4},\ L.R.=1$



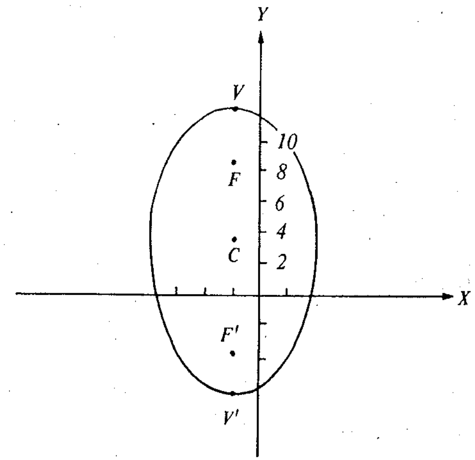
3. $C\ (-2,0),\ F'\ (-2,\ -\sqrt{21}\ ),\ F(-2,\ \sqrt{21}\ ),\ V'\ (-2,-5),\ V(-2,5),$

$e=\frac{\sqrt{21}}{5}, \qquad L.R.=\frac{8}{5}$



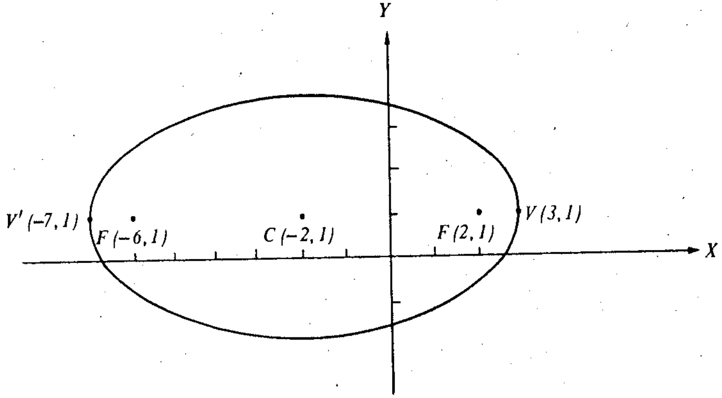
4. $C\ (-2,3),\ F'\ (-2,\ 3-3\sqrt{5}\ ),\ F(-2,\ 3+3\sqrt{5}\ ),\ V'\ (-2,-6),$

$V(-2,12)\ e=\frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad L.R.=8$



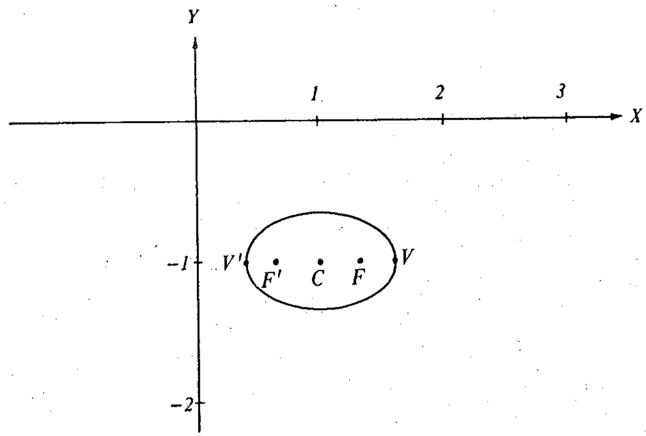
5. $C\,(-2,1)$

$e = \frac{4}{5}$, $L.R. = \frac{18}{5}$



6. $C\,(1,-1)$, $F'\,(1 - \frac{\sqrt{7}}{12}, -1)$, $F\,(1 + \frac{\sqrt{7}}{12}, -1)$, $V'\,(\frac{2}{3}, -1)$,

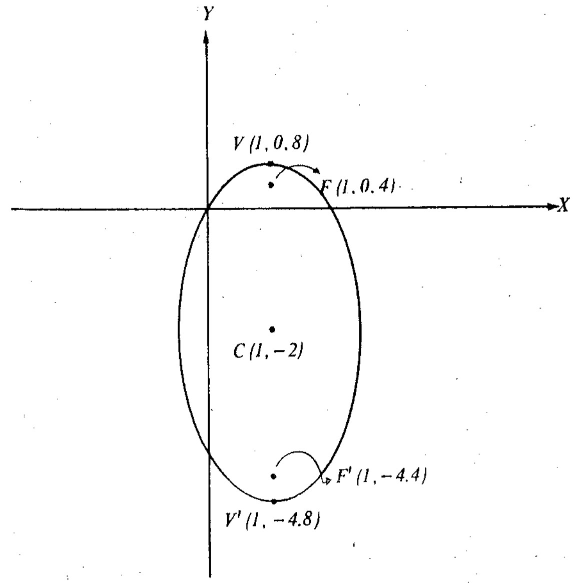
$V(\frac{4}{3}, -1)$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $L.R. = \frac{3}{8}$



7. La ecuación dada representa al punto $(-3,5)$.
8. No tiene gráfica en el plano real.
9. No tiene gráfica en el plano real.
10. No tiene gráfica en el plano real.
11. El punto $(1,3)$.

12 $C(1, -2)$, $F'\,(1, -2 - \sqrt{6}\,)$, $F\,(1, -2 + \sqrt{6}\,)$, $V'\,(1, -2 - 2\sqrt{2}\,)$,

$V(1, -2 + 2\sqrt{2}\,)$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $L.R. = \sqrt{2}$



UNIDAD XX

SECCIONES CONICAS. HIPERBOLA. ROTACION DE EJES.

Introducción

Siguiendo con la intención descrita en la unidad anterior al material que aquí se presenta podemos asignarle las características mencionadas en la unidad próxima pasada, además de que nos sirve para darnos una idea aunque somera de la trayectoria de los planetas que tienen una órbita elíptica así como de la de los cometas que en su desplazamiento describen una hipérbola.

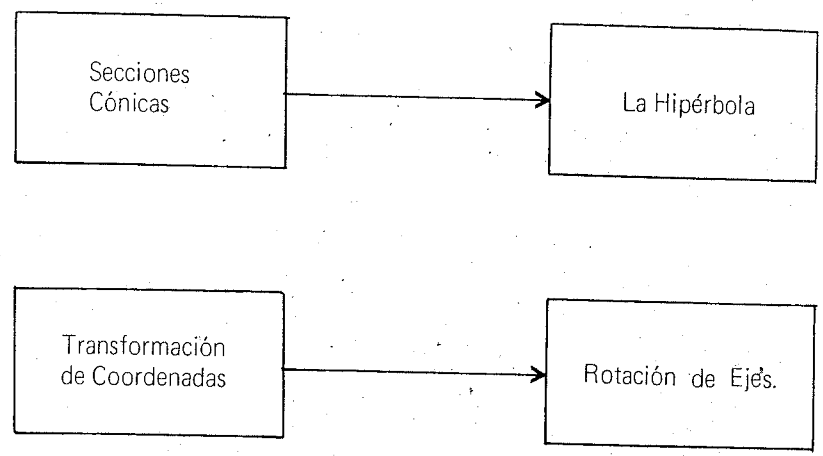
Nos permite notar las bondades tanto de la traslación como de la rotación de ejes y como fin implícito en todo el material generar las habilidades suficientes en el estudiante para afrontar con éxito sus próximos compromisos educativos.

Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Definirá la hipérbola.
2. Deducirá la ecuación de una hipérbola con centro en el origen.
3. Determinará a partir de la ecuación de una hipérbola su dominio y contradominio.
4. Explicará la interpretación geométrica de la ecuación de una hipérbola.
5. Explicará el proceso conocido como rotación de ejes.
6. Determinará a partir de la ecuación cuadrática qué cónica representa.

Diagrama temático estructural



Glosario

Hipérbola: Es la gráfica descrita en un plano por un punto que se mueve en él de forma tal que: la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos permanece constante.

Ecuación de hipérbola: Representación algebraica de la característica común a los puntos de una hipérbola y sólo a esos puntos.

Focos de la hipérbola: Los puntos fijos a que alude la descripción de la hipérbola.

Centro de la hipérbola: Punto medio del segmento de recta que une los focos.

1 c: Distancia de centro a foco en una hipérbola.

Vértices de la hipérbola: Intersecciones entre la hipérbola y el segmento de recta que contiene al centro y a los focos.

Eje transverso: Segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola.

2 a: Longitud del eje transverso.

Eje conjugado: Segmento de recta perpendicular al eje transverso y pasa por el centro de la hipérbola.

2 b: Longitud del eje conjugado de la hipérbola.

Excentricidad de la hiperbola: $e = \frac{c}{a}$

Lado recto de una hipérbola: Segmento de recta que pasa por un foco perpendicular al eje transverso y cuyos extremos pertenecen a la curva.

Asíntotas de la hipérbola: Un par de rectas que pasan por el centro de la hipérbola, a las que se aproxima la gráfica de la curva.

Hipérbola conjugada: Hipérbola cuyos ejes, transverso y conjugado tienen la misma longitud.

Rotación de ejes: Consiste en referir un punto o conjunto de puntos en un sistema coordenado X Y a un sistema coordenado X' Y' si ambos sistemas corrdenados tienen el mismo origen.

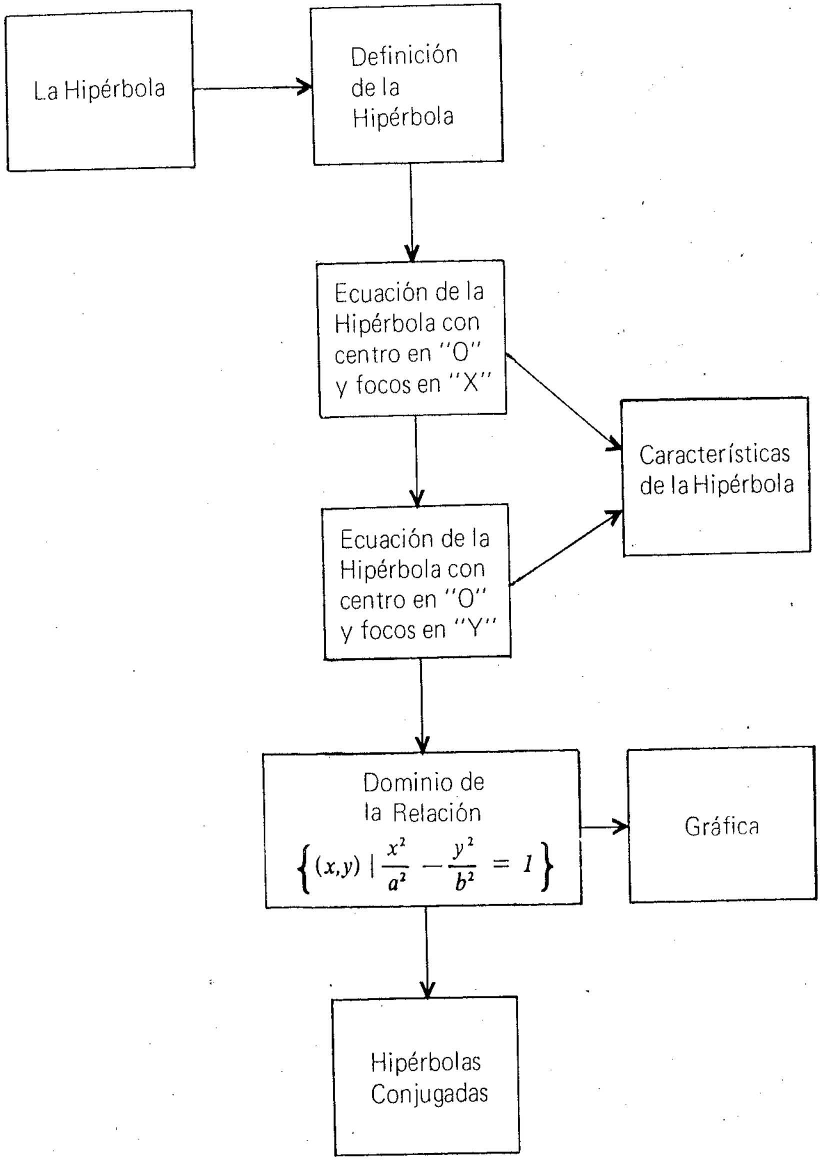
Módulo 13

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

Explicará el concepto de asíntota.
Explicará la obtención de los ejes transverso y conjugado.
Definirá el valor de la excentricidad en la hipérbola.
Obtendrá las constantes a, b, c, las coordenadas de los vértices y de los focos, la longitud del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asítotas a partir de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen.

ESQUEMA–RESUMEN



13.1 DEFINICION DE LA HIPERBOLA

Descripción:

Una hipérbola es la curva que se obtiene intersectando un cono y un plano; si el plano está inclinado, corta ambas secciones del cono y no pasa por el vértice del mismo. (Ver figura 1).

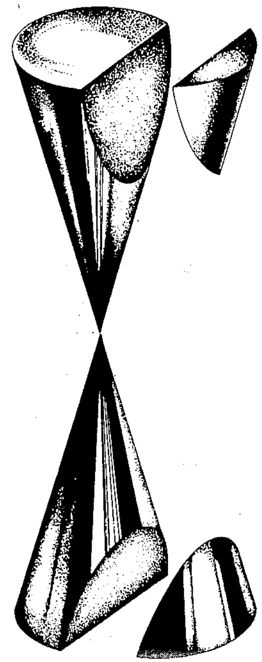


Figura 1

Definición:

Cómo obtenemos una hipérbola

> Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales, que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos es una constante a la que representaremos por *2a*

(ver figura 2).

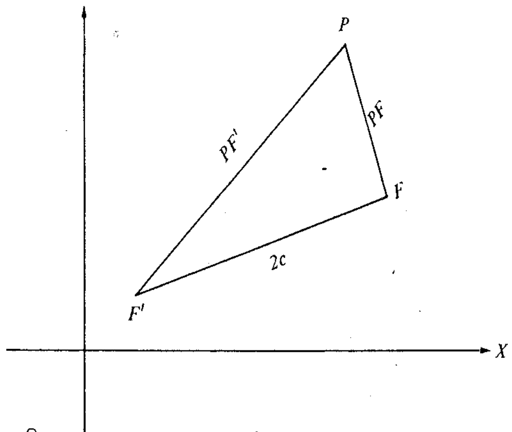


Figura 2 $PF' - PF = 2a$

Características:

Los puntos fijos mencionados en la definición, son los llamados focos de la hipérbola y se representan por las letras F y F'. La distancia entre los focos es $2c$. El punto medio del segmento FF' (eje focal) es conocido como centro de la hipérbola.

Características de la hipérbola.

De la figura 2 puede notar que los puntos $P\,F\,F'$ son los vértices de un triángulo y como en todo triángulo la diferencia entre dos de sus lados es menor que el tercero entonces $PF' - PF < FF'$ y dado que $PF' - PF = 2a$ y $FF' = 2c$, tenemos que $2a < 2c$ ó también $a < c$.

13.2 ECUACION DE LA HIPERBOLA CON CENTRO EN 0 Y FOCOS EN X.

Obtención de la ecuación de la hipérbola.

Si una hipérbola tiene su centro en el origen de coordenadas y sus focos en el eje X, las coordenadas de los focos son $(-c,0)$ para F' y $(c,0)$ para F. Todo punto $P(x,y)$ en la curva tiene coordenadas que satisfacen la siguiente igualdad $|PF' - PF| = 2a$ ó bien $PF' - PF = \pm 2a$, y como $PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Sustituyendo obtenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Dejando un radical solo en un miembro de la igualdad y elevando al cuadrado la ecuación que resulta, tenemos:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{ó también}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{al dividir entre 4}$$

ambos miembros de la ecuación.

Elevamos al cuadrado nuevamente los dos miembros de la ecuación y tenemos:

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

y como $a < c$ ó $c > a$ entonces $c^2 > a^2$ ó bien $c^2 - a^2 > 0$ por lo que podemos reemplazar $c^2 - a^2$ por b^2, $b \in R$ quedando

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ó

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

13.3 DOMINIO DE LA RELACION $\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

Como en casos anteriores, queremos determinar el conjunto de números reales que al sustituir a "x" en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ generan valores reales en "y"; este conjunto se obtiene fácilmente cuando resolvemos para "y" la ecuación dada

Análisis del dominio para la ecuación de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$\frac{\quad}{b^2} = \frac{\quad}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

"y" es un número real si $x^2 - a^2 \geqslant 0$; con ésto el problema se reduce a resolver la desigualdad obtenida:

$$x^2 - a^2 \geqslant 0$$

$$x^2 \geqslant a^2$$

$$|x| \geqslant a$$

$$x \geqslant a \quad \text{ó} \quad x \leqslant -a$$

Entonces el dominio de la relación, es $\{x \in R | x \geqslant a$ ó $x \geqslant -a\}$ ésto significa que para $-a < x < a$, $y \notin R$; geométricamente lo interpretamos entendiendo que la grá-fica de la hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ no existe en la región del plano en la que $-a < x < a$. (Ver figura 3).

Interpretación gráfica del dominio.

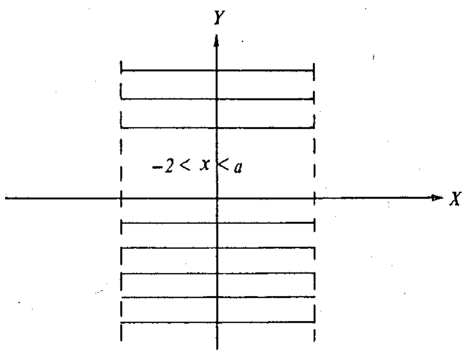


Figura 3

13.3.1 GRAFICA DE $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

¿Qué llamamos eje transverso y eje conjugado?

Una consecuencia de la conclusión del párrafo anterior es el hecho de que la gráfica de referencia no intersecta al eje y, y si en $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hacemos $y = 0$ obtenemos que $x = a$ ó $x = -a$, de donde concluímos que la gráfica intersecta al eje X en los puntos $V'(-a,0)$ y $V(a,0)$. Estos puntos son llamados vértices de la hipérbola y al segmento de recta que los une **eje transverso** ($V'V = 2a$), mientras que al segmento de recta de longitud $2b$ cuya mediatriz (perpendicular y bisectriz) es el eje transverso, lo llamamos **eje** conjugado (también eje no transverso).

13.4 ASINTOTAS

Una definición completa de **asíntota** requiere el concepto de límite (que suponemos no ha adquirido), por ello sólo le damos una breve descripción que será suficiente para ayudarle a graficar hipérbolas.

Dos rectas importantes son las asíntotas.

Debemos entender por asíntota de una curva, la línea recta a la cual se aproxima la gráfica de la curva (ver figura 4) sin llegar a tocarla aunque el valor de x sea muy grande. En la figura 4, la gráfica de la curva se aproxima al eje X y conforme el valor de x aumenta, más próxima está la gráfica al eje X; sin embargo,no se intersectan por grande que sea el valor de x. El *eje X es una asíntota de la gráfica de la curva.*

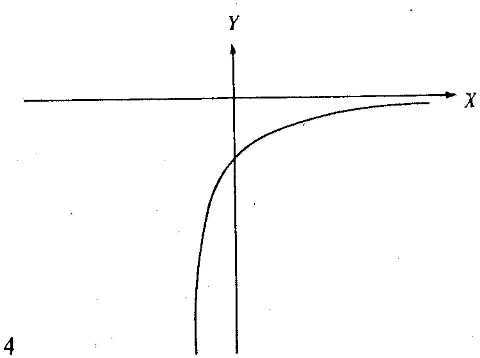


Figura 4

La hipérbola tiene dos asíntotas y la gráfica de ellas se puede obtener construyendo un rectángulo cuyos lados tengan como puntos medios a los extremos de los ejes transverso y conjugado, y además sean paralelos a dichos ejes. Las asíntotas de una hipérbola pasan por el centro de la misma y por los vértices opuestos del rectángulo; su gráfica y la de la hipérbola están dadas en la figura 5.

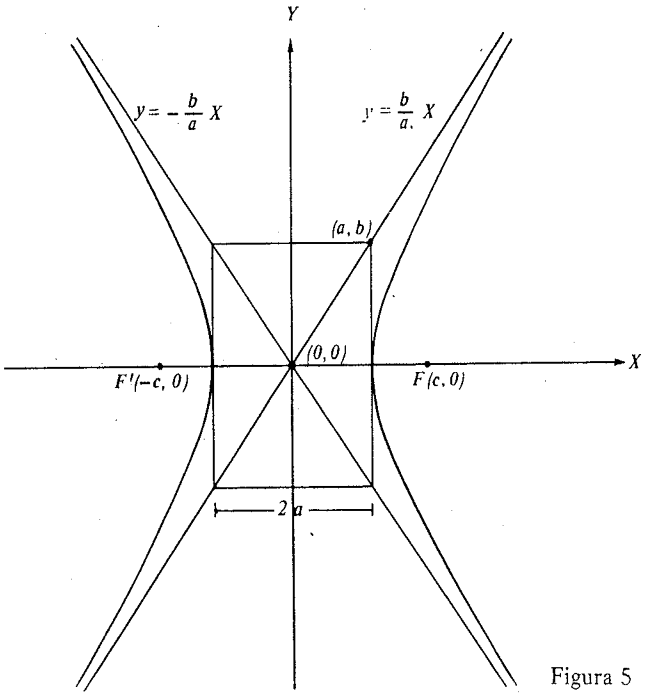


Figura 5

¿Cómo son las pendientes de las asíntotas?

Una de las asíntotas pasa por dos puntos cuyas coordenadas son $(0,0)$ y (a,b), luego su pendiente $\left(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ es $m = \frac{b}{a}$. Sustituyendo $(0,0)$ a $(x_1 y_1)$ y $\frac{b}{a}$ a m en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ obtenemos su ecuación $y = \frac{b}{a}x$; la otra asíntota pasa por $(0,0)$ y $(-a,b)$. Procediendo de igual manera obtenemos su ecuación que es $y = -\frac{b}{a}x$.

El lado recto $(L.R.)$ de una hipérbola, es el segmento de recta cuyos extremos son puntos de la curva, perpendicular al eje focal en uno de los focos (ver figura 6).

También la hipérbola tiene dos lados rectos.

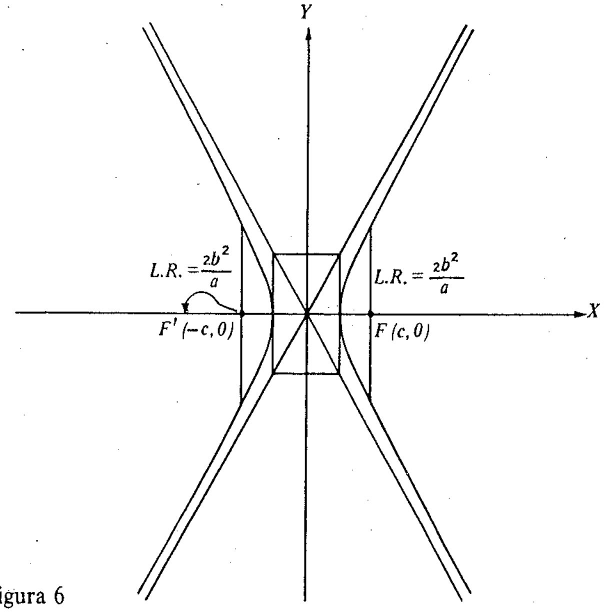


Figura 6

Igual que la elipse, la hipérbola tiene dos lados rectos, ambos de la misma longitud que es $L.R. = \frac{2b^2}{a}$. La prueba de ésto, está en un problema de autoevaluación.

13.5 EXCENTRICIDAD

La excentricidad se define también como $e = \frac{c}{a}$; como en la hipérbola $c > a$, entonces $e > 1$.

Ejemplo 1:

Determine $a, b, c, L.R., e,$ y grafique la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{100} = 1$$

La ecuación dada corresponde a la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

entonces $a^2 = 64$ y $b^2 = 100$ por lo que $a = 8$ y $b = 10$ y como en la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que, $c^2 = 64 + 100$ de donde $c^2 = 164$ y $c = \sqrt{164}$, ó bien $c = 2\sqrt{41}$, de ahí que los focos de esta hipérbola sean los puntos $F'(-2\sqrt{41},\ 0)$ y $F\ (2\sqrt{41},\ 0)$; los vértices están en

$V'(-8,0)$, $V\ (8,0)$, $L.R. = \frac{2(100)}{8}$ y simplificando $L.R. = 25$

y $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.

Sustituyendo a y b tenemos: $y = \pm\frac{5}{4}x$, y con estos datos graficamos (ver figura 7).

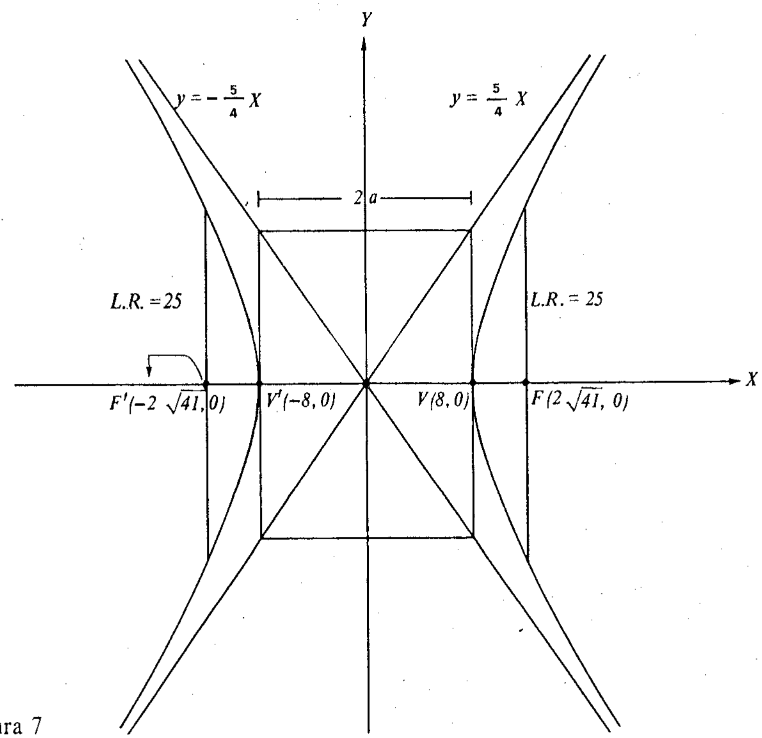
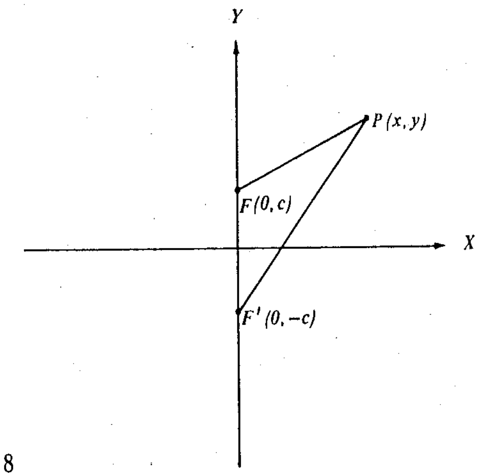


Figura 7

13.6 ECUACION DE LA HIPERBOLA CON CENTRO EN "O" Y FOCOS EN EL EJE Y

Cuando una hipérbola tiene su centro en el origen de coordenadas y sus focos $F'(0,-c)$ y $F\ (0,c)$ están en el eje "Y", determinamos su ecuación procediendo igual que en los casos anteriores, es decir, representamos mediante una ecuación la condición que satisfacen todos los puntos de la curva y solamente esos puntos; sea $P\ (x,y)$ un punto cualquiera de la curva, de acuerdo con la definición. La diferencia entre sus distancias a los focos $(PF' - PF)$ es igual a $\pm\ 2a$; entonces $PF' - PF = \pm\ 2a$ (ver figura 8).



La hipérbola también puede tener sus focos en el eje Y

Figura 8

Si $PF' - PF = \pm\ 2a$ y $PF' = \sqrt{x^2 + (y + c)^2}$; $PF = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$.

Sustituyendo, tenemos: $\sqrt{x^2 + (y + c)^2} - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \pm\ 2a.$

Dejando un radical solo en un miembro de la igualdad, elevando al cuadrado y simplificando tenemos:

$$cy - a^2 = \pm\ a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Elevando al cuadrado otra vez ambos miembros de la igualdad y simplificando, resulta:

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

de donde

$$(c^2 - a^2)\, y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

y como

$$c^2 - a^2 = b^2$$

obtenemos

$$\boxed{b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2} \text{ ó } \boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Si hacemos $x = 0$ resulta $b^2y^2 = a^2b^2$ y consecuentemente $y^2 = a^2$, ó bien $y = a$ ó $y = -a$; por lo tanto $V(0,a)$ y $V'(0,-a)$ son las intersecciones de la curva con el eje "Y". Si y es reemplazada por cero, es decir si $y = 0$, entonces $x^2 = -b^2$, por lo que si $y = 0$ entonces $x \notin R$, lo cual significa que esta hipérbola *no intersecta al eje* "X"

Resolviendo para y, tenemos que $y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + a^2}$, de ahí que y es número real para toda $x \in R$, *el dominio de la relación definida por la ecuación* $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ *es el conjunto de los números reales.*

Cuando resolvemos la misma ecuación para "x", resulta $x = \pm \frac{b}{a}\sqrt{y^2 - a^2}$ de donde concluímos que x es un número real si $y^2 - a^2 \geqslant 0$, ó bien $y \geqslant a$ ó $y \leqslant -a$. El contradominio de esta relación es $\{y \in R | y \leqslant -a \text{ ó } y \geqslant a\}$.

La gráfica de esta hipérbola la obtenemos fácilmente con la ayuda del rectángulo por cuyos vértices pasan las asíntotas, tomando en cuenta que en este caso *el eje transverso coincide con el eje "Y"* mientras que *el eje conjugado coincide con el eje "X"*. (Ver figura 9).

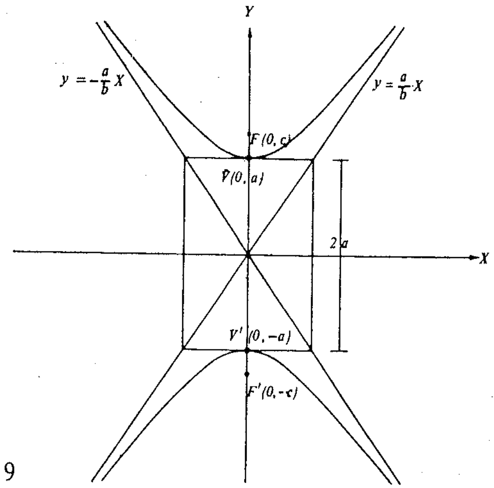


Figura 9

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$. ¿Por qué?

Ejemplo 1:

Determine los elementos (centro, focos, excentricidad, L.R., vértices y ecuaciones de las asíntotas) y grafique detalladamente la hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$$

Solución:

En primer lugar procuramos que el miembro de la derecha en la ecuación sea 1 y no -1: ésto se logra multiplicando por (-1) ambos miembros de la ecuación, con lo que obtenemos:

$$-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ ó } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

que es obviamente la ecuación de una hipérbola con su eje transverso en el eje Y y además $C(0,0), a = 2, b = \sqrt{5}$ como $c^2 = a^2 + b^2$ entonces $c^2 = 4 + 5 = 9$ por lo tanto

$c = 3$, $e = \frac{3}{2}$, L.R. $= 5$. Las ecuaciones de las asíntotas son

$y = \frac{a}{b}x$ ó $y = -\frac{a}{b}x$ sustituyendo tenemos:

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x \quad \text{ó} \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

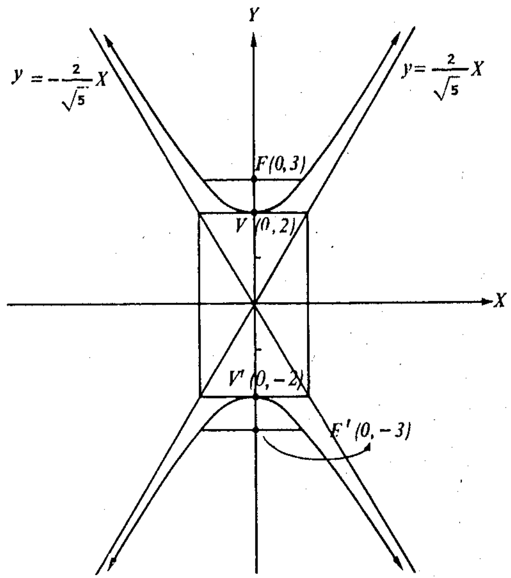


Figura 10

13.7 HIPERBOLAS CONJUGADAS

¿A qué llamamos hipérbolas conjugadas?

Un caso particular de la hipérbola se presenta cuando las longitudes de los ejes transverso y conjugado son iguales, es decir $2a = 2b$, lo cual implica que $a = b$; las hipérbolas con esta característica son conocidas como conjugadas o rectangulares

En estos casos, la ecuación de la hipérbola resulta

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ cuando el eje transverso coincide con el eje X y el centro con el origen de coordenadas, o bien

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ si el eje transverso coincide con el eje Y y el centro con el origen de coordenadas.

Ejemplo: 1:

Mostrar que en una hipérbola rectangular las asíntotas se intersectan en ángulo recto y la excentricidad es $\sqrt{2}$.

Solución:

Considerando la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, el eje transverso coincide con el eje X, entonces las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}x \;,\quad y = -\frac{b}{a}x$$

pero como $a = b$, b es sustituido por a, y tenemos

$$y = \frac{a}{a}x \qquad y = -\frac{a}{a}x$$

ó $y = x$ $\qquad y = -x$

Las asíntotas de las hipérbolas conjugadas son perpendiculares.

De inmediato concluímos que las pendientes de las asíntotas son $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$, luego el producto de las pendientes $m_1 m_2 = -1$, lo cual es la condición que deben satisfacer las pendientes de rectas perpendiculares entre sí; por tanto concluimos que las asíntotas se intersectan en ángulo recto.

La excentricidad está definida como $e = \frac{c}{a}$ donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; de nuevo b es sustituida por su igual a y tenemos que $e = \frac{\sqrt{2a^2}}{a}$ ó $e = \frac{a\sqrt{2}}{a}$ De donde $e = \sqrt{2}$.

(Ver figura 11).

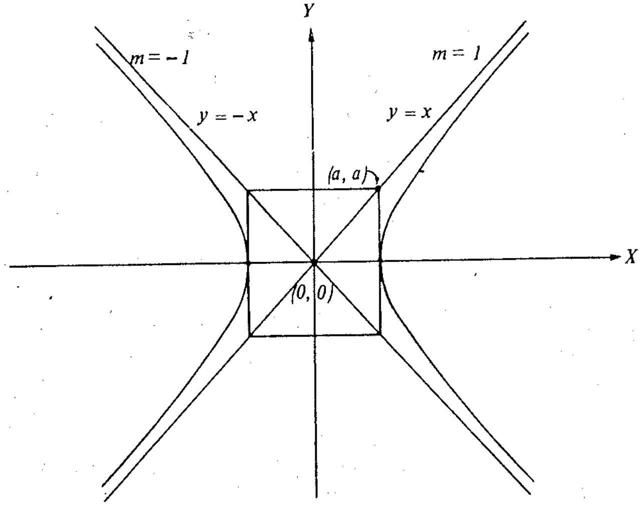


Figura 11

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Las ecuaciones dadas a continuación representan hipérbolas con centro en el origen y focos en el eje X. Determine en cada una; las constantes a, b, c, las coordenadas de los vértices y de los focos, la longitud del lado recto, la excentricidad, ecuaciones de las asíntotas y grafique detalladamente.

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$
3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
4. $4x^2 - y^2 = 16$
5. $5x^2 - 7y^2 = 35$
6. $4x^2 - 9y^2 = 36$
7. $x^2 - 2y^2 = 8$
8. $3x^2 - 2y^2 = 18$

En el siguiente conjunto de problemas encuentre la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas (todas ellas tienen su centro en $O(0,0)$).

9. $a = 10$, $b = 5$ Focos en eje X
10. Un vértice $V(3,0)$ y un foco en $F(4,0)$
11. Foco en $F(2,0)$, eje conjugado mide 2 unidades.
12. $e = \frac{3}{2}$, $b = 2$, focos en el eje X.
13. Pruebe que la longitud del lado recto en una hipérbola es $L.R. = \frac{2b^2}{a}$

Las ecuaciones dadas a continuación representan hipérbolas con centro en el origen y focos en el eje Y, determine en cada caso: vértices, focos, longitud de los ejes, longitud del lado recto, excentricidad, ecuaciones de las asíntotas y grafique detalladamente.

14. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$
15. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
16. $25y^2 - 4x^2 = 100$
17. $4y^2 - 16x^2 = 64$
18. $x^2 - 4y^2 = -16$
19. $x^2 - 2y^2 = -8$
20. $16x^2 - 9y^2 = -1$
21. $25y^2 - 16x^2 = 1$

Las ecuaciones dadas a continuación corresponden a hipérbolas con centro en el origen, determine si sus focos están en el eje X ó en el eje Y, y grafique detalladamente.

22. $4x^2 - 3y^2 = 12$
23. $16y^2 - 25x^2 = 400$
24. $x^2 - y^2 - 4 = 0$
25. $x^2 - y^2 + 4 = 0$

Determine en cada caso la ecuación de la hipérbola con centro en el origen que satisface las siguientes condiciones. Grafique en cada uno.

26. $a = 10,\ b = 5$, focos en el eje Y.
27. Un vértice $V'(0,-3)$ y un foco en $F'(0,-4)$
28. Un vértice en $V(0,2)$, foco en $F(0,5)$.
29. Un vértice en $(0,4)$, eje conjugado mide 8 unidades.

Módulo 14

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo el alumno:

1. Determinará los elementos (centro, focos, vértices, etc.) de una hipérbola cuyo centro no coincide con el origen de coordenadas.
2. Dibujará la gráfica de la ecuación de una hipérbola con centro en (h,k), y ejes paralelos a los ejes coordenados.

ESQUEMA-RESUMEN

Ecuación Cartesiana de la Hipérbola → Otras formas de la ecuación de la hipérbola → Ejemplos

14.1 OTRAS FORMAS DE LA ECUACION DE LA HIPERBOLA

Estudiemos el caso cuando el centro de la hipérbola no está en el origen.

Determinaremos en este tema la ecuación de una hipérbola cuyo centro no coincide con el origen de coordenadas, pero con ejes paralelos a los ejes coordenados.

Sea $C\ (h,k)$ el centro de una hipérbola cuyo eje transverso es paralelo al eje X. (Ver figura 12).

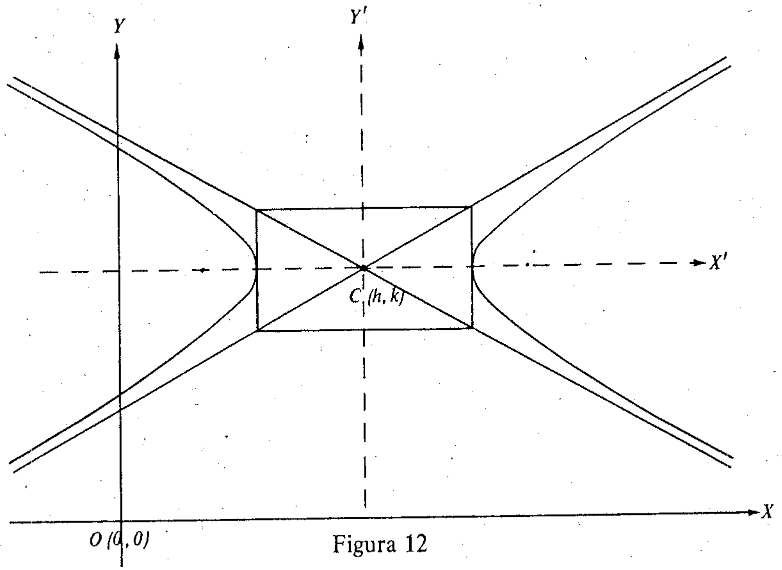


Figura 12

Tracemos otro sistema de coordenadas $X'\,Y'$ cuyos ejes sean paralelos a los ejes X, Y cuyo origen coincida con el punto $C\ (h,k)$. La ecuación de la hipérbola con respecto a este nuevo sistema de coordenadas es

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Emplearemos la ecuación de traslación de eje.

Sin embargo a nosotros nos interesa referir esta relación al sistema coordenado original, cosa que logramos sustituyendo x' y y' por expresiones equivalentes en términos de x y y. Estas expresiones son $x' = x - h$ y $y = y - k$; haciendo la sustitución obtenemos:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

que es la ecuación de una hipérbola con centro en (h,k) con su eje transverso paralelo al eje X.

Las coordenadas de los vértices se obtienen a partir del centro, así como los extremos de los ejes, (transverso y conjugado) después de haber determinado los valores correspondientes a las constantes a, b y c. (Ver figura 13).

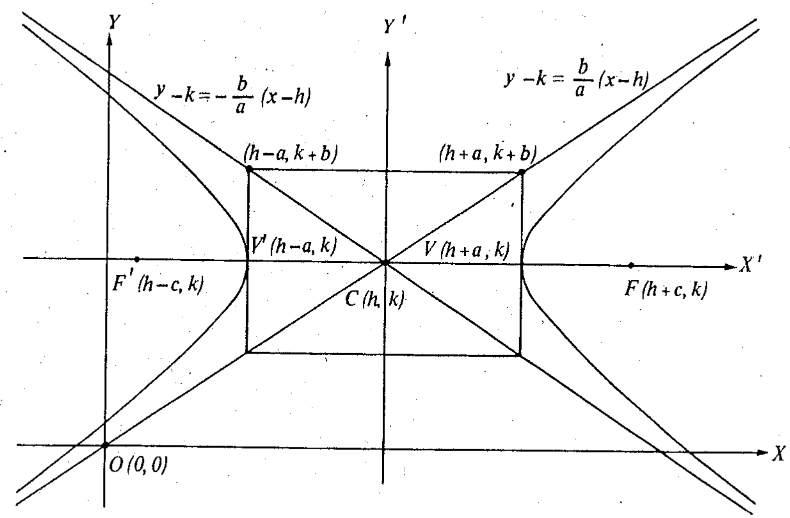


Figura 13

Las pendientes de las asíntotas son $m = \frac{b}{a}$ y $m = -\frac{b}{a}$,

y sus ecuaciones

$$\boxed{y - k = \frac{b}{a}(x-h)} \quad \text{y} \quad \boxed{y - k = -\frac{b}{a}(x-h)}$$

Determine las coordenandas de centro, vértices y focos, ecuaciones de las asíntotas, longitud del lado recto, excentricidad, y grafique la hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

ó

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{[y-(-3)]^2}{16} = 1$$

Solución:

Siendo la ecuación de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} =$ su eje transverso es horizontal, además $h = 5$, $k = -3$ $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, de donde resulta que el centro es el punto $C(5, -3)$ y $c^2 = a^2 + b^2$; entonces $c^2 = 9 + 16$ ó sea $c^2 = 25$, por lo que $c = 5$; si $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, tenemos que $a = 3$ y $b = 4$.

La excentricidad $(e = \frac{c}{a})$ resulta $e = \frac{5}{3}$ y la longitud del lado recto $L.R. = \frac{2b^2}{a}$ es $L.R. = \frac{32}{3}$; las ecuaciones de las asíntotas son

$$y - k = \frac{b}{a}(x-h) \text{ y } y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

al sustituir a, b, h y k, obtenemos:

$$y + 3 = \frac{4}{3}(x-5) \quad \text{y} \quad y + 3 = -\frac{4}{3}(x-5)$$

La gráfica está en la siguiente figura 14.

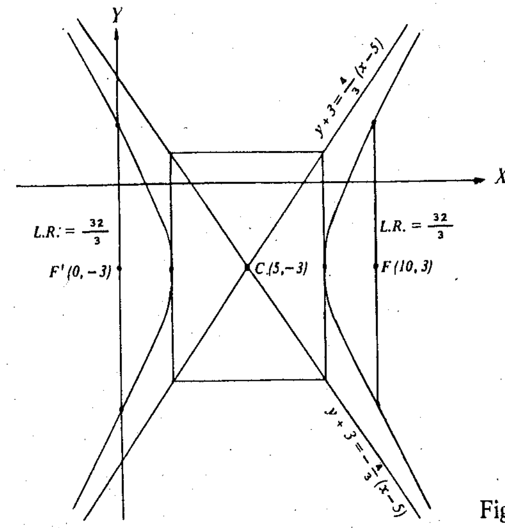


Figura 14

Si consideramos que la hipérbola tiene su centro fuera del origen y su eje transverso paralelo al eje "Y", un proceso similar al visto en el caso anterior establece que la ecuación correspondiente es $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

(Ver gráfica 15).

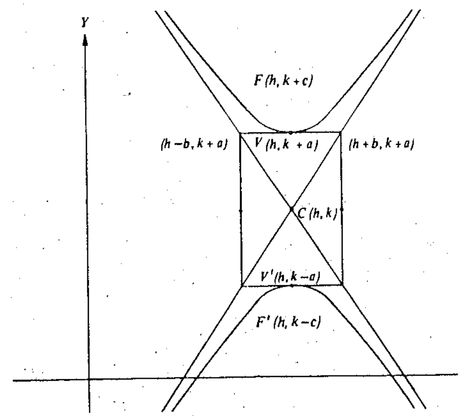


Figura 15

De la gráfica se obtiene que las pendientes de las asíntotas son $m = -\frac{a}{b}$ para una, y $m = \frac{a}{b}$ para la otra; consecuentemente sus ecuaciones son $y - k = \frac{a}{b}(x - h)$ para una de ellas y $y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$ para la otra.

Ejemplo 2:

Determine los elementos (centro, vértices, focos, etc.) y grafique con todo detalle la hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{(y+3)^2}{6} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$\frac{[\,y-(-3)\,]^2}{6} - \frac{[\,x-(-1)\,]^2}{9} = 1$$

De donde obtenemos los siguientes datos:

$k = -3,\ h = -1,\ a = \sqrt{6},\ \ b = 3$ y por lo tanto $c^2 = 15$

y $c = \sqrt{15},\ e = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$ ó $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $L.R. = \frac{18}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}$, $V(-1, -3+\sqrt{6})$, $V'(-1, -3-\sqrt{6})$, $F(-1, -3+\sqrt{15})$, $F'(-1, -3-\sqrt{15})$. (ver figura 16).

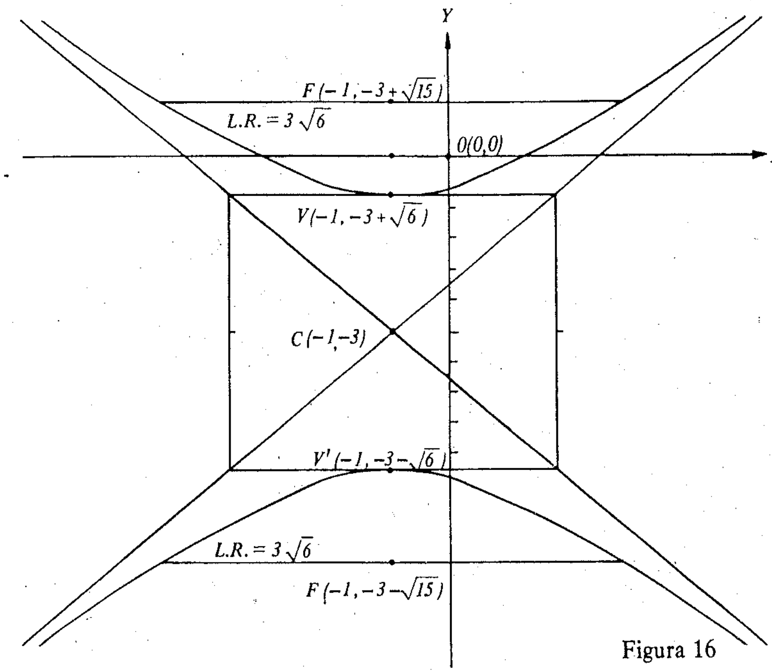


Figura 16

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Pruebe que la ecuación de una hipérbola con centro en el punto (h,k) con su eje transverso paralelo al eje Y es de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

2. Determine las ecuaciones de las asíntotas correspondientes a la hipérbola del problema 1. (Use la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$. Determine la ecuación y grafique detalladamente las hipérbolas que satisfacen las condiciones dadas.

3. Vértices en $(3, \pm 6)$ y Focos en $(3, \pm 10)$.

4. Vértices en $(-2,3)$ y $(6,3)$; un foco en $(7,3)$.

5. Centro en $(-3,-2)$; $a = 4$, $c = \sqrt{52}$, ejes paralelos a los ejes coordenados (dos soluciones).

6. Ejes p ɔ en $(-5,2)$ $e=\frac{3}{2}$ $L.R.=\frac{5}{2}$ (dos soluciones).

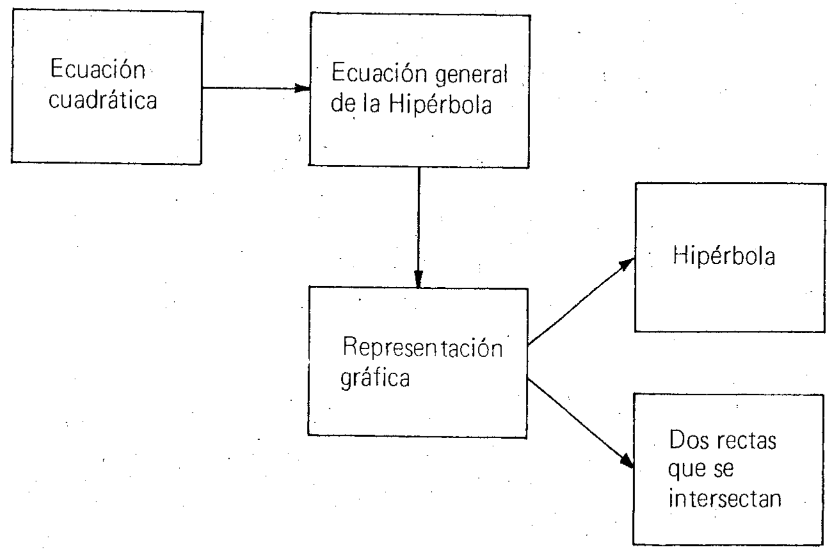
Módulo 15

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Determinará si la ecuación de una hipérbola dada en su forma general, representa a esta curva ó a dos rectas que se intersectan.
2. Determinará el valor de la constante k en la ecuación general a fin de que represente un par de rectas que se intersectan

ESQUEMA–RESUMEN



15.1 ECUACION GENERAL DE LA HIPERBOLA.

La ecuación cuadrática también representa una hipérbola que. . .

Como toda cónica, la hipérbola también se representa por medio de la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

si la hipérbola tiene sus ejes paralelos a los ejes coordenados o coinciden con ellos, entonces $B = 0$ y $AC < 0$, es decir en la ecuación cuadrática no aparece el término en xy, además el producto de los coeficientes de x^2 y y^2 es negativo.

Sea:

(1) $$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(2) $$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

(3) $$b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

(4) $$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2ky - a^2k^2 = a^2b^2$$

(5) $$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

(2) Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $a^2\ b^2$.

(3) Desarrollando los binomios al cuadrado.

(4) Efectuando operaciones indicadas

(5) Ordenando.

Hagamos

(6) $A = b^2, C = -a^2, D = -2b^2h, E = 2a^2k, F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

Sustituyendo tenemos:

(7) $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Este hecho muestra que toda hipérbola puede representarse en términos de la ecuación cuadrática ya mencionada. Pero, ¿toda ecuación del tipo mencionado en la que $B = 0$ y $A \cdot C < 0$ representa una hipérbola? Veámoslo.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A \cdot C < 0$ podemos expresarla en las siguientes formas equivalentes:

$$Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey = -F$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(y^2 - \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

si hacemos $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = N$ y consideramos que $N \neq 0$ ó $N = 0$ cuando $N \neq 0$, tenemos

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = N$$

y

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{N}{A}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{N}{C}} = 1$$

Análisis de los coeficientes de la ecuación general.

Si $\frac{N}{C} < 0$ y $\frac{N}{A} > 0$, la ecuación representa a una hipérbola con centro en $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ y eje transverso paralelo al eje X. Si $\frac{N}{A} < 0$ y $\frac{N}{C} > 0$ entonces es una hipérbola con el mismo centro, pero su eje transverso es paralelo al eje Y.

Cuando $N = 0$, la ecuación queda así:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0$$

pero recordemos del paso (6) en el proceso anterior, que
$A = b^2, C = -a^2, D = -2b^2h, F = 2a^2k.$

sustituyendo tenemos

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = 0,$$

una diferencia de cuadrados que al factorizarse resulta:

$$\left[\,b(x-h)-a\,(y-k)\,\right]\left[b(x-h)+a(y-k)\,\right]=0$$

y como un producto igual a cero implica que al menos uno de los factores es igual a cero, tenemos:

$b(x-h)-a(y-k)=0$ ó $b(x-h)+a(y-k)=0$, ó bien

$a(y-k)=b(x-h)$ ó $a(y-k)=-b(x-h)$

$(y-k)=\dfrac{b}{a}(x-h)$ ó $(y-k)=-\dfrac{b}{a}(x-h)$

Que son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1.$ Esto quiere decir que si $N=0$, la ecuación representa un par de rectas que se intersectan en el punto (h,k).

Es obvio que si la discusión anterior comienza con la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

hacer $N=0$ en la ecuación cuadrática correspondiente, nos lleva a determinar las ecuaciones de las asíntotas correspondientes a esta curva.

Ejemplo 1:

Determine si la siguiente ecuación representa una hipérbola o un par de rectas que se intersectan. Grafique con todo detalle:

$$16x^2-y^2-32x+4y-36=0$$

Solución:

En cualquiera de los casos es necesario completar trinomios cuadrados perfectos, así que:

$$16\,(x^2-2x)-(y^2-4y)=36$$
$$16\,(x-2x+1)-(y-4y+4)=36+16-4$$

Note que $=\dfrac{D^2}{4A}+\dfrac{E^2}{4C}-F$, es el miembro derecho de la ecuación

$$16\,(x-1)^2-(y-2)^2=48$$

$N=48$, y como $N\neq 0$ entonces la ecuación representa una hipérbola

$$\frac{16(x-1)^2}{48}-\frac{(y-2)^2}{48}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{48}=1$$

La ecuación correspondiente a una hipérbola cuyo eje transverso es horizontal, con centro en $(1,2)$, $a=2$, $b=4\sqrt{3}$, $c=\sqrt{52}$, $e=\dfrac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}$, $L.R.=48$, ecuaciones de asíntotas $y-2=2\sqrt{3}\,(x-1)$, $y-2=-2\sqrt{3}\,(x-1)$.

(Ver figura 17).

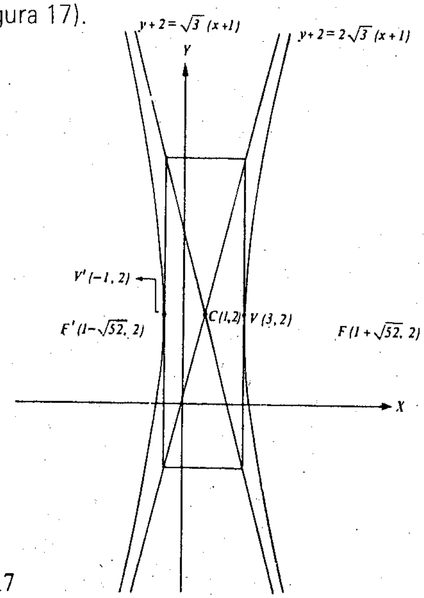


Figura 17

Ejemplo 2:

¿Qué valor debe tener K en la siguiente ecuación para que represente un par de rectas que se intersectan? Grafíquelas.

$$16x^2 - y^2 - 32x + 4y - K = 0$$

Solución:

Si: $16x^2 - y^2 - 32x + 4y - K = 0,$

Entonces: $16(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = K + 16 - 4$

Como $N = K + 12$ y la ecuación es la deseada, si $N = 0$

Tenemos $0 = K + 12$ ó $K = -12$

La ecuación queda así:

$$16(x-1)^2 - (y-2)^2 = 0$$

ó $\left[4(x-1)\right]^2 - (y-2)^2 = 0$ y factorizando resulta:

$$\left[4(x-1) - (y-2)\right]\left[4(x-1) + (y-2)\right] = 0;$$

esto implica

$$4(x-1) - (y-2) = 0 \quad ó \quad 4(x-1) + (y-2) = 0$$

y: $y - 2 = 4(x-1)$ ó $y - 2 = -4(x-1)$

estará usted de acuerdo en que el punto de intersección es (1,2) y con las pendientes, obtenemos datos suficientes para graficarlas. (Ver figura 18).

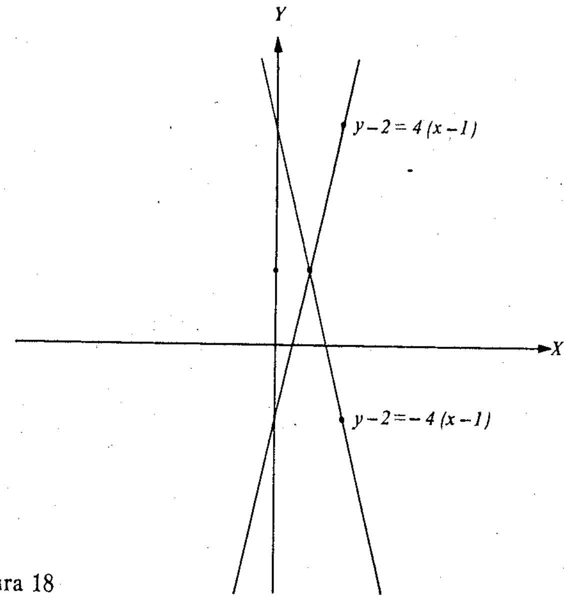


Figura 18

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine si las siguientes ecuaciones representan una hipérbola o un par de rectas que se intersectan, en cualquiera de los casos grafique y si es hipérbola, cite todos sus elementos (centro, focos, L.R., etc.)

1. $4y^2 - x^2 + 24y + 4x - 48 = 0$
2. $16x^2 - 9y^2 - 96x = 0$; recuerde que si no aparece un término de la ecuación, significa que su coeficiente es cero.
3. $y^2 - x^2 - 6y = 0$
4. $4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 35 = 0$
5. $4y^2 - 25x^2 - 24y + 100x - 164 = 0$
6. $16x^2 - 9y^2 - 18y + 96x - 9 = 0$
7. $4x^2 - 9y^2 - 18y - 24x - 9 = 0$
8. $x^2 - y^2 - 12x + 16y - 64 = 0$
9. $3y^2 - 3x^2 + 6x + 6y - 27 = 0$
10. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y + 43 = 0$

Determine K en las siguientes ecuaciones para que representen un par de rectas que se intersectan. Grafíquelas.

11. $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0$
12. $9y^2 - 16x^2 + 96y + K = 0$
13. $x^2 - y^2 - 6y + K = 0$
14. $4y^2 - x^2 + 2x + K = 0$
15. $7x^2 - 14x - y^2 - 8y + K = 0$

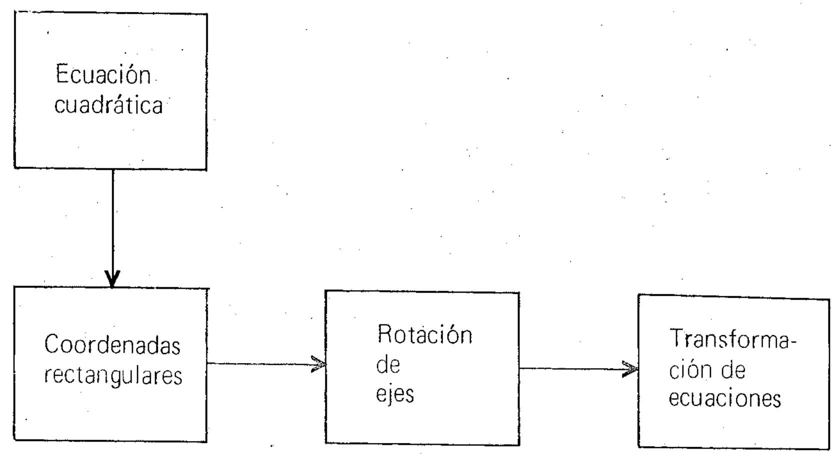
Módulo 16

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Referirá a otro sistema girado un ángulo dado, con respecto al original, la ecuación de una curva dada, referida a un sistema de dos dimensiones.
2. Simplificará la ecuación de una curva dada, eliminando los términos rectangulares, mediante una rotación de ejes.

ESQUEMA–RESUMEN



16.1 ROTACION DE EJES

Con la información que ha adquirido hasta antes de este tema, estará usted, capacitado para reconocer la cónica (si existe) representada por una ecuación de la forma $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$. Una ecuación cuadrática en x o y en la que no aparece el término en xy. $(B = 0)$

¿Cómo se efectúa una rotación de ejes?

En este tema, intentamos que logre identificar la curva aun cuando $B \neq 0$, o sea cuando en la ecuación aparezca el término xy, (Bxy). Lo haremos presentando un proceso llamado rotación de ejes mediante el cual transformamos la ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en otra que carece del término Bxy.

Cuando en un sistema de coordenadas rectangulares XY consideramos un nuevo par de ejes X' Y' *con el mismo origen,* y referimos un punto o un conjunto de puntos del primer sistema coordenado al segundo, efectuamos una rotación de ejes.

Igual que en la traslación, en la rotación de ejes existe una relación entre las coordenadas de un punto (x,y) y las coordenadas del mismo punto (x',y') referido al nuevo sistema de ejes coordenados; con objeto de obtener dicha relación, en la figura 19 llamamos γ a la magnitud del ángulo medido en sentido positivo desde la parte positiva del eje X (original) hasta la parte positiva del nuevo eje X' (Ver figura 19)

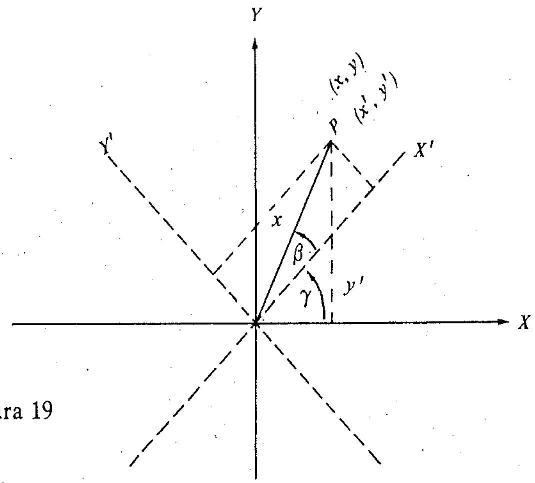


Figura 19

En el módulo 2 de la Unidad XVI, vimos que las coordenadas de un punto en el plano, pueden expresarse en términos de su distancia al origen de coordenadas (r) y del ángulo que forma el sentido positivo del eje X, con el segmento que une al punto con el origen de coordenadas, así en la figura 19 las coordenadas (x,y) del punto P con respecto a los ejes originales, pueden escribirse:

(1) $x = r\cos(\gamma + \beta)$

(2) $y = r\,\text{sen}(\gamma + \beta)$

o bien:

Coordenadas de un punto en función de su distancia al origen y del ángulo formado con el eje X.

(3) $x = r(\cos\gamma\cos\beta - \text{sen}\gamma\,\text{sen}\beta) = r\cos\gamma\cos\beta - r\,\text{sen}\gamma\,\text{sen}\beta$

(4) $y = r(\text{sen}\gamma\cos\beta + \cos\gamma\,\text{sen}\beta) = r\,\text{sen}\gamma\cos\beta + r\cos\gamma\,\text{sen}\beta$

mientras que las coordenadas del mismo (x',y') referido a los nuevos ejes son:

(5) $x' = r\cos\beta$

(6) $y' = r\,\text{sen}\,\beta$

sustituyendo de (5) y (6) en (3) y (4) tenemos:

(7) $x = x'\cos\gamma - y'\,\text{sen}\,\gamma$

(8) $y = x'\,\text{sen}\,\gamma + y'\cos\gamma$

Ahora bien, para expresar x' y y' en términos de x, y y, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (7) y (8).

Multiplicando (7) por $\cos\gamma$ y (8) por $\text{sen}\,\gamma$, resulta:

$$x\cos\gamma = x'\cos^2\gamma - y'\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma$$
$$y\,\text{sen}\,\gamma = x'\,\text{sen}^2\gamma + y'\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma$$

sumando: $x\cos\gamma + y\,\text{sen}\,\gamma = x'(\cos^2\gamma + \text{sen}^2\gamma)$

ó: $x\cos\gamma + y\,\text{sen}\,\gamma = x'$

ó: $x' = x\cos\gamma + y\,\text{sen}\,\gamma$

$$x = (x \cos\gamma + y \operatorname{sen}\gamma) \cos\gamma - y' \operatorname{sen}\gamma$$

de donde

$$x = x \cos^2\gamma + y \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma - y' \operatorname{sen}\gamma$$
$$x - x \cos^2\gamma - y \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma = - y' \operatorname{sen}\gamma$$
$$x (1 - \cos^2\gamma) - y \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma = - y' \operatorname{sen}\gamma$$
$$x \operatorname{sen}^2\gamma - y \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma = - y' \operatorname{sen}\gamma$$
$$(x \operatorname{sen}\gamma - y \cos\gamma) \operatorname{sen}\gamma = - y' \operatorname{sen}\gamma$$
$$x \operatorname{sen}\gamma - y \cos\gamma = - y'$$

ó: $y' = - x \operatorname{sen}\gamma + y \cos\gamma$ así

entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \cos\gamma + y \operatorname{sen}\gamma \\ y' &= - x \operatorname{sen}\gamma + y \cos\gamma \end{aligned}}$$

Estas ecuaciones las utilizará para determinar las nuevas coordenadas (x', y') del punto $P\ (x,y)$ cuando los ejes coordenados XY giran un ángulo γ

Ejemplos 1:

Un sistema de coordenadas rectangulares se rota en 45°;

Determine las coordenadas del punto $A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ referido al nuevo sistema coordenado X', Y'

sabemos que

$$x' = x \cos\gamma + y \operatorname{sen}\gamma$$
$$y' = - x \operatorname{sen}\gamma + y \cos\gamma$$

si $\gamma = 45°$, $\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, y $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

sustituyendo tenemos:

$$x' = x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y' = - x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y como

$$x = 2,\ y = -\frac{1}{2}$$
$$x' = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad y' = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$ es el punto referido al sistema coordenado $X'Y'$. (Ver figura 20).

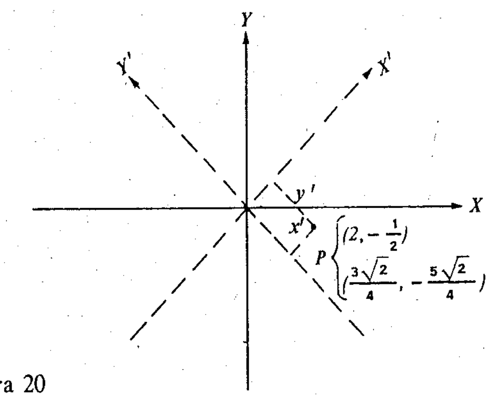


Figura 20

Ejemplo 2:

Si un sistema de coordenadas rectangulares se rota 45°, ¿cuál es la ecuación de la curva $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$?

Solución:

$$x = x' \cos\gamma - y' \operatorname{sen}\gamma;\ y = x' \operatorname{sen}\gamma + y' \cos\gamma;$$

$\gamma = 45°$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sustituyendo y efectuando tenemos: $x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$

escribiendo x y y en términos de x' y y' en la ecuación dada:

$$3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) = 2$$

$$\frac{3}{2}x'^2 - 3x'y' + \frac{3}{2}y'^2 - x'^2 + y'^2 + \frac{3}{2}x'^2 + 3x'y' + \frac{3}{2}y'^2 = 2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{2}\right)x'^2 + \left(-3 + 3\right)x'y' + \left(\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right)y'^2 = 2$$

$2x'^2 + 4y'^2 = 2$ ó

$x'^2 + 2y'^2 = 1$

$x'^2 + \frac{y'^2}{\frac{1}{2}} = 1$, en donde $a^2 = 1, b^2 = \frac{1}{2}$ ó $a = 1,\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Obviamente, eliminar el término en xy nos permite identificar la curva representada por esta ecuación como una elipse de centro en el origen y con sus ejes coincidiendo con los ejes $X'Y'$ como puedes apreciar en la siguiente figura.

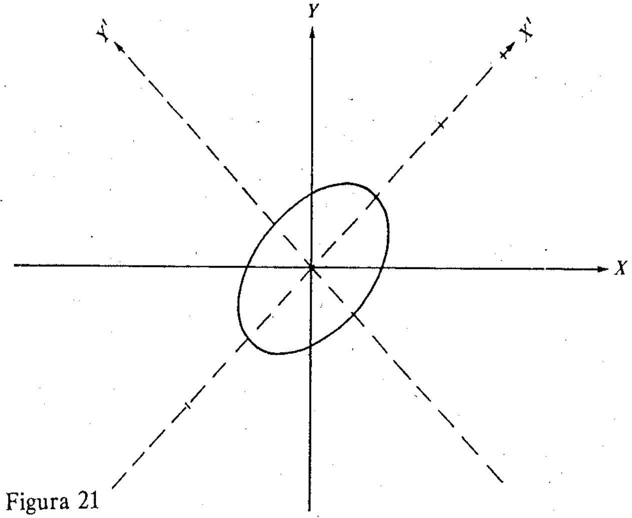


Figura 21

Hemos visto que para eliminar el término Bxy de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

los ejes deben rotar pero, ¿cuál es la magnitud de γ para que eso suceda?

Mostraremos dos posibilidades, una de ellas se presenta cuando $A \neq C$, y la otra si $A = C$.

Si $A \neq C$, entonces $tg 2\gamma = \frac{B}{A - C}$
Si $A = C$, entonces $\gamma = 45°$

Sean las ecuaciones

(1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y

(2) $x = x' \cos\gamma - y' \operatorname{sen}\gamma,\ y = x' \operatorname{sen}\gamma + y' \cos\gamma$

$$A(x'\cos\gamma - y'\operatorname{sen}\gamma)^2 + B(x'\cos\gamma - y'\operatorname{sen}\gamma)(x'\operatorname{sen}\gamma + y'\cos\gamma) +$$

$$C(x'\operatorname{sen}\gamma + y'\operatorname{sen}\gamma)^2 + D(x'\cos\gamma - y'\operatorname{sen}\gamma)$$
$$+ E(x'\operatorname{sen}\gamma + y'\operatorname{sen}\gamma) + F = 0$$

efectuando las operaciones indicadas, agrupando términos semejantes y haciendo

$$A' = A\cos^2\gamma + B\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + C\operatorname{sen}^2\gamma$$
$$B' = 2(C - A)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + B(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)$$
$$C' = A\operatorname{sen}^2\gamma - B\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + C\cos^2\gamma$$
$$D' = D\cos\gamma + E\operatorname{sen}\gamma$$
$E' = E\cos\gamma - D\operatorname{sen}\gamma$, resulta que

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ es la nueva ecuación de la misma curva, referida ahora al sistema coordenado $x'y'$. Si queremos que no aparezca el término en $x'y'$, debemos procurar que $B' = 0$, ó bien de la igualdad $B' = 2(C-A)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + B(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)$. Si $B' = 0$

$0 = 2(C - A)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + B(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)$. De donde

$-2(C - A)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = B(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)$. O bien

$2(A - C)\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = B(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)$. También

$(A - C)\,2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = B(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)$

y como: $2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma \equiv \operatorname{sen}2\gamma$, y $\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma = \cos 2\gamma$

$(A - C)\operatorname{sen}2\gamma = B\cos 2\gamma$

finalmente:

$$\frac{\operatorname{sen}2\gamma}{\cos 2\gamma} = \frac{B}{A - C} \quad \text{ó} \quad \boxed{\operatorname{tg}2\gamma = \frac{B}{A - C}}$$

En esta ecuación si $A = C$, $A - C = 0$, entonces $\dfrac{B}{A - C}$ no existe en el conjunto de los números reales,

por lo que $2\gamma = 90°$, y por consecuencia $\gamma = 45°$.

Al rotar los ejes coordenados, la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se convierte en

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

en la cual:

$$A' + C' = A\cos^2\gamma + B\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + C\operatorname{sen}^2\gamma$$
$$+ A\operatorname{sen}^2\gamma - B\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + C\cos^2\gamma$$
$$A' + C' = A(\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma) + C(\operatorname{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma)$$
$$A' + C' = A + C$$

esto significa que la suma $A + C$, *no cambia cuando se lleva a cabo una rotación* de ejes coordenados cuya magnitud representa la variable γ. Dada la característica de la suma $A + C$ ésta es conocida como *invariante;* este nombre se le asigna a todo número con la misma característica, es decir, dicho número resulta de operaciones entre los coeficientes de la ecuación general de segundo grado y no se altera al rotar los ejes coordenados.

Análisis de la expresión $B^2 = 4AC$

$B^2 - 4AC$ es también invariante bajo una rotación de ejes, pero no lo verificamos aquí. De la misma manera establecemos los siguientes hechos:

Si $B^2 - 4AC < 0$; la curva es una elipse, una circunferencia (si $B = 0$), un punto ó no existe la curva.

Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación representa una parábola, dos rectas paralelas, una recta ó bien no tiene gráfica.

Si $B^2 - 4AC > 0$, representa una hipérbola, ó dos rectas que se cortan.

Ejemplo 3:

Identifique la curva definida por la ecuación $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$, grafíquela.

Solución:

$B^2 - 4AC = 16 - 4 \cdot 40$, por lo que $B^2 - 4AC < 0$, $B \neq 0$.

Si $B \neq 0$ no representa una circunferencia, quedan entonces como posibles una elipse, un punto ó el conjunto vacío.

Como

$A = 8, B = -4, C = 5, D = 0, E = 0, F = -36$; con $A \neq C$,

entonces

$$tg2\gamma = -\frac{4}{3} \cdot 2\gamma = 126°52', \ \gamma = 63°26'$$

Ahora determinaremos $cos\gamma$, $sen\gamma$ con objeto de sustituir en

$$x = x' \ cos\gamma - y' \ sen\gamma \ , \ y = x' \ sen\gamma + y' \ cos\gamma$$

como $tg2\gamma = -\frac{4}{3}$, 2γ es un ángulo del segundo cuadrante, y dado que

$$tg2\gamma \equiv \frac{sen2\gamma}{cos2\gamma}$$ tenemos:

$$\frac{sen2\gamma}{cos2\gamma} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{sen^2 2\gamma}{cos^2 2\gamma} = \frac{16}{9}$$

$$9 \ sen^2 2\gamma = 16 \ cos^2 2\gamma$$

$$9(1 - cos^2 2\gamma) = 16 \ cos^2 2\gamma$$

$$9 - 9 \ cos^2 \ 2\gamma = 16 \ cos^2 2\gamma$$

$$25 \ cos^2 2\gamma = 9$$

$$cos^2 2\gamma = \frac{9}{25}$$

$$cos2\gamma = -\frac{3}{5}$$

$cos2\gamma$ es negativo, ya que 2γ es un ángulo del segundo cuadrante. Ahora bien, basándonos en las identidades

$$cos\frac{\alpha}{2} \equiv \sqrt{\frac{1 + cos \ \alpha}{2}} \ \text{ y } \ sen\frac{\alpha}{2} \equiv \sqrt{\frac{1 - cos \ \alpha}{2}}$$ resulta:

$$cos\gamma \equiv \sqrt{\frac{1 + cos2\gamma}{2}} \ \text{ y } \ sen\gamma \equiv \sqrt{\frac{1 - cos2\gamma}{2}}$$

sustituyendo $cos2\gamma$

$$cos\gamma \equiv \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \ \text{ y } \ sen\gamma = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}}$$

$$cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} \ \text{ y } \ sen\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Entonces sustituyendo en

$$x = x' \ cos\gamma - y' \ sen\gamma \quad \text{y} \quad y = x' \ sen\gamma + y' \ cos\gamma$$

tenemos

$$x = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \qquad y = \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}$$

Sustituyendo ahora en $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$, tenemos

$$8\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) + 5\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

$$8\left(\frac{x'^2}{5} - \frac{4}{5}x'y' + \frac{4y'^2}{5}\right) - 4\left(\frac{2x'^2}{5} + \frac{x'y'}{5} - \frac{4x'y'}{5} + \frac{2y'^2}{5}\right)$$

$$+ 5\left(\frac{4x'^2}{5} + \frac{4x'y'}{5} + \frac{y'^2}{5}\right) = 36$$

$$\frac{8}{5}x'^2 - \frac{32}{5}x'y' + \frac{32y'^2}{5} - \frac{8x'^2}{5} + \frac{12x'y'}{5} - \frac{8y'^2}{5} + \frac{20x'^2}{5}$$

$$+ \frac{20x'y'}{5} + \frac{5y'^2}{5} = 36$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\frac{20x'^2}{5} + \frac{45y'^2}{5} = 36$$

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

obviamente una elipse (ver figura 22).

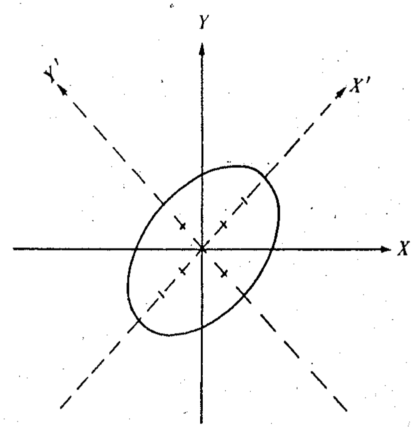


Figura 22

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine e identifique la curva definida por cada una de las siguientes ecuaciones, eliminando el término en xy. Grafique cada caso.

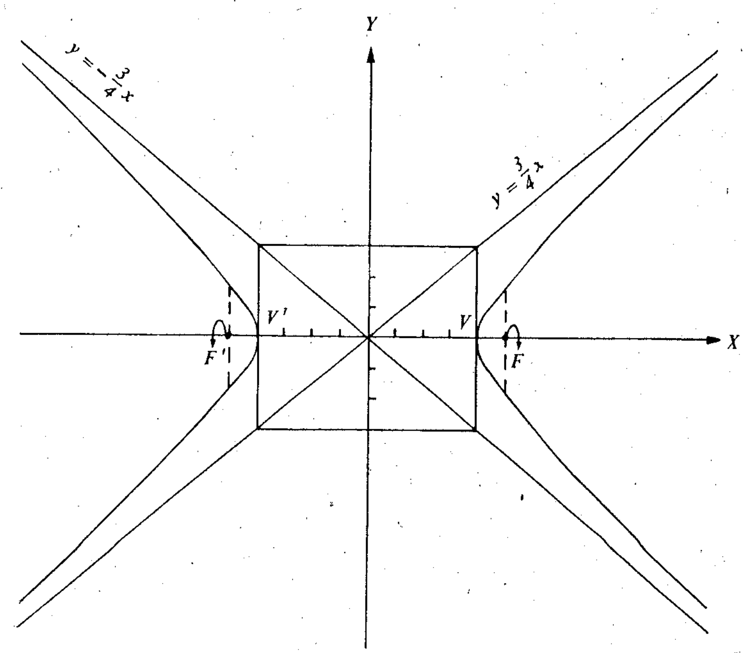
1. $xy = 1$
2. $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$
3. $xy = -3$
4. $x^2 + 4xy + y^2 + 32 = 0$

Paneles de verificación

MODULO 13 – VALIDACION

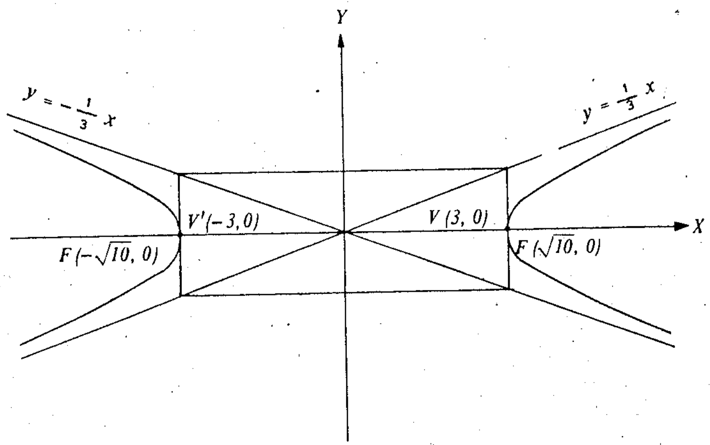
1. $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $V'(-4,0)$, $V(4,0)$, $F'(-5,0)$, $F(5,0)$, $L.R. = \frac{9}{2}$,

$e = \frac{5}{4}$, $y = -\frac{3}{4}x$, $y = \frac{3}{4}x$



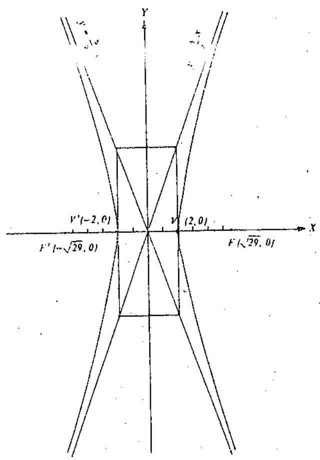
2. $a = 3,\ b = 1,\ c = \sqrt{10}\ ,\ V\ (\pm 3, 0),\ F\ (\pm\sqrt{10},\ 0),\ e = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$,

$L.R. = \dfrac{2}{3}$. Ecuaciones de asíntotas. . . $y = -\dfrac{1}{3}x,\ y = \dfrac{1}{3}x$



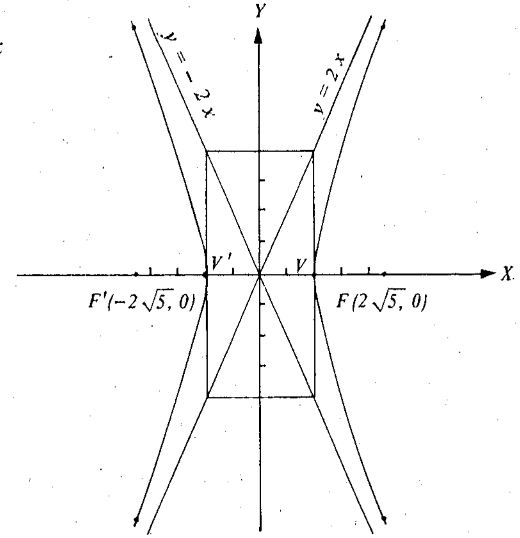
3. $a = 2,\ b = 5,\ c = \sqrt{29},\ V\ (\pm 2, 0),\ F(\pm\sqrt{29},\ 0),\ e = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$,

$L.R. = 25,\ y = \pm\dfrac{5}{2}\ x.$



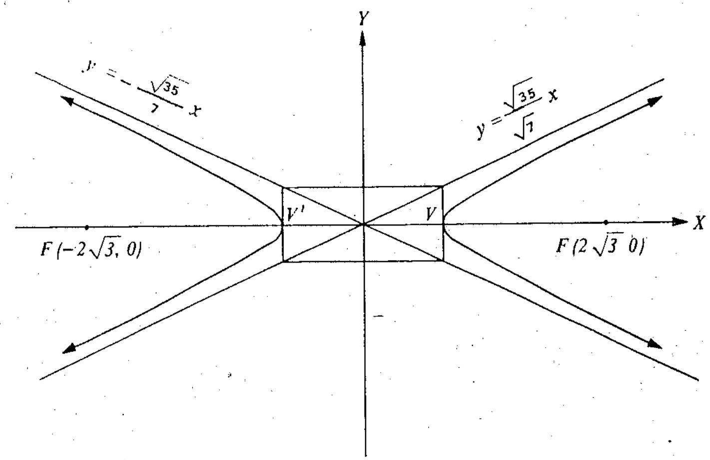
4. $a = 2,\ b = 4,\ c = \sqrt{20},\ F\ (\pm 2\sqrt{5},\ 0),\ V\ (\pm 2, 0),\ e = \sqrt{5},\ L.R. = 16,$

$y = \pm\ 2x$



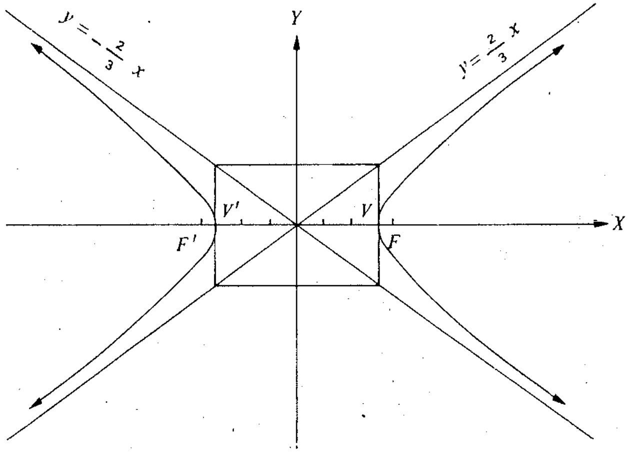
5. $a = \sqrt{7},\ b = \sqrt{5},\ c = 2\sqrt{3},\ F\ (\pm 2\sqrt{3},\ 0),\ V\ (\pm\sqrt{7},\ 0),$

$e = \dfrac{2\sqrt{21}}{7},\ L.R. = \dfrac{10\sqrt{7}}{7},\ y = \pm\dfrac{\sqrt{35}}{7}\ x$



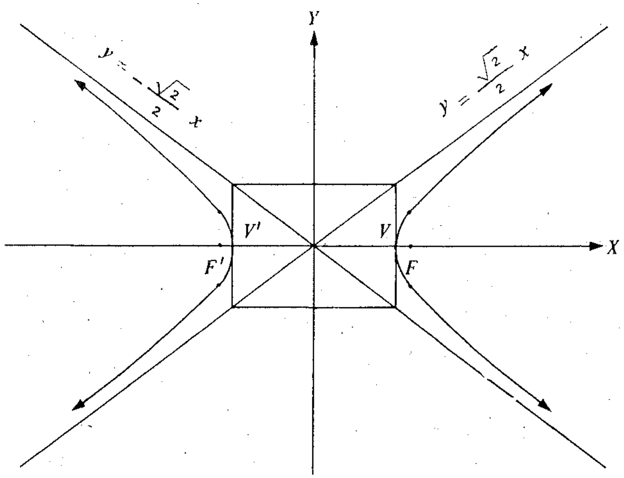
6. $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13},\ F\,(\pm\sqrt{13},\ 0),\ V\,(\pm 3, 0),\ e = \dfrac{\sqrt{13}}{3},$

$L.R. = \dfrac{8}{3},\ y = \pm\,\dfrac{2}{3}x$



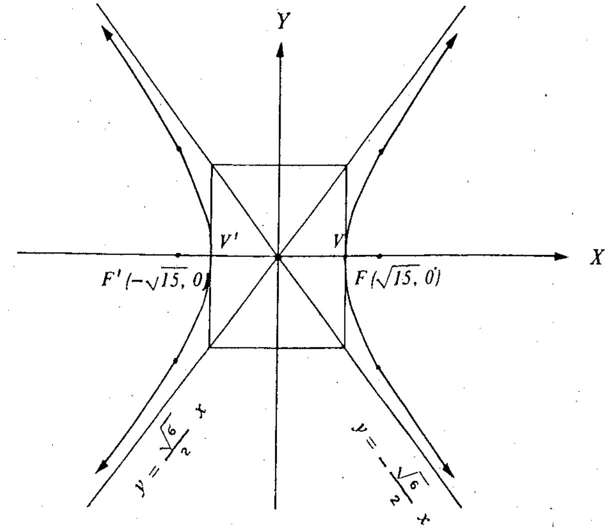
7. $a = 2\sqrt{2},\ b = 2,\ c = 2\sqrt{3},\ F(\pm 2\sqrt{3},\ 0),\ V(\pm 2\sqrt{2},\ 0),\ e = \dfrac{\sqrt{6}}{2},$

$L.R. = 2\sqrt{2}\ ,\ y = \pm\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x$



8. $a = \sqrt{6},\ b = 3,\ c = \sqrt{15},\ F(\pm\sqrt{15},\ 0),\ V\,(\pm\sqrt{6},\ 0),\ e = \dfrac{\sqrt{10}}{2},$

$L.R. = 3\sqrt{6},\ y = \pm\,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\,x$



9. $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

10. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

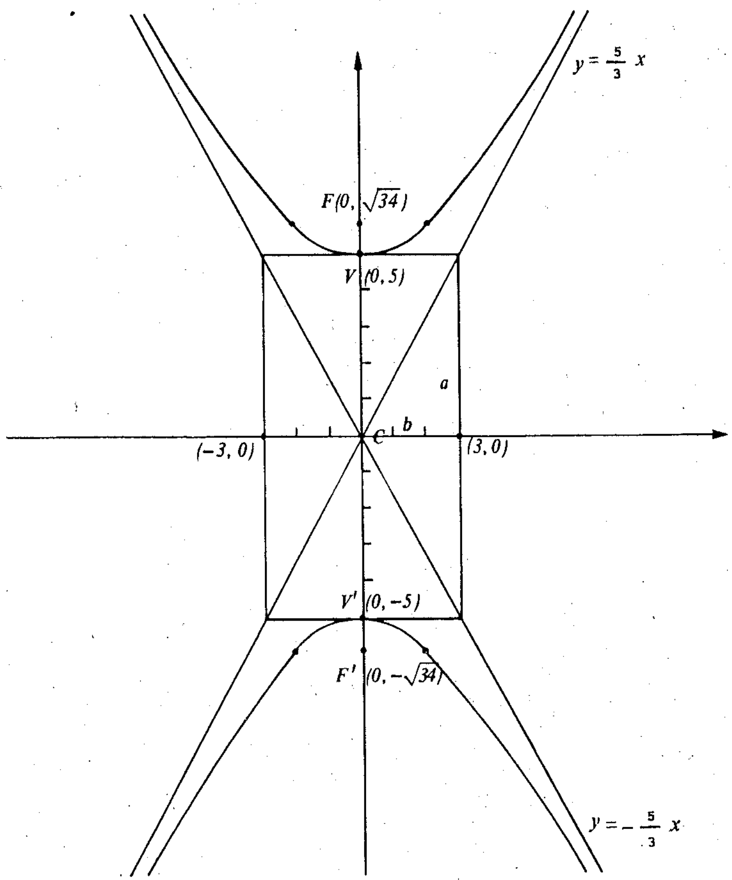
11. $\dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1$

12. $\dfrac{5x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

14. $a = 5,\ b = 3,\ c = \sqrt{34},\ e = \dfrac{\sqrt{34}}{5},$

$L.R. = \dfrac{18}{5}\ F\,(0, \pm \sqrt{34}\,),\ V\,(0, \pm 5)$

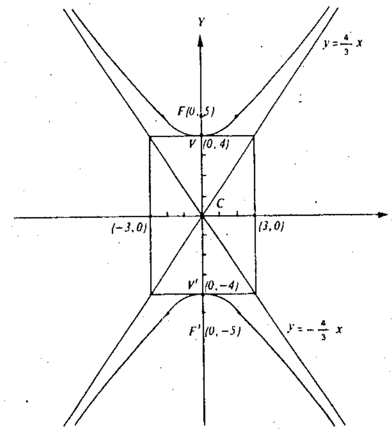
Asíntotas: $y = \pm \dfrac{5}{3}\,x$



15. $a = 4,\ b = 3,\ c = 5,\ e = \dfrac{5}{4};\ L.R. = \dfrac{9}{2}$

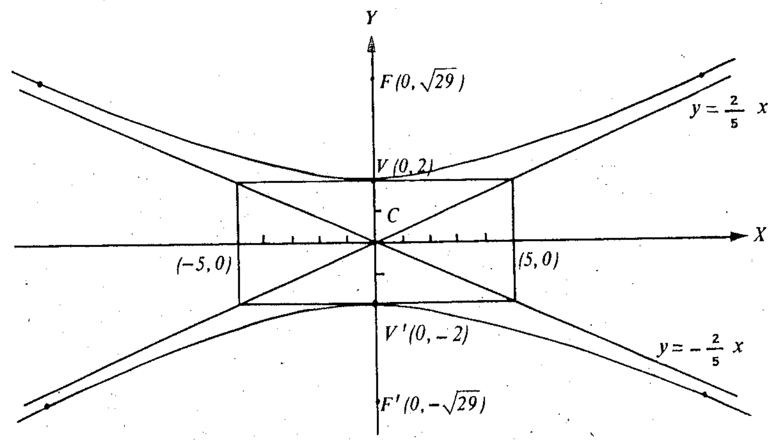
$F\,(0, \pm 5),\ V\,(0, \pm 4)$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{4}{3}x$



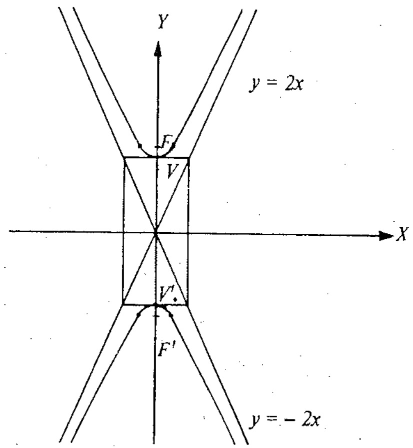
16. $a = 2,\ b = 5,\ c = \sqrt{29},\ F\,(0, \pm \sqrt{29}\,),\ e = L.R. = 25$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{2}{5}\,x$



17. $a = 4,\ b = 2,\ c = 2\sqrt{5},\ e = \dfrac{\sqrt{5}}{2},\ L.R. = 2,\ F\,(0, \pm 2\sqrt{5}),\ V\,(0, \pm 4)$

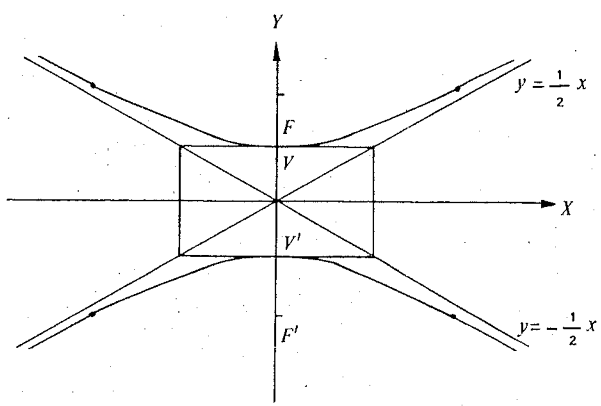
Asíntotas: $y = \pm 2x$



18. $a = 2,\ b = 4,\ c = 2\sqrt{5},\ e = \sqrt{5},\ L.R. = 16$

$F\,(0, \pm 2\sqrt{5}),\ V\,(0, \pm 2)$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{1}{2}\,x$

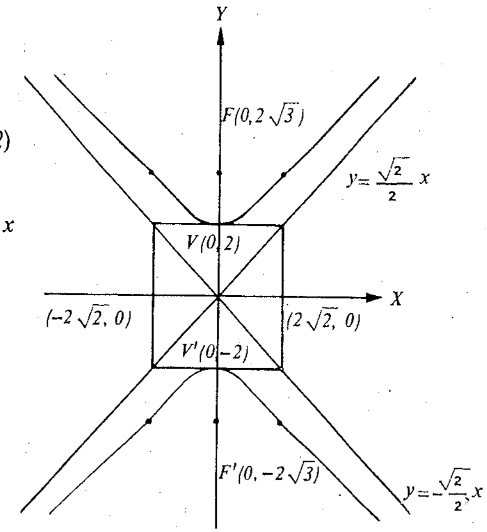


19. $a = 2,\ b = 2\sqrt{2},\ c = 2\sqrt{3}$

$e = \sqrt{3},\ L.R. = 8$

$F\,(0, \pm 2\sqrt{3}),\ V\,(0, \pm 2)$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x$



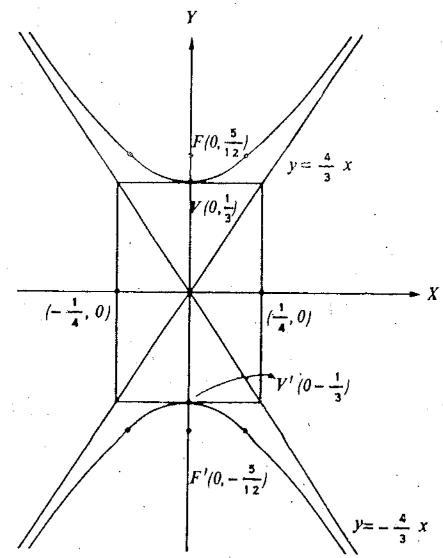
20. $a = \dfrac{1}{3}\ b = \dfrac{1}{4}\ c = \dfrac{5}{12}$

$e = \dfrac{5}{4};\ L.R. = \dfrac{3}{8}$

$F\quad 0, \pm \dfrac{5}{12}$

$V\quad 0, \pm \dfrac{1}{3}$

$y = \pm \dfrac{4}{3}x$

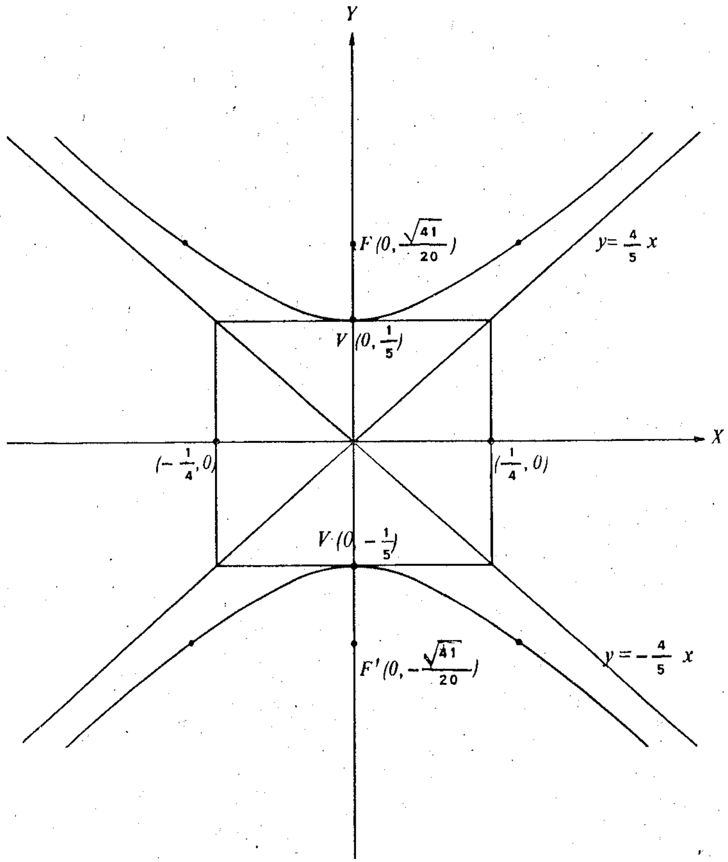


21. $a = \frac{1}{5},\ b = \frac{1}{4},\ c = \frac{\sqrt{41}}{20}$

$e = \frac{\sqrt{41}}{4},\ L.R. = \frac{5}{8}$

$F\,(0, \pm\frac{\sqrt{41}}{20}),\ V\,(0, \pm\frac{1}{5})$

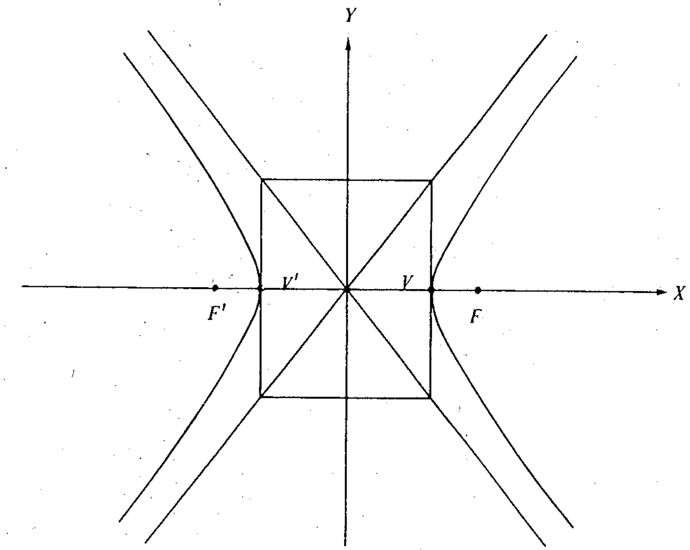
Asíntotas: $y = \pm\frac{4}{5}x$



22. Focos en X

$F'\,(-\sqrt{7},\ 0)$

$F\,(\sqrt{7},\ 0)$



23. Focos en eje Y

24. Focos en eje X

25. Focos en eje Y

26. $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = 1$

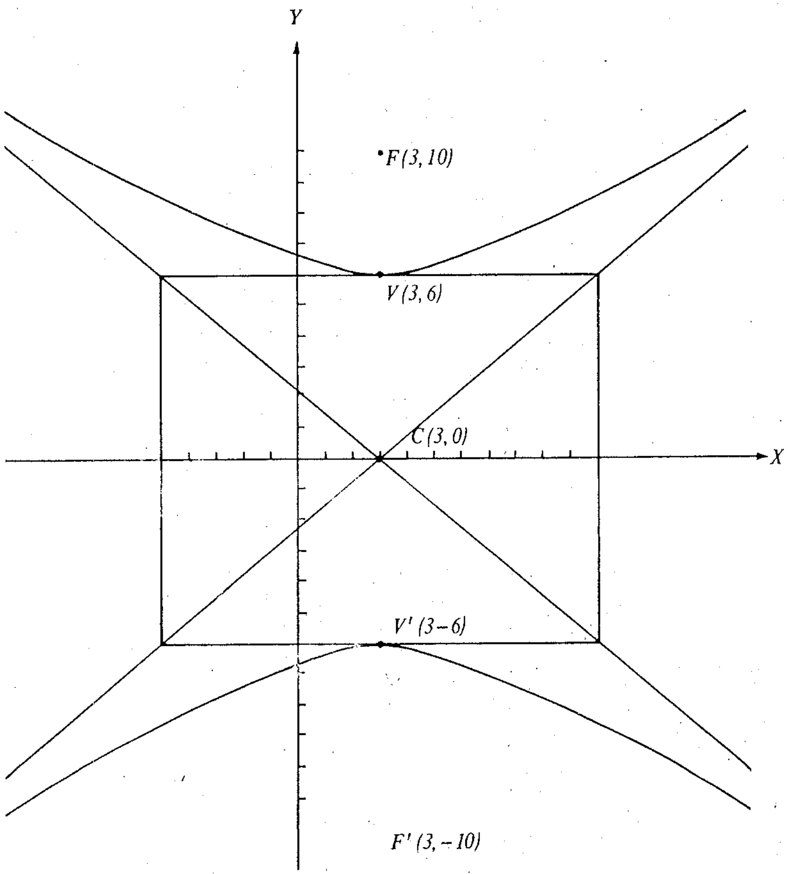
27. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

28. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{21} = 1$

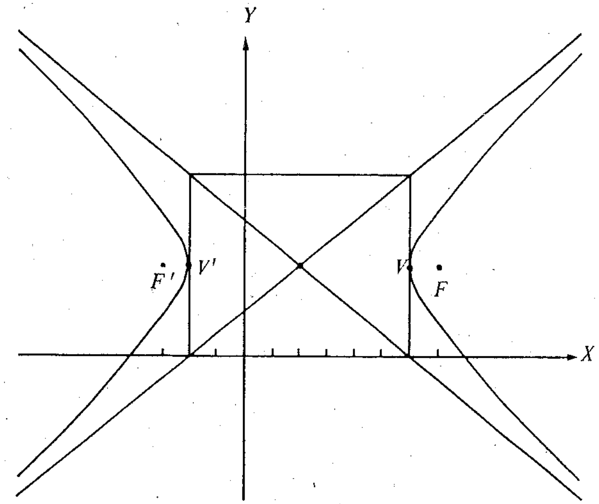
29. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$

2. $(y - k) = \frac{a}{b}(x - h),\; y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$

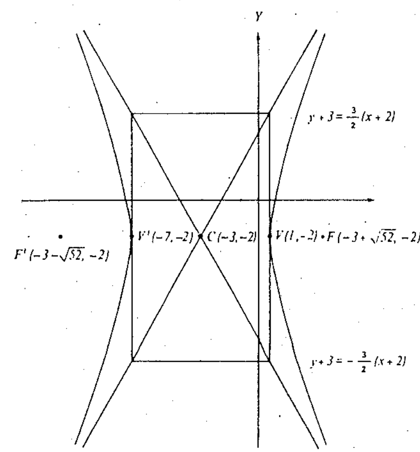
3. $\frac{y^2}{36} - \frac{(x - 3)^2}{64} = 1$



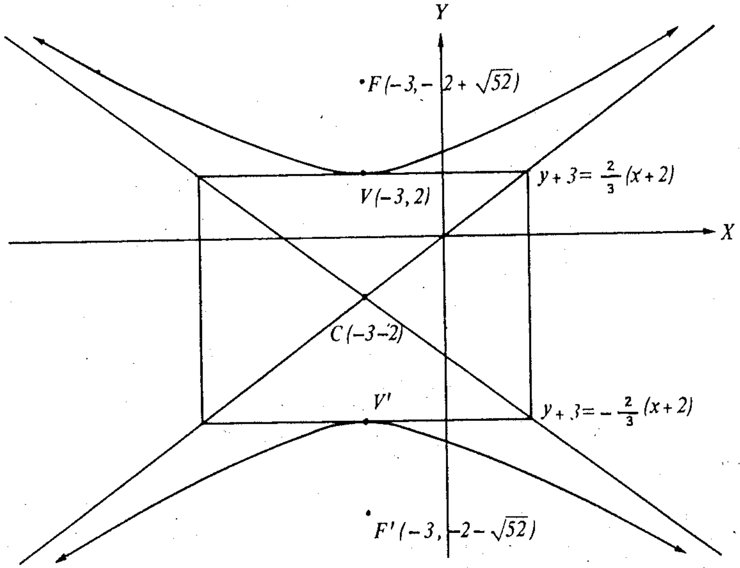
4. $\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$



5. a) $\frac{(x + 3)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{36} = 1,$

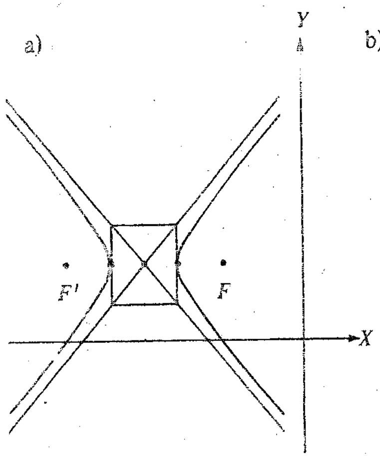


b) $\dfrac{(y+2)^2}{16} - \dfrac{(x+3)^2}{36} = 1$

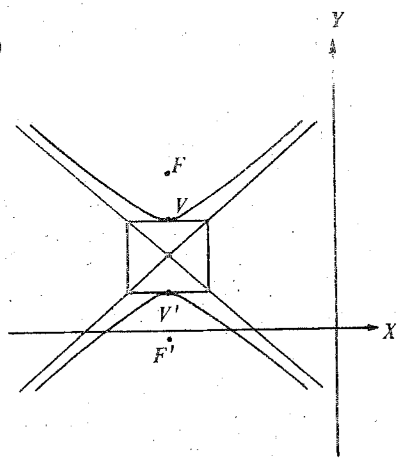


6. a) $\dfrac{(x+5)^2}{1} - \dfrac{4(y-2)^2}{5} = 1$ b) $\dfrac{(y-2)^2}{1} - \dfrac{4(x+5)^2}{5} = 1$

a)

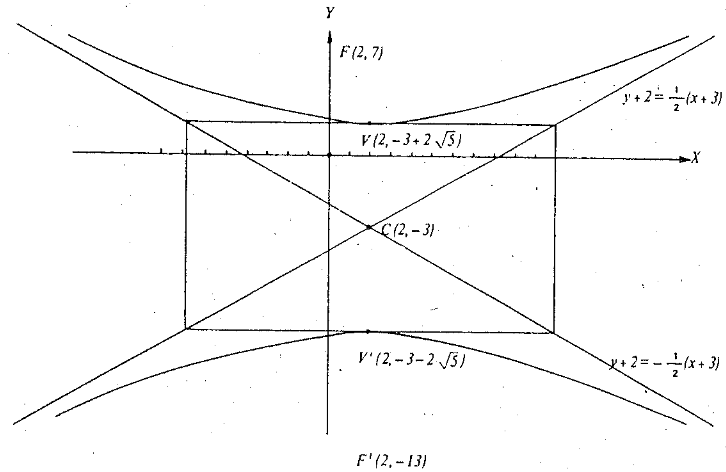


b)



1. Hipérbola con eje transverso vertical

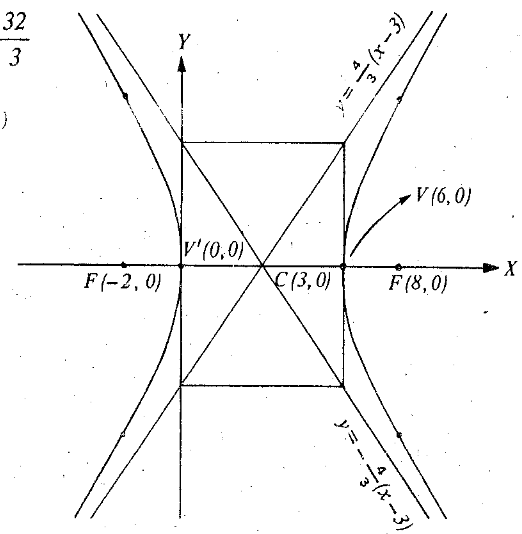
$C\ (2,\ -3)$



2. $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$

$e = \dfrac{5}{3},\ L.R. = \dfrac{32}{3}$

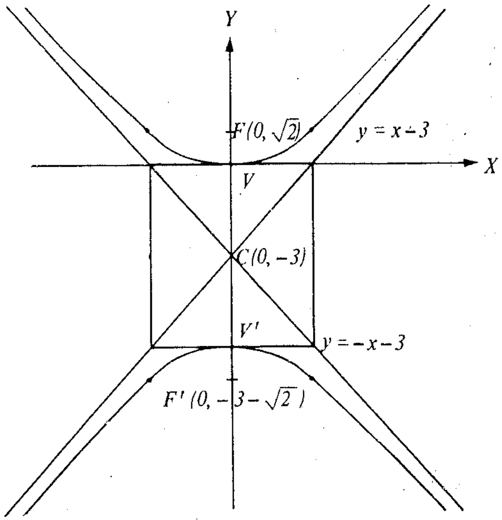
$y = \pm\dfrac{4}{3}(x-3)$



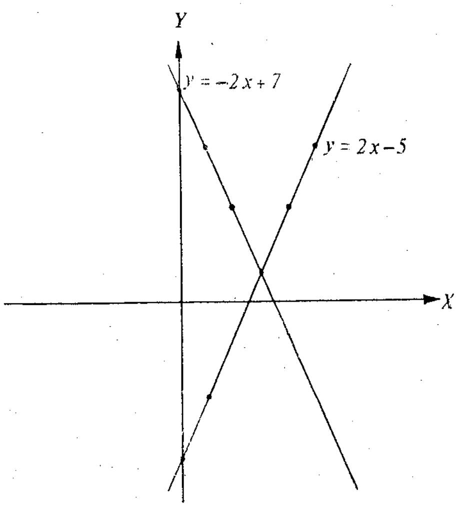
3. $a = 3,\ b = 3,\ c = 3\sqrt{2}$

$e = \sqrt{2},\ L.R. = 6$

$y = \pm x - 3$

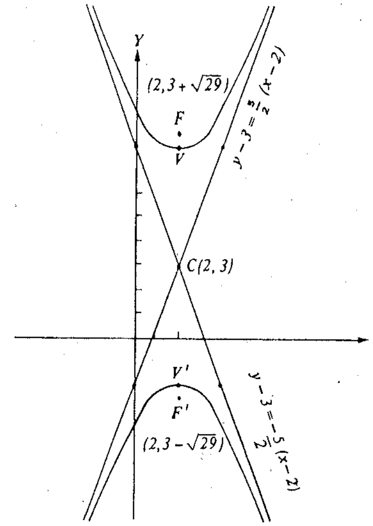


4.

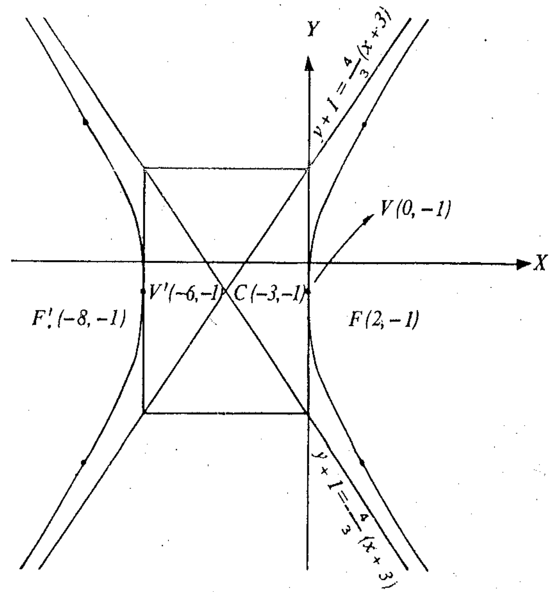


5. $C\ (2,3),\ a = 5,\ b = 2,\ c = \sqrt{29}$

$e = \dfrac{\sqrt{29}}{5}\ ,\ L.R. = \dfrac{8}{5}$



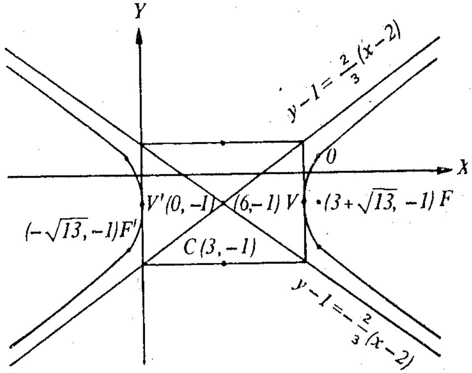
6.



7. $C\,(3,\ -1),\ a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13}$

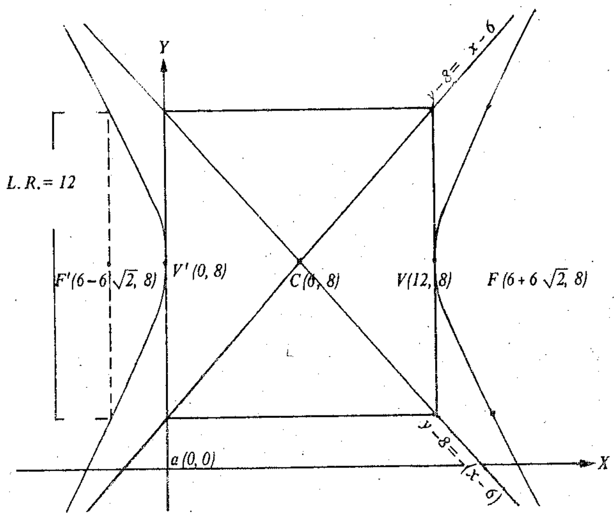
$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $L.R. = 9$

$y - 1 = \pm\dfrac{2}{3}(x - 2)$

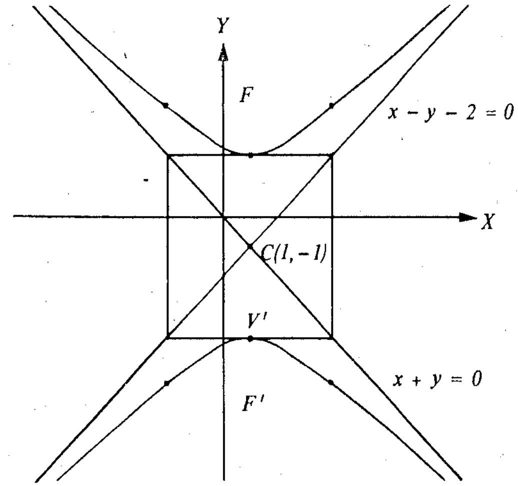


8. $C\,(6,8),\ V\,(12,8),\ V'\,(0,8),\ F\,(6 + 6\sqrt{2},\ 8),\ F'\,(6 - 6\sqrt{2},\ 8)$,

$e = \sqrt{2}$, $L.R. = 12$

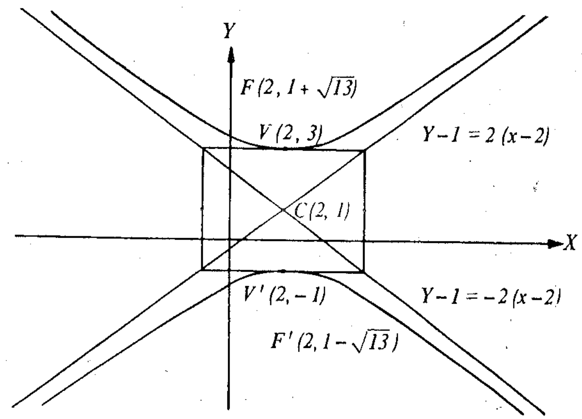


9.



$C\,(1,-1),\ V\,(1,2),\ V'\,(1,-4),\ F\,(1,-1 + 3\sqrt{2}),\ F'\,(1,-1-3\sqrt{2})$,
$e = \sqrt{2}$, $L.R. = 6$

10.



$C\,(2,1),\ V\,(2,3),\ V'\,(2,-1),\ F\,(2,1 + \sqrt{13}),\ F'\,(2,1 - \sqrt{13})$, $L.R. = 9$,

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

11. $K = -32$
12. $K = 256$
13. $K = -9$
14. $K = -1$
15. $K = -9$

MODULO-16 VALIDACION

1. Hipérbola, $\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{2} = 1 \qquad \gamma = 45^o$

2. Elipse, $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{2} = 1, \qquad \gamma = 45^o$

3. Hipérbola, $\dfrac{y'^2}{6} - \dfrac{x'^2}{6} = 1, \qquad \gamma = 45^o$

4. Hipérbola, $\dfrac{y'^2}{32} - \dfrac{x'^2}{\frac{32}{3}} = 1$

Bibliografía

Introducción a la Matemática Moderna.
Elbridge P. Vance
Addison – Wesley Publishing Company
Capítulo VII y Capítulo XXI

First Year College Mathematics.
Frank Ayres, Jr.
Schaum Publishing Co.
Parte I, Capítulos: 4, 5, 9
Parte III, Capítulos: 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55.

Geometría Analítica Bidimensional.
Pedro Lezama Noriega.
Compañía Editorial Continental, S. A.
Capítulo I, II, V, VI, VII.

Geometría Analítica.
William Wernick
Publicaciones Cultural, S. A.
Capítulos: 3, 5, 6, 7.

MATEMATICAS V,
QUINTO SEMESTRE
Esta publicación se terminó de imprimir en el mes de junio de 1996, en los talleres de:
EDICIONES ECA, S. A. de C. V.
Calle B Núm. 20 Mzna. XI, Col. Educación
04400 México, D. F.
Tiraje: 3,000 ejemplares